

# Chapitre 11

## Séries entières

### 11.1 Définitions et premières propriétés

#### 11.1.1 Séries entières

##### Définition 1

On appelle **série entière** à valeurs dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , toute fonction  $f$  définie par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{K})$$

où  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

On note :  $f = \sum a_n z^n$  (abus de notations).

**Exemple 11.1. La série géométrique :**  $f = \sum z^n$  est une série entière ( $a_n = 1$ ).

$$z \in D_f \iff \sum z^n \text{ converge}$$

$$\iff |z| < 1$$

Ainsi,  $D_f = \{z \in \mathbb{K}, |z| < 1\}$  et pour tout  $z \in D_f$ , on a  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ .

**Remarque 1 :** Les séries entières sont des séries de fonctions particulières  $f = \sum f_n$  avec  $f_n(z) = a_n z^n$ . Les résultats du chapitre précédent s'appliquent donc, y compris si nécessaire, quand la variable  $z$  est complexe.

$$D_f = \{z \in \mathbb{K}, \sum a_n z^n \text{ converge} \}.$$

Par définition  $\sum f_n$  converge donc simplement sur  $D_f$ .

**Remarque 2 :**

- Si  $f = \sum f_n$  avec  $f_n(z) = a_n z^n$ , les  $a_n$  sont appelés **coefficients** de la série entière  $f$ .
- On peut définir  $\sum a_n z^n$  si  $(a_n)_{n \geq n_0}$  est définie à partir d'un certain rang. On note dans ce cas  $\sum_{n \geq n_0} a_n z^n$ .
- Les fonctions polynomiales sont des séries entières particulières, les coefficients sont nuls à partir d'un certain rang et elles sont définies sur  $\mathbb{K}$  tout entier.

$$\forall z \in \mathbb{K}, \quad P(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n.$$

- En  $z = 0$ ,  $0^n$  vaut 0 si  $n \geq 1$  et donc la série  $\sum a_n 0^n$  converge toujours. Ainsi  $f = \sum a_n z^n$  est toujours définie en 0 et on a :

$$f(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n 0^n = a_0 0^0 = a_0.$$

### 11.1.2 Rayon de convergence

#### Proposition 1 (Lemme d'Abel)

Soit  $f = \sum a_n z^n$  une série entière.

On suppose qu'il existe  $\rho > 0$  tel que la suite  $(a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit bornée. Alors on a :

$$\forall z \in \mathbb{K}, \quad (|z| < \rho) \implies \left( \sum a_n z^n \text{ converge absolument} \right).$$

Preuve. (D2)

□

**Conséquence :** Si  $(a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, alors  $\sum a_n z^n$  converge simplement sur  $B(0, \rho)$ .

#### Définition 2

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière. On note

$$E = \{ \rho \in \mathbb{R}^+, (a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \} \subset \mathbb{R}^+.$$

Alors  $E$  possède une borne supérieure (éventuellement égale à  $+\infty$  si  $E$  n'est pas majoré).

On l'appelle **rayon de convergence** de la série entière.

$$R = \sup(E) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

**Exemple 11.2.** On reprend la série géométrique  $f = \sum z^n$ .

- si  $\rho > 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho^n = +\infty$  et donc  $(\rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas bornée. Et donc si  $\rho > 1$  alors  $\rho \notin E$ .
- Si  $\rho \leq 1$  alors  $|\rho^n| \leq 1$  et donc  $(\rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. Et donc si  $\rho \leq 1$  alors  $\rho \in E$ .

Finalement,  $E = [0, 1]$  et le rayon de convergence de  $\sum z^n$  est  $R = \sup(E) = 1$ .

**Exemple 11.3.** On considère la série entière  $f = \sum \frac{z^n}{n!}$ .

Pour tout  $\rho \in \mathbb{R}^+$ ,  $\frac{\rho^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et donc la suite  $\left( \frac{\rho^n}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

Ainsi  $E = [0, +\infty[$  et le rayon de convergence de  $\sum \frac{z^n}{n!}$  est  $R = +\infty$ .

