

Chapitre 11

Séries entières

11.1 Définitions et premières propriétés

11.1.1 Séries entières

Définition 1

On appelle **série entière** à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , toute fonction f définie par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{K})$$

où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans \mathbb{K} .

On note : $f = \sum a_n z^n$ (abus de notations).

Exemple 11.1. La série géométrique : $f = \sum z^n$ est une série entière ($a_n = 1$).

$$z \in D_f \iff \sum z^n \text{ converge}$$

$$\iff |z| < 1$$

Ainsi, $D_f = \{z \in \mathbb{K}, |z| < 1\}$ et pour tout $z \in D_f$, on a $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

Remarque 1 : Les séries entières sont des séries de fonctions particulières $f = \sum f_n$ avec $f_n(z) = a_n z^n$. Les résultats du chapitre précédent s'appliquent donc, y compris si nécessaire, quand la variable z est complexe.

$$D_f = \{z \in \mathbb{K}, \sum a_n z^n \text{ converge} \}.$$

Par définition $\sum f_n$ converge donc simplement sur D_f .

Remarque 2 :

- Si $f = \sum f_n$ avec $f_n(z) = a_n z^n$, les a_n sont appelés **coefficients** de la série entière f .
- On peut définir $\sum a_n z^n$ si $(a_n)_{n \geq n_0}$ est définie à partir d'un certain rang. On note dans ce cas $\sum_{n \geq n_0} a_n z^n$.
- Les fonctions polynomiales sont des séries entières particulières, les coefficients sont nuls à partir d'un certain rang et elles sont définies sur \mathbb{K} tout entier.

$$\forall z \in \mathbb{K}, \quad P(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n.$$

- En $z = 0$, 0^n vaut 0 si $n \geq 1$ et donc la série $\sum a_n 0^n$ converge toujours. Ainsi $f = \sum a_n z^n$ est toujours définie en 0 et on a :

$$f(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n 0^n = a_0 0^0 = a_0.$$

11.1.2 Rayon de convergence

Proposition 1 (Lemme d'Abel)

Soit $f = \sum a_n z^n$ une série entière.

On suppose qu'il existe $\rho > 0$ tel que la suite $(a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Alors on a :

$$\forall z \in \mathbb{K}, \quad (|z| < \rho) \implies \left(\sum a_n z^n \text{ converge absolument} \right).$$

Preuve. (D2)

□

Conséquence : Si $(a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors $\sum a_n z^n$ converge simplement sur $B(0, \rho)$.

Définition 2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On note

$$E = \{ \rho \in \mathbb{R}^+, (a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \} \subset \mathbb{R}^+.$$

Alors E possède une borne supérieure (éventuellement égale à $+\infty$ si E n'est pas majoré).

On l'appelle **rayon de convergence** de la série entière.

$$R = \sup(E) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

Exemple 11.2. On reprend la série géométrique $f = \sum z^n$.

- si $\rho > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho^n = +\infty$ et donc $(\rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Et donc si $\rho > 1$ alors $\rho \notin E$.
- Si $\rho \leq 1$ alors $|\rho^n| \leq 1$ et donc $(\rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Et donc si $\rho \leq 1$ alors $\rho \in E$.

Finalement, $E = [0, 1]$ et le rayon de convergence de $\sum z^n$ est $R = \sup(E) = 1$.

Exemple 11.3. On considère la série entière $f = \sum \frac{z^n}{n!}$.

Pour tout $\rho \in \mathbb{R}^+$, $\frac{\rho^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc la suite $\left(\frac{\rho^n}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Ainsi $E = [0, +\infty[$ et le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{n!}$ est $R = +\infty$.

Proposition 2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont on note $R = R(\sum a_n z^n)$ (notation au programme) le rayon de convergence.

