Chapitre 12

Probabilités

Dans ce chapitre, si $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant q$, on notera $[\![p, q]\!]$ l'ensemble $\{p, p+1, \ldots, q\}$.

12.1 Préambule

12.1.1 Ensembles finis

Un ensemble d'objets est fini
si on peut « compter » ses éléments.

Définition 1

Soit E un ensemble.
• Si $E \neq \emptyset$: on dit que E est fini s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection $\varphi : [\![1, n]\!] \longrightarrow E$.
On peut démontrer que dans ce cas, n est unique, on l'appelle cardinal de E : $\operatorname{card}(E) = n$.
• Si $E = \emptyset$: par convention, E est fini et $\operatorname{card}(E) = 0$.

• **Partitions :** On admet la proposition suivante.

Proposition 1

Soit E un ensemble fini.
• Si $F \subset E$, alors F est fini et $\operatorname{card}(F) \leqslant \operatorname{card}(E)$.
• Si F, G sont des sous-ensembles de E tels que $F \cap G = \emptyset$ et $F \cup G = E$ alors, on dit que F, G est une partition de E et on a $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F) + \operatorname{card}(G)$.
• Plus généralement, si $F_1, \ldots, F_p$ sont des sous-ensembles de E deux-à-deux disjoints tels que $\bigcup_{i=1}^{p} F_i = E$ alors, on dit que $F_1, \ldots, F_p$ est une partition de E et on a $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F_1) + \cdots + \operatorname{card}(F_p)$.

• **Propriétés opératoires :**

Si A, B sont deux parties de E, on définit :

$$A \setminus B = \{x \in A,\ x \notin B\}.$$

D'après la proposition précédente, on a $\text{card}(A) = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(A \cap B)$ et donc

$$\text{card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B).$$

Et de même, $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(A \cap B) + \text{card}(B \setminus A) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

Proposition 2

- Si E est un ensemble fini et si $A, B \subset E$ on a

$$\text{card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B).$$

- En particulier, puisque $\bar{A} = E \setminus A$ on a

$$\text{card}(\bar{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A).$$

- Formule de Grassmann : $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

- **Produit d'ensembles finis :** On admet la proposition suivante.

Proposition 3

- Soient A, B deux ensembles finis, alors $A \times B = \{(a,b), \quad a \in A,\ b \in B\}$ est fini et

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B).$$

- Soient $A_1, \dots A_p$ des ensembles finis, alors $A_1 \times \cdots \times A_p = \{(a_1, \dots, a_p), \quad \forall i \in [\![1, p]\!],\ a_i \in A_i\}$ est fini et

$$\text{card}(A_1 \times \cdots \times A_p) = \text{card}(A_1) \times \cdots \times \text{card}(A_p).$$

12.1.2 Ensembles dénombrables

Un ensemble qui n'est pas fini (c'est-à-dire tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut y trouver n éléments distincts) est dit infini. Par exemple, $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sont des ensembles infinis. Cependant, ces ensembles n'ont pas la même « façon » d'être infinis. Plus précisément, on peut « énumérer les éléments de $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ à l'infini », pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ce n'est pas possible.

Définition 2

Soit E un ensemble. On dit que E est **dénombrable** s'il existe une bijection

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & E \\ n & \longmapsto & \varphi(n) = x_n \end{array} \right.$$

autrement dit si l'on peut compter à l'infini les éléments de E.

$$E = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} = \{\varphi(n),\ n \in \mathbb{N}\}.$$

On remarque en particulier, qu'un ensemble dénombrable est nécessairement **infini**.

Exemple 12.1. $\mathbb{N}^*$ *est dénombrable :*

Exemple 12.2. *L'ensemble P (resp. I) des entiers naturels pairs (resp. impairs) est dénombrable :*

Définition 3

On dit qu'un ensemble E est **au plus dénombrable** s'il est fini ou dénombrable, autrement dit s'il peut être décrit sous la forme :

$$E = \{x_i,\ i \in I\}$$

où les x_i sont distincts et où, soit I est une partie finie de $\mathbb{N}$, soit $I = \mathbb{N}$.

On admet la proposition suivante.

Proposition 4

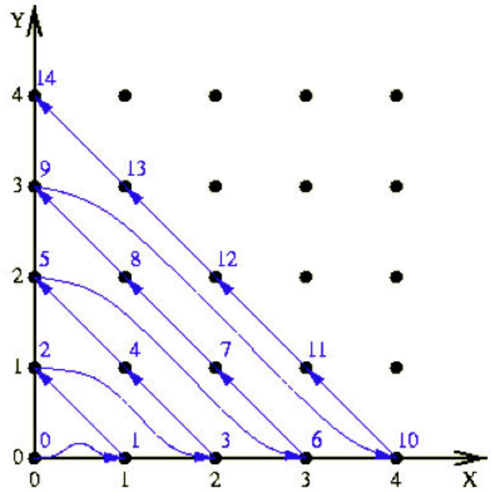
Soit E un ensemble dénombrable et F un sous-ensemble de E.
Alors F est au plus dénombrable.

Exemple 12.3. *$\mathbb{Z}$ est dénombrable :*

Exemple 12.4. $\mathbb{N}^2$ *est dénombrable :*
On décrit d'abord graphiquement comment « compter » les éléments de $\mathbb{N}^2$.

On pourrait démontrer que l'application suivante est bijective.

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (p,q) & \longmapsto & \dfrac{(p+q)(p+q+1)}{2} + q \end{cases}$$



On donne à présent une autre bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$, basée sur la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres entiers. En effet, on a la proposition suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists! p_n \in \mathbb{N}, \quad \exists! q_n \in \mathbb{N}, \qquad n = (2q_n + 1) \times 2^{p_n}.$$

Ainsi l'application $(q,p) \in \mathbb{N}^2 \longmapsto (2q+1)2^p \in \mathbb{N}$ est une bijection.

Une conséquence de ce résultat est la proposition suivante.

Proposition 5

Le produit d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Preuve. On le montre pour le produit de deux ensembles dénombrables.
Par récurrence, on aura le résultat général.