**Proposition 2**

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière dont on note  $R = R(\sum a_n z^n)$  (notation au programme) le rayon de convergence.

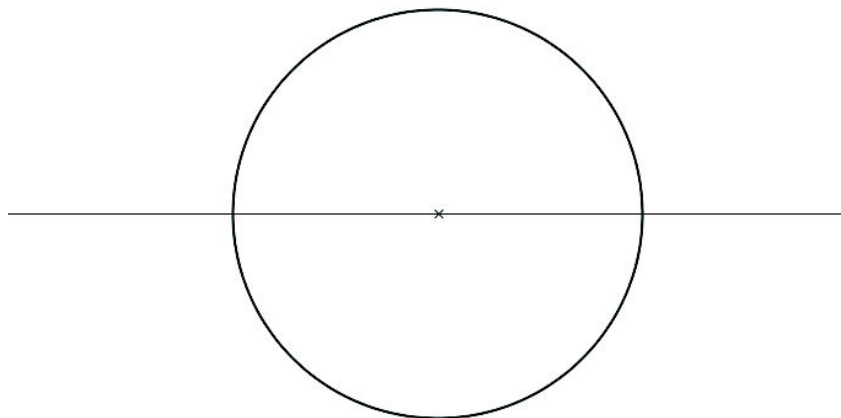
- Si  $R \neq +\infty$  : Pour tout  $z \in \mathbb{K}$  tel que  $|z| > R$ , on a :
  - $a_n z^n$  ne tend pas vers 0,
  - $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$  non bornée,
  - $\sum a_n z^n$  diverge grossièrement.
- Si  $R \neq 0$  : Pour tout  $z \in \mathbb{K}$  tel que  $|z| < R$ , on a :
  - $a_n z^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ ,
  - $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$  bornée,
  - $\sum a_n z^n$  converge absolument.

**Preuve.**

Si  $R \neq +\infty$  : Soit  $z \in \mathbb{K}$  tel que  $|z| > R$ .

Si  $R > 0$  : Soit  $z \in \mathbb{K}$  tel que  $|z| < R$ .

Illustration graphique :



□

**Définition 3**

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière dont on note  $R = R(\sum a_n z^n)$  le rayon de convergence. On appelle :

- Disque (ouvert) de convergence :  $D = D(0, R) = \{z \in \mathbb{K}, |z| < R\}$ ,
- Cercle d'incertitude :  $\mathcal{C}(O, R) = \{z \in \mathbb{K}, |z| = R\}$ .

Sur le cercle d'incertitude, tous les cas de figure sont possibles.

**Exercice de colle (E1)**

Déterminer de plusieurs méthodes le rayon de convergence de  $\sum \frac{z^n}{n}$ .

### 11.1.3 Calcul pratique du rayon de convergence

En utilisant la définition :

**Exemple 11.4.** Déterminer le rayon de convergence de  $\sum z^{n^2}$ .

**Exemple 11.5.** Déterminer le rayon de convergence de  $\sum 2^{\sqrt{n}} z^n$ .

Utilisation de la règle de D'Alembert : On rappelle l'énoncé suivant démontré dans le chapitre *Séries numériques*.

**Proposition 3 (Règle de D'Alembert pour les séries numériques)**

Soit  $\sum u_n$  une série à termes **strictement positifs**. On suppose qu'il existe  $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell.$$

On a alors :

- si  $\ell < 1$  alors  $\sum u_n$  converge (et par suite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ )
- si  $\ell > 1$  alors  $\sum u_n$  diverge (et on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$ )
- si  $\ell = 1$ , on ne peut pas conclure.

**Exercice de colle (E1)**

Déterminer le rayon de convergence de  $\sum \frac{2^n}{n} z^{2n}$ .

**Proposition 4 (Règle de D'Alembert pour les séries entières)**

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière. On suppose que :

- il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$ , tel que  $\forall n \geq N_0$ ,  $a_n \neq 0$ ,
- il existe  $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell$ .