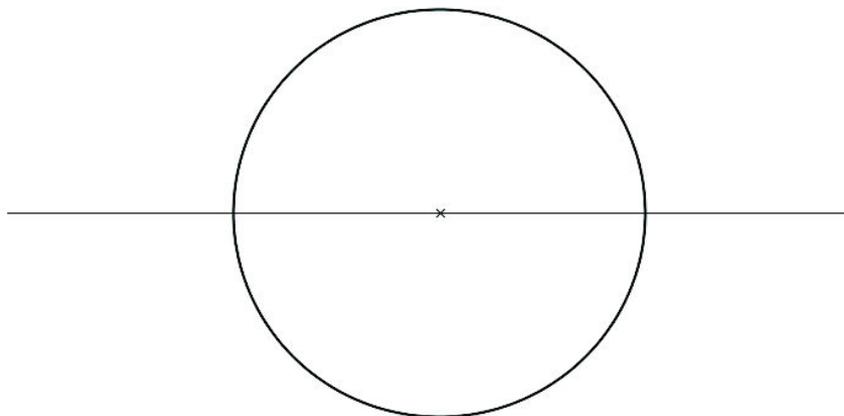
- Si $R \neq +\infty$: Pour tout $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| > R$, on a :
 - $a_n z^n$ ne tend pas vers 0,
 - $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ non bornée,
 - $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.
- Si $R \neq 0$: Pour tout $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| < R$, on a :
 - $a_n z^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$,
 - $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée,
 - $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Preuve.

Si $R \neq +\infty$: Soit $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| > R$.

Si $R > 0$: Soit $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| < R$.

Illustration graphique :



□

Définition 3

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont on note $R = R(\sum a_n z^n)$ le rayon de convergence. On appelle :

- Disque (ouvert) de convergence : $D = D(0, R) = \{z \in \mathbb{K}, |z| < R\}$,
- Cercle d'incertitude : $\mathcal{C}(O, R) = \{z \in \mathbb{K}, |z| = R\}$.

Sur le cercle d'incertitude, tous les cas de figure sont possibles.

Exercice de colle (E1)

Déterminer de plusieurs méthodes le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{n}$.

11.1.3 Calcul pratique du rayon de convergence

En utilisant la définition :

Exemple 11.4. Déterminer le rayon de convergence de $\sum z^{n^2}$.

Exemple 11.5. Déterminer le rayon de convergence de $\sum 2^{\sqrt{n}} z^n$.

Utilisation de la règle de D'Alembert : On rappelle l'énoncé suivant démontré dans le chapitre *Séries numériques*.

Proposition 3 (Règle de D'Alembert pour les séries numériques)

Soit $\sum u_n$ une série à termes **strictement positifs**. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell.$$

On a alors :

- si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge (et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$)
- si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge (et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = +\infty$)
- si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Exercice de colle (E1)

Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{2^n}{n} z^{2n}$.

Proposition 4 (Règle de D'Alembert pour les séries entières)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On suppose que :

- il existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq N_0, a_n \neq 0$,
- il existe $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell$.

Alors $R = R(\sum a_n z^n) = \frac{1}{\ell}$,

avec pour convention $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{0^+} = +\infty$.

Preuve.

□

Exercice de colle (E1)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum n^\alpha z^n$.

Remarque importante : on ne pouvait pas appliquer ce théorème à la série entière $\sum \frac{2^n}{n} z^{2n}$ car ses coefficients a_{2p+1} d'indices impairs sont tous nuls.

En utilisant les théorèmes de comparaison :

Proposition 5

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières dont on note $R_a = R(\sum a_n z^n)$ et $R_b = R(\sum b_n z^n)$ les rayons de convergence respectifs.

- Si pour n assez grand on a $|a_n| \leq |b_n|$ (ce qui est le cas quand $|a_n| = o_{n \rightarrow +\infty}(|b_n|)$) alors $R_a \geq R_b$.
- Si $|a_n| = O_{n \rightarrow +\infty}(|b_n|)$ alors $R_a \geq R_b$.
- Si $|a_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |b_n|$ alors $R_a = R_b$.

Preuve.

□

Exemple 11.6. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{\sin(n)}{n!} z^n$.