Soient E et F deux ensembles dénombrables. Par définition, il existe deux applications α et β bijectives :

$$\alpha: \ E \longrightarrow \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \beta: \ F \longrightarrow \mathbb{N}.$$

Alors, l'application $(x, y) \in E \times F \longmapsto (\alpha(x), \beta(y))$ est une bijection de $E \times F$ sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, de bijection réciproque

$$(p, q) \in \mathbb{N}^2 \longmapsto (\alpha^{-1}(p), \beta^{-1}(q)).$$

On reprend l'application ψ définie précédemment et on considère la fonction f définie par :

$$f: \left\{ \begin{array}{ccccc} E \times F & \longrightarrow & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (x, y) & \longmapsto & (\alpha(x), \beta(y)) & \longmapsto & \psi((\alpha(x), \beta(y))) \end{array} \right.$$

Alors, f est la composée de bijections, c'est donc une bijection de $E \times F$ sur $\mathbb{N}$, ainsi $E \times F$ est bien un ensemble dénombrable. □

Conséquence : $\mathbb{N}^3 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}^2$ est dénombrable et, par récurrence, $\mathbb{N}^p$ est dénombrable.
En particulier, on peut construire une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}^2$ et donc $\mathbb{Q}$ (qui n'est pas fini) est dénombrable.

On termine par la proposition suivante, qui a pour conséquence directe que $\boxed{\mathbb{R} \text{ n'est pas dénombrable.}}$

Exercice de colle (E3)

L'ensemble $[0, 1[$ n'est pas dénombrable.

On admet ici que tout élément x de $[0, 1[$ admet une unique écriture décimale propre. C'est-à-dire que pour ce x, il existe une unique suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de chiffres compris entre 0 et 9 telle que

$$x = 0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n}$$

et telles que les a_n ne se pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang.

Pour montrer que $[0, 1[$ n'est pas dénombrable, on raisonne par l'absurde.
Supposons au contraire qu'il le soit. On peut donc écrire $[0, 1[= \{x_n, \ n \in \mathbb{N}^*\}$.
On écrit les éléments x_n dans leur forme décimale.

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & = & 0, & \boxed{a_{1,1}} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & \ldots \\ x_2 & = & 0, & a_{2,1} & \boxed{a_{2,2}} & \ldots & a_{2,n} & \ldots \\ & \vdots & & & & & & \\ x_n & = & 0, & a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & \boxed{a_{n,n}} & \ldots \\ & \vdots & & & & & & \end{array}$$

On définit alors $y = 0, y_1 y_2 \ldots y_n \cdots \in [0, 1[$ de la façon suivante.

$$\text{Pour } j \in \mathbb{N}^*, \quad \text{on pose : } \ y_j = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } a_{j,j} \neq 0 \\ 1 \text{ si } a_{j,j} = 0 \end{array} \right.$$

Par construction, $y \in [0, 1[= \{x_n, \ n \in \mathbb{N}^*\}$ et donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = x_n$ c'est-à-dire :

$$\begin{array}{cccccccc} y & = & 0, & a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & \boxed{a_{n,n}} & \ldots \\ & = & 0, & y_1 & y_2 & \ldots & \boxed{y_n} & \ldots \end{array}$$

Mais on a construit y tel que $y_n \neq a_{n,n}$, on obtient donc une contradiction et par conséquent, $[0, 1[$ n'est pas dénombrable.

12.1.3 Familles sommables

Dans la suite, on notera : $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup\{+\infty\}$.
On rappelle aussi que lorsque $A \subset [0, +\infty]$ n'est pas majorée, on convient que $\sup(A) = +\infty$.

Définition 4 (Somme d'une famille d'éléments positifs)

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'éléments de $[0, +\infty]$.
On appelle somme de la famille $(x_i)_{i\in I}$ la borne supérieure de l'ensemble des sommes $\sum_{i\in F} x_i$ quand F décrit l'ensemble des parties finies de I. On la note :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sup\left\{\sum_{i\in F} x_i,\ F \text{ partie finie de } I\right\}.$$

On admet les propositions suivantes :

Proposition 6

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'éléments de $[0, +\infty]$.

- **Cas fini :** Si $I = \{i_1, \dots, i_n\}$, alors $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k=1}^{n} x_{i_k}$.
- **Cas dénombrable :** On peut choisir $I = \mathbb{N}$. Dans ce cas :

$$S = \sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \qquad (S \in [0, +\infty]).$$

Pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, on a aussi $S = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}$.
Cela signifie que la valeur de S ne dépend pas de l'ordre de sommation, ou encore de la descrition de l'ensemble dénombrable $\{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$.

Proposition 7 (Sommation par paquets)

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'éléments de $[0, +\infty]$, et $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ une partition de I. Alors :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} x_i\right).$$

Définition 5 (Sommabilité de nombres positifs)

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'éléments de $[0, +\infty]$. On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une **famille sommable** si :

$$\sum_{i\in I} x_i < +\infty.$$

En particulier, une famille sommable ne peut pas contenir l'élément $+\infty$.

En pratique, **lorsque les termes sont positifs**, tous les calculs (sommation par paquets, linéarité, majoration...) sont autorisés, la sommabilité étant garantie par la seule condition que les sommes soient **finies**.

Définition 6 (Sommabilité de nombres réels ou complexes)

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'éléments de $\mathbb{C}$.
On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une **famille sommable** si la famille $(|x_i|)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ est sommable autrement dit si :

$$\sum_{i\in I} |x_i| < +\infty.$$

Remarque : Pour une famille dénombrable, c'est-à-dire lorsque $I = \mathbb{N}$, la sommabilité de la famille $(x_i)_{i\in I}$ est donc équivalente à la convergence absolue de la série $\sum x_i$. En particulier, les théorèmes de comparaison s'appliquent. Ainsi, en distinguant les cas finis et dénombrables, on peut démontrer la proposition suivante.

Proposition 8

Soient $(x_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'éléments deux-à-deux distincts de $\mathbb{C}$ et $(y_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'éléments de $[0, +\infty]$ telles que :

$$\forall i \in I, \quad |x_i| \leqslant y_i.$$

Si la famille $(y_i)_{i\in I}$ est sommable, alors la famille $(x_i)_{i\in I}$ l'est aussi.

On admettra les propriétés suivantes.