Alors  $R = R(\sum a_n z^n) = \frac{1}{\ell}$ ,

avec pour convention  $\frac{1}{+\infty} = 0$  et  $\frac{1}{0^+} = +\infty$ .

Preuve.

□

### Exercice de colle (E1)

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Déterminer le rayon de convergence de  $\sum n^\alpha z^n$ .

**Remarque importante :** on ne pouvait pas appliquer ce théorème à la série entière  $\sum \frac{2^n}{n} z^{2n}$  car ses coefficients  $a_{2p+1}$  d'indices impairs sont tous nuls.

En utilisant les théorèmes de comparaison :

### Proposition 5

Soient  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières dont on note  $R_a = R(\sum a_n z^n)$  et  $R_b = R(\sum b_n z^n)$  les rayons de convergence respectifs.

- Si pour  $n$  assez grand on a  $|a_n| \leq |b_n|$  (ce qui est le cas quand  $|a_n| = o_{n \rightarrow +\infty}(|b_n|)$ ) alors  $R_a \geq R_b$ .
- Si  $|a_n| = O_{n \rightarrow +\infty}(|b_n|)$  alors  $R_a \geq R_b$ .
- Si  $|a_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |b_n|$  alors  $R_a = R_b$ .

Preuve.

□

**Exemple 11.6.** Déterminer le rayon de convergence de  $\sum \frac{\sin(n)}{n!} z^n$ .

L'exercice suivant figure explicitement dans le programme de PSI.

**Exercice de colle (E1)**

Les séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum n a_n z^n$  ont même rayon de convergence.

## 11.1.4 Opération sur les séries entières

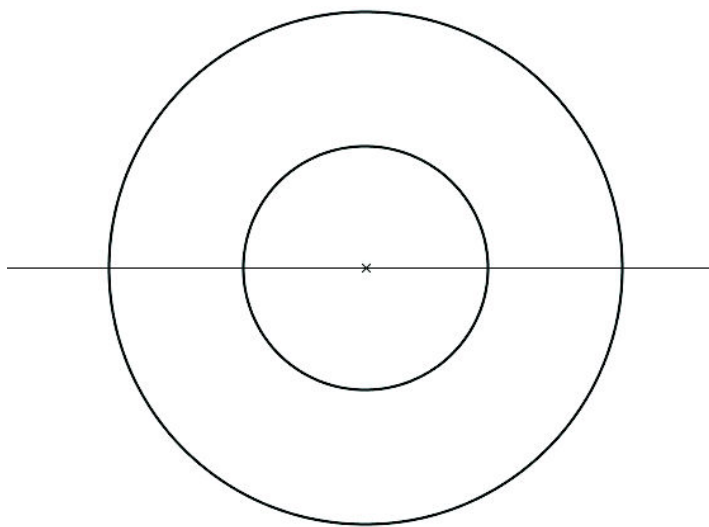
Somme :

**Proposition 6**

Soient  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières dont on note  $R_a$  et  $R_b$  les rayons de convergence respectifs. On note  $R$  le rayon de convergence de la série entière  $\sum (a_n + b_n) z^n$ .

- On a  $R \geq \min(R_a, R_b)$ .
- Si  $R_a \neq R_b$ , on a  $R = \min(R_a, R_b)$ .

Preuve.



□

**Remarque :** De manière évidente, si  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  convergent alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

**Exemple 11.7.** Avec les notations de la proposition précédente, trouver un exemple pour lequel  $R > \min(R_a, R_b)$ .



Produit de Cauchy :

On rappelle la proposition suivante.

**Proposition 7**

Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries numériques. Leur produit de Cauchy est la série  $\sum w_n$  avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont absolument convergentes alors  $\sum w_n$  converge absolument et l'on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \times \left( \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

On l'applique en particulier aux séries entières.