L'exercice suivant figure explicitement dans le programme de PSI.

Exercice de colle (E1)

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

11.1.4 Opération sur les séries entières

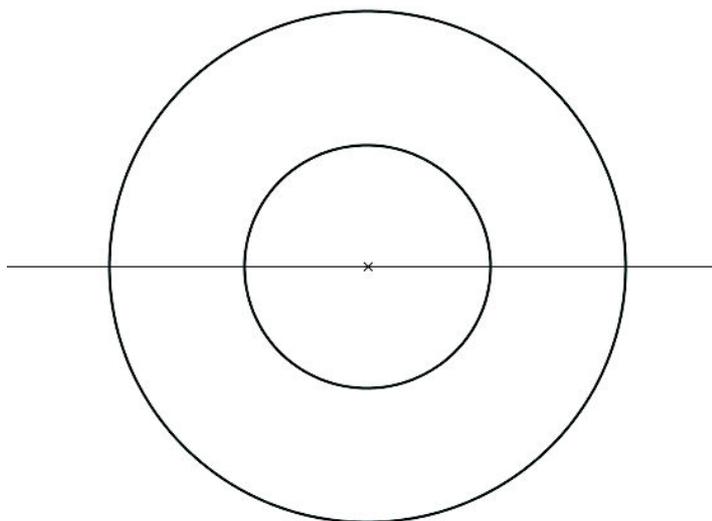
Somme :

Proposition 6

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières dont on note R_a et R_b les rayons de convergence respectifs. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.

- On a $R \geq \min(R_a, R_b)$.
- Si $R_a \neq R_b$, on a $R = \min(R_a, R_b)$.

Preuve.



□

Remarque : De manière évidente, si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Exemple 11.7. Avec les notations de la proposition précédente, trouver un exemple pour lequel $R > \min(R_a, R_b)$.

Produit de Cauchy :

On rappelle la proposition suivante.

Proposition 7

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. Leur produit de Cauchy est la série $\sum w_n$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors $\sum w_n$ converge absolument et l'on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

On l'applique en particulier aux séries entières.

Proposition 8

Soient $f = \sum a_n z^n$ et $g = \sum b_n z^n$ deux séries entières dont on note R_a et R_b les rayons de convergence respectifs. La série entière $\sum c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ est appelée produit de Cauchy de f et de g , son rayon de convergence vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$ et

$$\forall z \in B(0, \min(R_a, R_b)), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

Preuve.

□

Remarque : Il n'y a pas, comme pour les sommes de séries entières, d'hypothèse sous laquelle on aurait $R = \min(R_a, R_b)$.

Exemple 11.8. On pose $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = 1 - z$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.

Ainsi $R_a = +\infty$ (polynôme) et $R_b = 1$ (série géométrique). On détermine la série entière définie par leur produit de Cauchy.

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 1 - 1 = 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

On a donc $\sum c_n z^n = 1$ (constante) et donc $R = +\infty$.

On remarque que sur $] - 1, 1[$, d'après ce qui précède on a $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = 1$, c'est-à-dire :

$$\forall z \in] - 1, 1[\quad (1 - z) \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1,$$

on le savait déjà !

Application aux séries exponentielles : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

On verra que cette définition coïncide avec celle donnée en première année :

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad e^z = e^x \times e^{iy}.$$

Par un produit de Cauchy, on a démontré dans le chapitre « Séries numériques », que

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \quad \exp(z + z') = \exp(z) \times \exp(z').$$

11.2 Séries entières de la variable réelle

Dans ce paragraphe, mis à part ce qui concerne la continuité, on considère des séries entières fonctions d'une la variable réelle (souvent notée x ou t).

$$f : t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

Si le rayon de convergence est $R > 0$ alors le disque de convergence est $] - R, R[$ et le cercle d'incertitude est $\{-R, R\}$. Ainsi,

$$\mathcal{D}_f = \left\{ t \in \mathbb{R}, \sum a_n t^n \text{ converge} \right\} =] - R, R[,] - R, R], [-R, R[\text{ ou } [-R, R].$$

Exemple 11.9. • Donner un exemple de série entière dont le lieu de convergence est $] - 1, 1[$.