Proposition 9

Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ deux familles au plus dénombrables d'éléments de $\mathbb{C}$.
On suppose qu'elles sont sommables.

- **Sommation par paquets :** Si $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est une partition de I, alors : $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} x_i\right)$.
- **Permutation des termes :** Si $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une bijection, alors la série $\sum x_{\sigma(n)}$ converge absolument et on a :
$$\sum_{i=0}^{+\infty} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}.$$
- **Linéarité :** Si α, β sont deux scalaires, alors la famille $(\alpha x_i + \beta y_i)_{i\in I}$ est sommable et :
$$\sum_{i\in I}(\alpha x_i + \beta y_i) = \alpha \sum_{i\in I} x_i + \beta \sum_{i\in I} y_i.$$
- **Inégalité triangulaire :** $\displaystyle\left|\sum_{i\in I} x_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |x_i|$.
- **Positivité :** Si pour tout $i \in I$, $x_i \geqslant 0$ alors $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si tous les x_i sont nuls.

Proposition 10

Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_j)_{j\in J}$ deux familles au plus dénombrables d'éléments de $\mathbb{C}$.
On suppose qu'elles sont sommables.

- **Produit :** La famille $(x_i y_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et :
$$\sum_{(i,j)\in I\times J} (x_i y_j) = \left(\sum_{i\in I} x_i\right)\left(\sum_{j\in J} y_j\right).$$

Dans le cas où les deux familles sont dénombrables, on pourra aussi utiliser les produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Proposition 11 (Théorème de Fubini pour les séries)

Soit $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une famille dénombrable d'éléments de $\mathbb{C}$ indexée par $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.
Les assertions suivantes sot équivalentes.

- la famille $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable,
- pour tout $q\in\mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{p\geqslant 0} u_{p,q}$ est absolument convergente, et la série $\sum\limits_{q\geqslant 0}\left(\sum\limits_{p=0}^{+\infty}|u_{p,q}|\right)$ l'est aussi,
- pour tout $p\in\mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{q\geqslant 0} u_{p,q}$ est absolument convergente, et la série $\sum\limits_{p\geqslant 0}\left(\sum\limits_{q=0}^{+\infty}|u_{p,q}|\right)$ l'est aussi.

Et dans ce cas, on a :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right).$$

Proposition 12 (Sommation triangulaire)

Soit $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une famille dénombrable d'éléments de $\mathbb{C}$ indexée par $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $U_n = \sum\limits_{p+q=n}|u_{p,q}| = \sum\limits_{p=0}^{n}|u_{p,n-p}| = \sum\limits_{q=0}^{n}|u_{n-q,q}|$. Alors :

$$\text{la famille } (u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \text{ est sommable} \quad\Longleftrightarrow\quad \text{la série } \sum U_n \text{ converge.}$$

Dans ce cas, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\sum\limits_{p+q=n} u_{p,q}\right)$ est absolument convergente et on a :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} u_{p+q}\right).$$

12.2 Dénombrements

12.2.1 Dénombrements de listes

• **Listes sans répétition :** on cherche le nombre de façons de choisir une liste ordonnée de p objets distincts dans un ensemble à n éléments,

Si $p>n$, il n'en existe évidemmment pas.

Si $p\in[\![1,n]\!]$, on en compte le nombre. On a

$$\begin{array}{ll} \text{Choix de } x_1 : & n \text{ possibilités} \\ \text{Choix de } x_2 : & n-1 \text{ possibilités} \\ & \vdots \\ \text{Choix de } x_p : & n-p+1 \text{ possibilités} \end{array}$$

On obtient donc $\boxed{n(n-1)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!} \text{ listes sans répétition de } p \text{ éléments parmi } n.}$

Illustration : dans le cas où $n=3$ (avec $E=\{1,2,3\}$) et $p=2$.

Exemple 12.5. *Dans un championnat, 36 athlètes participent à l'épreuve du 400m. Combien y a-t-il de façons d'attribuer les médailles d'or, d'argent et de bronze ?*

Exemple 12.6. *Dans le cas où $p = n$, cela revient à ranger n objets, ou encore définir une permutation de n objets.* $\boxed{\textit{Il a donc } n! \textit{ permutations d'un ensemble à } n \textit{ éléments.}}$

• **Listes avec répétition :** on cherche le nombre de façons de choisir une liste ordonnée de p objets non nécessairement distincts dans un ensemble à n éléments.

Il y a n possibilités pour le choix de chacun des p éléments de la liste.
On obtient donc $\boxed{n^p \text{ listes avec répétition de } p \text{ éléments parmi } n.}$

Illustration : dans le cas où $n = 3$ (avec $E = \{1, 2, 3\}$) et $p = 2$.

12.2.2 Dénombrements de combinaisons

• **Combinaisons sans répétition :** On cherche à compter le nombre de façons de choisir un ensemble (non ordonné) de p objets distincts dans un ensemble à n éléments.

Si $p > n$, il n'en existe évidemmment pas.

Si $p \in [\![1, n]\!]$, une combinaison sans répétition de p éléments parmi n, donnera par permutation de ses éléments, exactement $p!$ listes sans répétition de p éléments parmi n. Et donc il a $p!$ fois plus de listes sans répétition de p éléments parmi n que combinaisons sans répétition de p éléments parmi n.

Or, le nombre de listes sans répétition de p éléments parmi n est $n(n-1)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$, donc celui de combinaison sans répétition de p éléments parmi n est

$$\boxed{\text{le nombre de combinaisons sans répétition de } p \text{ éléments parmi } n \text{ est } \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}.}$$

Exemple 12.7. *Dans un championnat, 36 athlètes participent à l'épreuve du 400m. Le « podium »est le groupe des 3 premiers terminant cette course. Combien y a-t-il de podiums possibles ?*

• **Combinaisons avec répétition :**

Exercice de colle (E2)

Déterminer le nombre de façons de choisir un ensemble (non ordonné) de p objets non nécessairement distincts dans un ensemble à n éléments.