**Proposition 8**

Soient  $f = \sum a_n z^n$  et  $g = \sum b_n z^n$  deux séries entières dont on note  $R_a$  et  $R_b$  les rayons de convergence respectifs. La série entière  $\sum c_n z^n$  avec  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$  est appelée produit de Cauchy de  $f$  et de  $g$ , son rayon de convergence vérifie  $R \geq \min(R_a, R_b)$  et

$$\forall z \in B(0, \min(R_a, R_b)), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \times \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

**Preuve.**

□

**Remarque :** Il n'y a pas, comme pour les sommes de séries entières, d'hypothèse sous laquelle on aurait  $R = \min(R_a, R_b)$ .

**Exemple 11.8.** On pose  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = 1 - z$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ .

Ainsi  $R_a = +\infty$  (polynôme) et  $R_b = 1$  (série géométrique). On détermine la série entière définie par leur produit de Cauchy.

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 1 - 1 = 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

On a donc  $\sum c_n z^n = 1$  (constante) et donc  $R = +\infty$ .

On remarque que sur  $] - 1, 1[$ , d'après ce qui précède on a  $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = 1$ , c'est-à-dire :

$$\forall z \in ] - 1, 1[ \quad (1 - z) \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1,$$

on le savait déjà !

**Application aux séries exponentielles :** Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on pose  $e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ .

On verra que cette définition coïncide avec celle donnée en première année :

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad e^z = e^x \times e^{iy}.$$

Par un produit de Cauchy, on a démontré dans le chapitre « Séries numériques », que

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad \exp(z + z') = \exp(z) \times \exp(z').$$

## 11.2 Séries entières de la variable réelle

Dans ce paragraphe, mis à part ce qui concerne la continuité, on considère des séries entières fonctions d'une la variable réelle (souvent notée  $x$  ou  $t$ ).

$$f : t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

Si le rayon de convergence est  $R > 0$  alors le disque de convergence est  $] - R, R[$  et le cercle d'incertitude est  $\{-R, R\}$ . Ainsi,

$$\mathcal{D}_f = \left\{ t \in \mathbb{R}, \sum a_n t^n \text{ converge} \right\} = ] - R, R[, ] - R, R], [-R, R[ \text{ ou } [-R, R].$$

**Exemple 11.9.** • Donner un exemple de série entière dont le lieu de convergence est  $] - 1, 1[$ .

• Donner un exemple de série entière dont le lieu de convergence est  $] - 1, 1]$ .

• Donner un exemple de série entière dont le lieu de convergence est  $[-1, 1]$ .

### 11.2.1 Convergence normale

#### Proposition 9

Soit  $\sum a_n t^n$  une série entière dont on note  $R > 0$  le rayon de convergence.

- Pour tout  $\rho \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\rho < R$  la série  $\sum a_n t^n$  converge normalement sur  $[-\rho, \rho]$ .
- La série  $\sum a_n t^n$  converge donc normalement **sur tout segment** de  $] - R, R[$ .

Preuve.

□

**Remarque :** Avec les notations précédentes, et par un raisonnement similaire, on peut montrer que si  $\sum |a_n R^n|$  converge alors la série  $\sum a_n t^n$  converge normalement sur  $[-R, R]$ .

### 11.2.2 Continuité

#### Proposition 10

Soit  $\sum a_n t^n$  une série entière dont on note  $R > 0$  le rayon de convergence. Alors l'application  $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$  est continue sur  $] -R, R[$ .

Preuve.

□

Pour étudier la continuité en  $\pm R$  on pourra :

- Étudier la convergence normale sur  $[-R, R]$  par exemple en utilisant la remarque précédente.
- Étudier la convergence uniforme sur  $[0, R]$  (ou  $[-R, 0]$ ) par exemple en utilisant le théorème des séries alternées.

**Exemple 11.10.** Démontrer que l'application  $f : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n^2}$  est continue sur son ensemble de définition.

### 11.2.3 Continuité par rapport à la variable complexe

En considérant  $z = x + iy$  comme un élément de  $\mathbb{R}^2$ , on peut considérer l'application  $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  comme une fonction de deux variables  $x, y$  réelles. On admet le résultat suivant.

**Proposition 11**

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de la variable complexe dont on note  $R > 0$  le rayon de convergence.

Alors l'application  $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  est continue sur la boule ouverte  $B(0, R)$ .

### 11.2.4 Dérivation et intégration terme à terme

**Lemme**

Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière dont on note  $R$  le rayon de convergence. On définit :

- $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$  : « série intégrée terme à terme »
- $\sum n a_n z^{n-1}$  : « série dérivée terme à terme »

Ces deux séries ont aussi pour rayon de convergence  $R$ .

**Preuve.**

□

**Proposition 12**

Soit  $f = \sum a_n t^n$  une série entière dont on note  $R > 0$  le rayon de convergence.

- On peut « prendre les primitives »  $f$  terme à terme sur  $] - R, R[$  :

$$\forall t \in ] - R, R[, \quad \int f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

et le rayon de convergence est conservé.

- La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] - R, R[$  et on peut dériver  $f$  terme à terme sur  $] - R, R[$  :

$$\forall t \in ] - R, R[, \quad f'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} t^n$$

et le rayon de convergence est conservé.

Preuve.

□

### Première conséquence : quelques développements en séries entières

On part des séries géométriques :

$$\forall t \in ]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \quad (R=1)$$

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \quad (R=1)$$

En intégrant terme à terme ces séries entières, on trouve qu'il existe des constantes réelles  $C_1$  et  $C_2$  telles que pour tout  $t \in ]-1, 1[$ , on ait :

$$-\ln(1-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} + C_1 \quad \text{et} \quad \ln(1+t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} + C_2$$

En  $t = 0$ , on trouve  $C_1 = C_2 = 0$  et donc :

$$\forall t \in ]-1, 1[, \quad \ln(1-t) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} \quad (R=1)$$

$$\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} \quad (R=1)$$

**Exercice de colle (E2)**

Démontrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$ .

En posant  $t = u^2$ , on a  $|t| < 1 \iff |u| < 1$ .

Et donc  $\forall u \in ]-1, 1[$ ,  $\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1+u^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^{2n}$  ( $R = 1$ ).

En intégrant terme à terme cette série entière, on trouve qu'il existe une constante réelle  $C$  telle que pour tout  $u \in ]-1, 1[$ , on ait :

$$\text{Arctan}(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{2n+1} + C$$

En  $u = 0$ , on obtient  $C = 0$  et donc :

$$\forall t \in ]-1, 1[, \quad \text{Arctan}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \quad (R = 1)$$

**Exercice de colle (E1)**

Déterminer le rayon de convergence et la somme de  $f = \sum n^2 t^n$ .

## 11.2.5 Dérivées successives

**Proposition 13**

Soit  $f = \sum a_n t^n$  une série entière dont on note  $R > 0$  le rayon de convergence.

- La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -R, R[$ , on peut dériver terme à terme et le rayon de convergence est conservé.
- Les coefficients  $a_n$  sont uniquement déterminés par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

**Preuve.**

□

**Exercice de colle (E1)**

Prolonger la fonction  $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$  par continuité et montrer que la fonction prolongée est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -1, +\infty[$ .



### 11.2.6 Fonction développable en série entière

#### Définition 4

Soit  $r > 0$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $] - r, r[ \subset I$ .

On dit que  $f$  est développable en série entière sur  $] - r, r[$  s'il existe une série entière  $\sum a_n t^n$  telle que

$$\forall t \in ] - r, r[, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \quad (R \geq r)$$

**Exemple 11.11.** La fonction  $f : t \in ] - 1, +\infty[ \mapsto \ln(1+t)$  est développable en série entière sur  $] - 1, 1[$  puisque

$$\forall t \in ] - 1, 1[, \quad f(t) = \ln(1+t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1}.$$

Le paragraphe précédent a alors pour conséquence la proposition suivante.

#### Proposition 14

Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est développable en série entière sur  $] - r, r[$  avec  $\forall t \in ] - r, r[, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$

alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] - r, r[$  et les coefficients  $a_n$  sont **uniquement** déterminés par :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ .

### 11.2.7 Série de Taylor associée à une fonction

#### Définition 5

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  où  $I$  est un intervalle ouvert contenant 0.