Le nombre de telles combinaisons est plus difficile à déterminer. Supposons, sans restreindre la généralité que $E = [\![1, n]\!]$. Soit $(x_1, \dots, x_p)$ de $[\![1, n]\!]$ avec $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_p$. On les regroupe : pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note N_i (éventuellement 0) le nombre de i qui apparaissent. On a alors $N_1 + \cdots + N_n = p$ et :

1	1	2	2	2 ‖	4	4 ‖	6	$\cdots$	$n-1$	$n-1$	n

La combinaison $(x_1, \dots, x_p)$ est complètement déterminée par la position des $n-1$ sépateurs. On introduit $n-1$ nouvelles cases et on matérialise les séparateurs par des croix.

1	1	$\times$	2	2	2	$\times$	$\times$	4	4	$\times$	$\times$	6	$\times$	$\cdots$	$\times$	$n-1$	$n-1$	$\times$	n

Il y a maintenant $n+p-1$ cases, et le nombre de combinaisons avec répétition de p éléments parmi n est le nombre de façons de positionner $n-1$ croix dans $n+p-1$ cases, c'est-à-dire $\dbinom{n+p-1}{n-1}$.

$$\boxed{\text{le nombre de combinaisons avec répétition de } p \text{ éléments parmi } n \text{ est } \binom{n+p-1}{n-1} = \binom{n+p-1}{p}.}$$

Exemple 12.8. *On dispose de boules de 5 couleurs différentes (au moins 3 de chaque couleur). On en prend 3. Combien y a-t-il de résultats possibles ?*

Quelques formules sur les coefficients binomiaux

• A donner sans réfléchir :

$$\boxed{\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}.}$$

• Formule du binôme de Newton :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.}$$

• Formule du triangle de Pascal :

Si n, p sont des entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n-1$ on a

$$\boxed{\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.}$$

• Identité de Van der Monde :

Exercice de colle (E1)

On a **convenu** en première année, que, si $p \notin [\![0, n]\!]$, alors $\dbinom{n}{p} = 0$.

Montrer alors que pour tous entiers naturels p, n, m, on a : $\boxed{\dbinom{n+m}{p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}.}$

12.3 Vocabulaire probabiliste

12.3.1 Un premier exemple

Expérience : On lance une pièce N fois et on note à chaque fois le résultat obtenu :

0 pour pile et 1 pour face.

L'ensemble Ω des résultats possibles est appelé **univers**.
Un résultat possible est ici un élément de $\{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}$ (N fois). Ainsi :

$$\Omega = \{0,1\}^N.$$

On a donc $\operatorname{card}(\Omega) = 2^N$ résultats possibles. Il s'agit en fait de listes avec répétitions de N éléments parmi 2.

Un **événement** est un sous-ensemble de Ω. Il est souvent décrit littéralement par des propriétés (définition probabiliste). Par exemple :

$\boxed{1}$ Au premier lancer, on obtient pile. D'un point de vue ensembliste, il s'agit du sous-ensemble

$$A_1 = \{0\} \times \{0,1\}^{N-1} \subset \Omega.$$

$\boxed{2}$ On obtient toujours face. D'un point de vue ensembliste, il s'agit du sous-ensemble

$$A_2 = \{(1,\ldots,1)\} \subset \Omega.$$

$\boxed{3}$ On obtient au plus une fois face. D'un point de vue ensembliste, il s'agit du sous-ensemble

$$A_3 = \{(0,\ldots,0),(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots(0,\ldots,0,1)\} \subset \Omega.$$

$\boxed{4}$ On obtient au moins deux fois face. D'un point de vue ensembliste, il s'agit du sous-ensemble

$$A_4 = \Omega \setminus A_3 \subset \Omega.$$

Le tableau suivant exprime de manière ensembliste quelques notions probabilistes élémentaires.

Langage Probabiliste	**Langage ensembliste**
Un résultat de l'expérience	un élément ω de Ω
Un événément	une partie A de Ω
Un événément élémentaire	un singleton $\{\omega\}$ de Ω
L'événément certain	Ω
L'événément impossible	$\emptyset$
L'événement A ne se produit pas	$\overline{A} = \Omega \setminus A$
Evénement A ou B	$A \cup B$
Evénement A et B	$A \cap B$
A et B sont **incompatibles**	$A \cap B = \emptyset$
L'événément A implique l'événément B	$A \subset B$

Par exemple, avec les notations précédentes, on peut dire que :

- A_2 est un événement élémentaire,
- Les événements A_1 et A_2 (resp. A_2 et A_3 si $N \geqslant 2$) sont incompatibles,
- L'événement A_4 est aussi « A_3 ne se produit pas ».
- L'événement « A_1 et A_3 » est $\{(0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),(0,0,1,\dots,0),\dots(0,\dots,0,1)\}$.

On a défini la notion de partition finie d'un ensemble Ω, on peut interpréter cette notion en langage probabiliste.

Définition 7 (Système complet d'événements fini)

Soit Ω un univers et $A_1,\dots,A_n$ une famille d'événements de Ω.
On dit que $(A_1,\dots,A_n)$ est un **système complets d'événements** si c'est une partition de Ω, c'est-à-dire si :
- Les événements $A_1,\dots,A_n$ sont deux-à-deux incompatibles ($i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$).
- L'événement « A_1 ou A_2 ou ... ou A_n » est l'événement certain ($\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$), c'est-à-dire que tout résultat se trouve au moins dans l'un des A_i.

Exemple 12.9. *Si $A \neq \emptyset$ et $A \neq \Omega$, alors $A, \bar{A}$ forme toujours un système complet d'événements de Ω.*

12.3.2 Tribus

On reprend l'exemple précédent, mais en lançant la pièce un nombre infini de fois. L'univers Ω est donc formé des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\{0,1\}$ avec $x_n = 0$ si on obtient pile au n-ième lancer et $x_n = 1$ si on obtient face au n-ième lancer.

$$\Omega = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = 0 \text{ ou } 1\} = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}.$$

Cet ensemble est infini, on peut même démontrer qu'il n'est pas dénombrable (penser à la décomposition en base 2 d'un nombre de $[0,1[$). La notion d'événement se généralise de la manière suivante.

Définition 8 (Tribu)

Soit Ω un ensemble (**univers**), on appelle **tribu** sur Ω une partie $\mathcal{A}$ de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω vérifiant :
- $\Omega \in \mathcal{A}$
- Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a $\bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
  (En particulier, on a forcément $\emptyset = \bar{E} \in \mathcal{A}$.)
- Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est encore dans $\mathcal{A}$.

Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés les **événements**. Un univers muni d'une tribu est appelé espace probabilisable.

Exemple 12.10. $\{\emptyset,\Omega\}$, $\mathcal{P}(\Omega)$ *et* $(\emptyset,\mathcal{P},\mathcal{I},\mathbb{N})$ *sont des tribus.*

Remarque : On a $\boxed{\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \iff \exists n \in \mathbb{N},\ \omega \in A_n}$ et $\boxed{\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \iff \forall n \in \mathbb{N},\ \omega \in A_n.}$

En termes probabilistes, l'événement $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ correspond à « au moins l'un des événements A_n est réalisé » et l'événement $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ correspond à « tous les événements A_n sont réalisés »

Exemple 12.11. *Lancer de la pièce un nombre infini de fois :* $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$.
On note A_j l'événement « au j-ième lancer, on obtient pile », c'est-à-dire

$$A_j = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \Omega,\ x_j = 0\}.$$

- $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ *: On obtient au moins un fois pile.*
- $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j$ *: On obtient toujours pile.*

Compléter :

- $\overline{A_j}$:
- $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \overline{A_j}$:
- $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j}$:
- $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} \overline{A_j}$:
- $\overline{\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j}$:

Exemple 12.12. *Lancer de la pièce un nombre infini de fois :* $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$.
On note B_j l'événement « on obtient le même résultat au j-ième et au $(j+1)$-ième lancers », c'est-à-dire

$$B_j = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \Omega,\ x_j = x_{j+1}\}.$$

- $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$ *: Il existe au moins deux lancers consécutifs pour lesquels on obtient le même résultat.*
- $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} B_j$ *: On obtient toujours le même résultat.*

Compléter :

- $\overline{B_j}$:
- $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \overline{B_j}$:
- $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j}$:
- $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} \overline{B_j}$:
- $\overline{\bigcap_{j\in\mathbb{N}} B_j}$:

D'une manière générale, on a les propriétés suivantes.

Proposition 13 (Lois de De Morgan)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble Ω. On a :

$$\textbf{(1)}\ \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \qquad\qquad \textbf{(2)}\ \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$$

Preuve.

□

Proposition 14

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble Ω et $B \subset \Omega$. On a :

$$\textbf{(1)}\ B \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B \cap A_n) \qquad \textbf{(2)}\ B \cup \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (B \cup A_n)$$

Preuve.

□

Proposition 15

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω. On a les propriétés suivantes.

• Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, l'intersection $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est encore dans $\mathcal{A}$.

• $\mathcal{A}$ est stable par unions et par intersections finies.

Preuve.

□

12.4 Espaces probabilisés

12.4.1 Probabilités sur un univers fini (rappels de première année)

Définition 9

Soit Ω un ensemble fini. On appelle **probabilité** sur Ω, toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$ telle que :

- $P(\Omega) = 1$
- pour toutes parties A, B disjointes de Ω on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (σ-additvité)

On dit alors que (Ω, P) est un **espace probabilisé fini**.

On rappelle la proposition suivante.

Proposition 16

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. On a
(1) Si A est un événement, alors $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
(2) $P(\emptyset) = 0$.
(3) Soient A, B deux événements tels que A implique B (ce qui signifie que $A \subset B$) alors

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

(4) Croissance de P :
Soient A, B deux événements tels que A implique B (ce qui signifie que $A \subset B$) alors $P(A) \leqslant P(B)$.
(5) Si $A_1, \dots, A_n$ sont des événements deux-à-deux incompatibles (c'est-à-dire des ensembles deux-à-deux disjoints) de Ω alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(6) Soient A, B deux événements alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
(7) Si $A_1, \dots, A_n$ est un système complet d'événements alors

$$P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Conséquence : Pour connaître P il suffit de la connaître sur chacun des événements élémentaires.

En effet si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ avec $\omega_1, \dots, \omega_N$ distincts. On suppose connaître pour tout $i \in [\![1, N]\!]$: $P(\{\omega_i\}) = p_i$.
Alors $\{\omega_1\}, \dots, \{\omega_N\}$ est un système complet d'événements et donc on a nécessairement

$$\sum_{i=1}^{N} P(\{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^{N} p_i = 1.$$

De plus, pour toute partie A de Ω, il existe un ensemble $I \subset [\![1, N]\!]$ tel que $A = \bigcup_{i \in I} \{\omega_i\}$.

Et comme les $\{\omega_i\}$ sont deux-à-deux disjoint, on connaît

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i \in I} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i \in I} P(\{\omega_i\}) = \sum_{i \in I} p_i.$$

Définition 10 (Distribution de probabilité (cas fini))

Soit Ω un ensemble fini. On appelle distribution de probabilité sur Ω toute famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de **réels positifs** indexée par Ω et telle que $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$.
Dans ce cas, l'application $P : A \in \mathcal{P}(\Omega) \longmapsto P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ est une probabilité sur Ω.

Exemple 12.13. *On lance un dé non pipé une fois. L'univers* Ω *est l'ensemble des résultats possibles, c'est-à-dire :*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Le dé n'est pas pipé, donc chaque résultat apparaît avec la même probabilité :

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = p \in [0, 1].$$

On a de plus : $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} P(\{i\}) = 1 = 6p$ *donc* $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad P(\{i\}) = p = \dfrac{1}{6}$.
Ce résultat est très naturel : on a 1 chance sur 6 de tomber sur une face donnée.

Connaissant la probabilité de tous les événements élémentaires, on peut trouver celle de n'importe quel événement. Par exemple, on considère l'événement suivant.