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$ , on appelle série de Taylor associée à  $f$  (en 0) la série entière

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n.$$

Pour montrer qu'une fonction est développable en série entière, il faut :

- S'assurer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  au voisinage de 0,
- Montrer que la série de Taylor  $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$  a un rayon de convergence  $R > 0$ ,
- Montrer qu'il existe  $r > 0$  tel que pour  $t \in ] - r, r[$  on ait  $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$ .

**Remarque :** le dernier point est important. Il se peut que la série de Taylor converge mais que sa somme soit distincte de  $f$ .

**Exemple 11.12.** On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

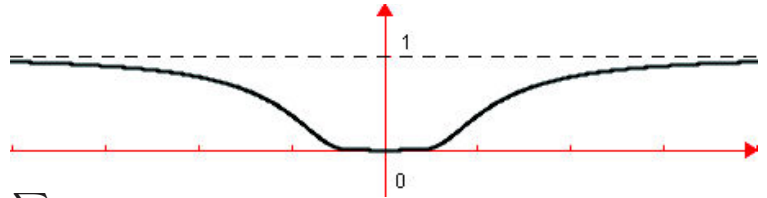
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

En raisonnant par récurrence et en appliquant le théorème de la limite de la dérivée, on montrerait que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = 0.$$

Ainsi, la série de Taylor associée à  $f$  est  $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n = \sum 0 = 0$ .

Elle converge évidemment sur  $\mathbb{R}$  (simplement), mais sa somme ne coïncide avec  $f(t)$  qu'en  $t = 0$ .



### 11.2.8 Développements en série entière de référence

**Proposition 15**

La fonction exponentielle (définie comme unique solution de  $y' = y$  et  $y(0) = 1$ ) est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (R = +\infty)$$

**Preuve.**

□

En écrivant  $\operatorname{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$  et  $\operatorname{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ , on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad (R = +\infty)$$

$$\operatorname{sh}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (R = +\infty)$$

En utilisant à nouveau l'inégalité de Taylor-Lagrange, puisque les dérivées successives de  $\sin$  et de  $\cos$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$ , on montrerait les égalités suivantes.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad (R = +\infty)$$

$$\sin(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (R = +\infty)$$

**Conséquence :** On peut maintenant vérifier que la définition de  $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$  coïncide bien avec celle vue en première année.

- Si  $z = x \in \mathbb{R}$ , on vient de démontrer que  $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ .

- Si  $z = iy \in i\mathbb{R}$ , alors

$$\begin{aligned} \exp(iy) &= \cos(y) + i \sin(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (i^2)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} i(i^2)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \end{aligned}$$

- Si  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , on a vu par produit de Cauchy que  $\exp(z + z') = \exp(z) \exp(z')$  et donc le résultat est vrai :

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(x) (\cos(y) + i \sin(y)).$$

Pour finir, on donne les développements en série entière suivants.

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n \end{aligned}$$

Avec :  $R = 1$  si  $\alpha \notin \mathbb{N}$  et  $R = +\infty$  si  $\alpha \in \mathbb{N}$  (polynôme).

**Exercice de colle (E2)**

Démontrer la formule du binôme négatif :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in ]-1, 1[, \frac{1}{(1-x)^{r+1}} = \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}$ .

**Remarque :** La difficulté est parfois de la reconnaître quand on part de la somme...

### 11.3 Tableaux récapitulatifs

• Développements en série entière de référence valables sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  :

$\forall z \in \mathbb{K}$ avec $ z  < 1, \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$	$R = 1$
$\forall z \in \mathbb{K}$ avec $ z  < 1, \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n$	$R = 1$
$\forall z \in \mathbb{K}, \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$	$R = +\infty$

• Développements en série entière de référence valables uniquement sur  $\mathbb{R}$  :

$\forall x \in ]-1, 1[, \ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$R = 1$
$\forall x \in ]-1, 1[, \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$R = 1$
$\forall x \in ]-1, 1[, \text{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$R = 1$
$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\forall x \in \mathbb{R}, \text{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\forall x \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$R = 1$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $R = +\infty$ si $\alpha \in \mathbb{N}$