A : on obtient un chiffre pair (ce qui signifie que $A = \{2, 4, 6\}$),
On trouve facilement $P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$*, on a donc une chance sur deux de tomber sur un chiffre pair.*

Exemple 12.14. *On reprend l'exemple, mais cette fois, le dé est pipé : on suppose qu'un chiffre pair a deux fois plus de chances de tomber qu'un chiffre impair, ce qui signifie que :*

$$P(\{2\}) = P(\{4\}) = P(\{6\}) = 2P(\{1\}) = 2P(\{3\}) = 2P(\{5\}) = p \in [0, 1].$$

On a de plus : $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} P(\{i\}) = 3p + \frac{3p}{2} = \frac{9p}{2} = 1$ *donc*

$$P(\{2\}) = P(\{4\}) = P(\{6\}) = p = \frac{2}{9} \qquad \text{et} \qquad P(\{1\}) = P(\{3\}) = P(\{5\}) = \frac{p}{2} = \frac{1}{9}.$$

Connaissant la probabilité de tous les événements élémentaires, on peut trouver celle de n'importe quel événement. On reprend l'événement A : on obtient un chiffre pair (ce qui signifie que $A = \{2, 4, 6\}$).
On trouve ici $P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{2}{3}$*, on a donc deux chances sur trois de tomber sur un chiffre pair (et une chance sur trois d'obtenir un chiffre impair).*

Définition 11 (Loi uniforme)

Soit (Ω, P) un univers probabilisé fini.
- On dit que deux événements A, B sont équiprobables si $P(A) = P(B)$.
- On dit que P est **uniforme** si tous ses événements élémentaires sont équiprobables.

Proposition 17

Soit Ω un univers fini. Il existe une unique probabilité uniforme sur Ω et elle est définie par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \qquad P(A) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}.$$

On considère à present une expérience de type *échec-succès*, par exemple, le jeu de pile ou face. On répète n fois cette expérience et on compte le nombre de piles (*succès*) obtenus. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on note :

$$A_k \text{ : on a obtenu exactement } k \text{ fois pile.}$$

On verra que si p est la probabilité d'avoir pile à un lancer, alors

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Définition 12 (Loi binomiale)

Soit $\Omega = [\![0, n]\!]$ et P une probabilité sur Ω. On dit P suit une loi binomiale s'il existe $p \in]0, 1[$ telle que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad P(\{k\}) = p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Remarque : Puisque $p_k \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + 1 - p)^n = 1$, il s'agit bien d'une probabilité sur Ω.

12.4.2 Cas général

Définition 13

Soit Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω.
On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$, toute application $P : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ telle que :
- $P(\Omega) = 1$
- pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux-à-deux incompatibles (i.e. disjoints) la série $\sum P(A_n)$ converge et :

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \qquad (\sigma - \text{additivité})$$

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un **espace probabilisé**.

Remarque : La somme infinie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ a une valeur finie si la série $\sum P(A_n)$ converge. Dans ce cas, puisque les termes sont positifs, la famille $(P(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et donc la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ est indépendante de l'ordre de sommation. Cela donne une cohérence à la définition, puisque l'événement $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est aussi indépendant de l'ordre des A_n.

Exemple 12.15. *On suppose que Ω est un ensemble dénombrable. Ainsi, on peut écrire : $\Omega = \{\omega_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ où les ω_n sont deux-à-deux distincts.*

Soit $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
On suppose que les ω_n sont distincts. Ainsi, les événements élémentaires $A_n = \{\omega_n\}$ sont deux-à-deux incompatibles.
Si l'on pose $P(A_n) = P(\{\omega_n\}) = p_n$, on a $\displaystyle\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
Par définition de probabilité, la série $\sum p_n$ converge et on a : $\displaystyle P(\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.
De plus si A est un ensemble de Ω, on peut trouver un sous-ensemble I de $\mathbb{N}$ tel que $\displaystyle A = \bigcup_{n\in I} A_n$.
En distinguant les cas I finis et I dénombrables, on peut démontrer que :

$$P(A) = \sum_{n\in I} P(A_n) = \sum_{n\in I} P(\{\omega_n\}) = \sum_{n\in I} p_n.$$

Et donc, si on connaît les $p_n = P(\{\omega_n\}) \geqslant 0$ tels que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, on connaît $P(A)$ pour toute partie A de Ω, et donc on connaît P. On vérifierait qu'il s'agit bien d'une probabilité.

Définition 14 (Distribution de probabilité (cas dénombrable))

On appelle distribution de probabilité sur $\mathbb{N}$ toute famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de **réels positifs** indexée par $\mathbb{N}$ et telle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

Dans ce cas, si $\Omega = \{\omega_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble dénombrable (où les ω_n sont deux-à-deux distincts), et si $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω, l'application suivante est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

$$P : \left\{\begin{array}{ccl} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ A & \longmapsto & P(A) = \displaystyle\sum_{n \text{ tq } \omega_n \in A} p_n \end{array}\right.$$

Exemple 12.16. *On lance une pièce un nombre infini de fois. Comme précédemment, le résultat obtenu est noté*

$$0 \textit{ pour Pile} \qquad \textit{et} \qquad 1 \textit{ pour Face}$$

L'univers des résultats possibles est donc

$$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = 0 \text{ ou } 1\} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ x_n = 0 \text{ ou } 1\}.$$

Mais cet ensemble n'est pas dénombrable. On ne peut donc pas utiliser ce qui précède.

On modifie l'expérience : on lance une pièce jusqu'à ce qu'on obtienne Face. Les résultats possibles sont

$$(1),\ (0,1),\ (0,0,1),\ (0,0,0,1),\ \ldots,(0,\ldots,0,1),\ \ldots$$

auquel il faut ajouter celui où on n'obtient jamais Face : c'est la suite $(x_n)_n \in \mathbb{N}^*$ identiquement nulle. On la note ∞. L'ensemble Ω est bien dénombrable : si l'on note ω_n l'événement élémentaire « on obtient Face au n-ème lancer et Pile avant » et $\omega_0 = \infty$ l'événement élémentaire « on n'obtient jamais Face » alors

$$\Omega = \{\omega_n,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Si la pièce est équilibrée :

- *On a une chance sur deux de faire Face au premier lancer, et donc $P(\{\omega_1\}) = \dfrac{1}{2}$.*
- *La probabilité d'obtenir $(0,1)$ en deux lancers est $P(\{\omega_2\}) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2^2}$.*
- *D'une manière générale, si $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(\{\omega_n\}) = \dfrac{1}{2^n}$.*

Question : *Comment choisir $P(\{\omega_0\})$ pour obtenir une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. ?*
Puisque les événement $\{\omega_n\}$ sont deux-à-deux incompatibles, on a :

$$\begin{aligned} 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{\omega_n\}) &= P(\{\omega_0\}) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(\{\omega_n\}) \\ &= P(\{\omega_0\}) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = P(\{\omega_0\}) + \frac{1}{2}\frac{1}{1-1/2} = P(\{\omega_0\}) + 1 \end{aligned}.$$

En choisissant $P(\{\omega_0\}) = P(\infty) = 0$, on obtient bien une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
Ce résultat est conforme à l'intuition : il n'y a aucune chance de ne jamais obtenir Face !

Proposition 18

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
- Pour tout couple d'événements disjoints A et B de $\mathcal{A}$, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Pour toute famille finie d'événements deux-à-deux disjoints $A_1, \ldots, A_n$ de $\mathcal{A}$, on a $P\left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Preuve. Il suffit de montrer le second point. Le premier s'obtient alors avec $n=2$.
Soit $A_1,\dots,A_n$ une famille finie d'événements deux-à-deux disjoints. Pour $k \geqslant n+1$ entier, on pose $A_k=\emptyset$. Ainsi $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements deux-à-deux disjoints et donc, par définition d'espace probabilisé, la série $\sum P(A_k)$ converge et on a :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \underbrace{P(A_k)}_{=0 \text{ car } A_k=\emptyset} = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

□

Proposition 19 (Continuité croissante)

Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé.
On dit qu'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{A}$ est **croissante** si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$.
Dans ce cas, on a

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

Preuve.(D3)

□

Exemple 12.17. *On reprend le lancer d'une pièce un nombre infini de fois :* $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$.
On note A_n *: au* n*-ième lancer, j'ai obtenu au moins une fois pile.*
• *On a d'une part,* $A_n \subset A_{n+1}$ *puisque si au* n*-ième lancer, j'ai obtenu au moins une fois pile, ce sera vrai aussi au* $n+1$*-ième.*
• *D'autre part,* $\bar{A_n}$ *est l'événement suivant : au* n*-ième lancer, je n'ai jamais obtenu pile, c'est-à-dire, j'ai toujours eu face.*
On a clairement $P(\bar{A_n}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. *Et donc*

$$P(A_n) = 1 - P(\bar{A_n}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Par continuité croissante, on a $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 1$.

On retrouve que la probabilité de tomber au moins une fois sur pile est de 1.

Exercice de colle (E2)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$.
Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$.

Proposition 20 (Continuité décroissante)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
On dit qu'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{A}$ est **décroissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$.
Dans ce cas, on a

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

Preuve.

□

Exercice de colle (E2)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$.

Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\bigcap\limits_{k=0}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$.

On admet les deux propriétés suivantes.

Proposition 21 (Sous-additivité finie)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Pour toute famille finie d'événements $A_1, \ldots, A_n$ de $\mathcal{A}$, on a

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Proposition 22 (Sous-additivité)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Pour toute suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}$, on a

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \qquad \text{avec } \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \in [0, +\infty]$$

Définition 15 (Evénement négligeable, Evénement presque sûr)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On dira que :

- Un événement A de $\mathcal{A}$ est **négligeable** (ou presqu'impossible) si $P(A) = 0$.
- Un événement A de $\mathcal{A}$ est **presque sûr** (ou presque certain) si $P(A) = 1$.

Exercice de colle (E2)

Démontrer que la réunion dénombrable d'événements négligeables est un événement négligeable, puis que l'intersection dénombrable d'événements presque certains, est un événement presque certain.

Définition 16

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable d'événements de $\mathcal{A}$.

- On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un **système complet d'événements** si c'est une partition de Ω, c'est-à-dire si :
  - Les événements A_i sont deux-à-deux incompatibles : si $i \neq j$ alors $A_i \cap A_j = \emptyset$.
  - L'événement $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ est l'événement certain, c'est-à-dire que $\Omega = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ ou encore que tout résultat se trouve au moins dans l'un des A_i.
- On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un **système quasi-complet d'événements** si :
  - Les événements A_i sont deux-à-deux incompatibles : si $i \neq j$ alors $A_i \cap A_j = \emptyset$.
  - L'événement $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ est l'événement presque sûr, c'est-à-dire que $P\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) = 1$.

12.5 Probabilités conditionnelles, indépendance

12.5.1 Probabilités conditionnelles

Définition 17

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et B un événement de $\mathcal{A}$ tel que $P(B) \neq 0$.
On appelle **probabilité conditionnelle de A sachant B** :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Proposition 23

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et B un événement de $\mathcal{A}$ tel que $P(B) \neq 0$.
L'application P_B est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Preuve.

□

Exemple 12.18. *On lance deux dés identiques non pipés et on cache le résultat.*
- *Quelle est la probabilité d'avoir au moins un six ?*

- *On annonce que le résultat de l'un des deux dés est 3. Quelle est la probabilité d'avoir un six sur l'autre dé ?*

6						
5						
4						
3						
2						
1						
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*

6						
5						
4						
3						
2						
1						
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*

12.5.2 Formule des probabilités composées

Par définition de probabilité conditionnelle, on a immédiatement la proposition suivante.

Proposition 24 (Formule des probabilités composées : cas de 2 événements)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et A, B deux événements de $\mathcal{A}$. On suppose que $P(B) > 0$. On a donc

$$P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B).$$

Si A, B sont deux événéments, lorsque $P(B) = 0$, on **conviendra** que $P_B(A) \times P(B) = 0$.

Cette **convention** prolonge donc la proposition précédente au cas où $P(B) = 0$. En effet, dans cas, puisque $A \cap B \subset B$, par croissance de P, on a aussi $P(A \cap B) = 0$.

Exemple 12.19. *On sonde un groupe d'individus. On note B l'événement « être fumeur » et A l'événement « être un homme » et on donne :*

$$P(B) = \frac{1}{4} \quad P(A) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P_B(A) = \frac{3}{5}.$$

Calculer :

- *Probabilité d'être homme et fumeur :* $P(A \cap B) =$
- *Probabilité d'être femme et fumeur :* $P(\bar{A} \cap B) =$
- *Probabilité d'être une femme sachant qu'on est fumeur* $P_B(\bar{A}) =$
- *Probabilité d'être fumeur sachant qu'on est une femme* $P_{\bar{A}}(B) =$

On peut généraliser cette formule à n événements.

Proposition 25 (Formule des probabilités composées : cas général)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $A_1, \ldots, A_n$ des événements de $\mathcal{A}$ tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. On a

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Preuve. Ce résultat se montrerait facilement par récurrence sur n.

□

Cette proposition s'applique en particulier lors d'une suite expériences aléatoires, dont chacune est dépendante du résultats des précédentes. C'est le cas, par exemple, lors d'un tirage sans remise.

Exemple 12.20. *Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules noires. On tire 3 boules sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir d'abord 2 rouges, puis une noire ?*

12.5.3 Formule des probabilités totales

On rappelle l'énoncé vu en première année, puis on l'étend au cas où le système complet d'événements est dénombrable.

Proposition 26 (Formule des probabilités totales : cas fini)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet (ou quasi-complet) fini d'événements de $\mathcal{A}$. Pour tout événement B de $\mathcal{A}$, on a

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B) \times P(A_k),$$

avec la convention $P_{A_k}(B) \times P(A_k) = 0$ si $P(A_k) = 0$.

Proposition 27 (Formule des probabilités totales : cas dénombrable)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet (ou quasi-complet) d'événements de $\mathcal{A}$. Pour tout événement B de $\mathcal{A}$, on a

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{A_n}(B) \times P(A_n),$$

avec la convention $P_{A_n}(B) \times P(A_n) = 0$ si $P(A_n) = 0$.

Preuve.

□

Proposition 28 (Formule de Bayes (1))

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et A, B deux événements de $\mathcal{A}$ avec B de probabilité non nulle. On a

$$P_B(A) = \frac{P(A)}{P(B)} P_A(B) \qquad \text{avec } P_A(B)P(A) = 0 \text{ si } P(A) = 0.$$

Preuve. Il suffit d'écrire $P(A \cap B) = P_A(B)P(A) = P_B(A)P(B)$ et de diviser par $P(B)$. □

Proposition 29 (Formule de Bayes (2))

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de $\mathcal{A}$ fini ou dénombrable. Si B est un évenement de probabilité non nulle, on a

$$\forall i \in I, \quad P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B)P(A_i)}{\displaystyle\sum_{j\in I} P_{A_j}(B)P(A_j)} \qquad \text{avec } P_{A_j}(B)P(A_j) = 0 \text{ si } P(A_j) = 0.$$

Preuve. Par la formule des probabilités totales, on a $P(B) = \displaystyle\sum_{j\in I} P_{A_j}(B)P(A_j)$ et par la proposition précédente :

$$P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P_{A_i}(B)P(A_i)}{\displaystyle\sum_{j\in I} P_{A_j}(B)P(A_j)}.$$

□

Exemple 12.21. *Soit $n \geqslant 1$ un entier, on dispose d'urnes $U_1, \dots, U_n$ telles que l'urne U_k contienne k boules blanches et $n+1-k$ boules rouges .*
On choisit une urne : l'urne U_k est chosie avec la probabilité $\alpha \times k$. On tire ensuite une boule au hasard dans cette urne.

1. *Déterminer la valeur de α.*

2. *Sachant que la boule tirée est rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne U_k ?*

12.5.4 Evénements indépendants

Définition 18

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et A, B deux d'événements de $\mathcal{A}$. On dit que A et B sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Proposition 30

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et A, B deux d'événements de $\mathcal{A}$ tels que $P(A) > 0$. On a l'équivalence suivante.

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \iff P_A(B) = P(B).$$

Preuve.

□

Définition 19

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i\in I}$ une famille (finie ou dénombrable) d'événements de $\mathcal{A}$.
• On dit que les événements $(A_i)_{i\in I}$ sont deux-à-deux indépendants si pour tous $i, j \in I$ distincts, A_i et A_j sont indépendants i.e. $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \times P(A_j)$.
• On dit que les événements $(A_i)_{i\in I}$ sont (mutuellement) indépendants si pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et pour toute sous-famille d'indices $i_1, \dots, i_p$ de I, on a

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_p}) = P(A_{i_1}) \times \cdots \times P(A_{i_p}).$$

Proposition 31

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i\in I}$ une famille (finie ou dénombrable) d'événements de $\mathcal{A}$. Si les événements $(A_i)_{i\in I}$ sont (mutuellement) indépendants alors ils sont deux-à-deux indépendants, mais la réciproque est fausse.

Preuve. En prenant des sous-familles de cardinal $p = 2$, on a directement l'implication. Illustrons par un exemple que la réciproque est fausse. □

Exemple 12.22. *On lance une pièce équilibrée deux fois :* $\Omega = \{0,1\} \times \{0,1\}$. *Il y a donc 4 résultats possibles. On considère les événements suivants.*

A : on obtient deux résultats différents
B : on obtient face (i.e. 1) au premier lancer
C : on obtient pile (i.e. 0) au second lancer

Montrons que A, B, C sont deux-à-deux indépendants.

Et pourtant A, B, C ne sont pas (mutuellement) indépendants. En effet :

Proposition 32

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et A, B deux événements de $\mathcal{A}$. Si A et B sont indépendants alors $\bar{A}$ et B sont indépendants.

Preuve. (D1)

□

En première année, cette proposition a été étendue (en raisonnant par récurrence) au cas de n événements :

Proposition 33

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $A_1, \dots, A_n$ n événements de $\mathcal{A}$.
On se donne une famille $B_1, \dots, B_n$ n événements de $\mathcal{A}$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad B_i = A_i \text{ ou } B_i = \bar{A}_i.$$

Dans ce cas, si les événements $A_1, \dots, A_n$ sont (mutuellement) indépendants (resp. deux-à-deux indépendants) alors les événements $B_1, \dots, B_n$ le sont aussi.

En échangeant le rôle de $A_1, \dots, A_n$ et de $B_1, \dots, B_n$, on obtient évidemment la réciproque.

Exercice de colle (E2)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'événements (mutuellement) indépendants.
Démontrer que $P\left(\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ avec, par définition, $\displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=0}^{n} P(A_k)$.