• Donner un exemple de série entière dont le lieu de convergence est $] - 1, 1]$.

• Donner un exemple de série entière dont le lieu de convergence est $[-1, 1]$.

11.2.1 Convergence normale

Proposition 9

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière dont on note $R > 0$ le rayon de convergence.

- Pour tout $\rho \in \mathbb{R}^+$ tel que $\rho < R$ la série $\sum a_n t^n$ converge normalement sur $[-\rho, \rho]$.
- La série $\sum a_n t^n$ converge donc normalement **sur tout segment** de $] - R, R[$.

Preuve.

□

Remarque : Avec les notations précédentes, et par un raisonnement similaire, on peut montrer que si $\sum |a_n R^n|$ converge alors la série $\sum a_n t^n$ converge normalement sur $[-R, R]$.

11.2.2 Continuité

Proposition 10

Soit $\sum a_n t^n$ une série entière dont on note $R > 0$ le rayon de convergence. Alors l'application $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est continue sur $] -R, R[$.

Preuve.

□

Pour étudier la continuité en $\pm R$ on pourra :

- Étudier la convergence normale sur $[-R, R]$ par exemple en utilisant la remarque précédente.
- Étudier la convergence uniforme sur $[0, R]$ (ou $[-R, 0]$) par exemple en utilisant le théorème des séries alternées.

Exemple 11.10. Démontrer que l'application $f : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n^2}$ est continue sur son ensemble de définition.

11.2.3 Continuité par rapport à la variable complexe

En considérant $z = x + iy$ comme un élément de \mathbb{R}^2 , on peut considérer l'application $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ comme une fonction de deux variables x, y réelles. On admet le résultat suivant.

Proposition 11

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de la variable complexe dont on note $R > 0$ le rayon de convergence.

Alors l'application $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur la boule ouverte $B(0, R)$.

11.2.4 Dérivation et intégration terme à terme

Lemme

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont on note R le rayon de convergence. On définit :

- $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$: « série intégrée terme à terme »
- $\sum n a_n z^{n-1}$: « série dérivée terme à terme »

Ces deux séries ont aussi pour rayon de convergence R .

Preuve.

□

Proposition 12

Soit $f = \sum a_n t^n$ une série entière dont on note $R > 0$ le rayon de convergence.

- On peut « prendre les primitives » f terme à terme sur $] - R, R[$:

$$\forall t \in] - R, R[, \quad \int f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

et le rayon de convergence est conservé.

- La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur $] - R, R[$ et on peut dériver f terme à terme sur $] - R, R[$:

$$\forall t \in] - R, R[, \quad f'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} t^n$$

et le rayon de convergence est conservé.

Preuve.

□

Première conséquence : quelques développements en séries entières

On part des séries géométriques :

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \quad (R=1)$$

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n \quad (R=1)$$

En intégrant terme à terme ces séries entières, on trouve qu'il existe des constantes réelles C_1 et C_2 telles que pour tout $t \in]-1, 1[$, on ait :

$$-\ln(1-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} + C_1 \quad \text{et} \quad \ln(1+t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} + C_2$$

En $t = 0$, on trouve $C_1 = C_2 = 0$ et donc :

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad \ln(1-t) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} \quad (R=1)$$

$$\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} \quad (R=1)$$

Exercice de colle (E2)

Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

En posant $t = u^2$, on a $|t| < 1 \iff |u| < 1$.

Et donc $\forall u \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1+u^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^{2n}$ ($R = 1$).

En intégrant terme à terme cette série entière, on trouve qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout $u \in]-1, 1[$, on ait :

$$\operatorname{Arctan}(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{2n+1} + C$$

En $u = 0$, on obtient $C = 0$ et donc :

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad \operatorname{Arctan}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \quad (R = 1)$$

Exercice de colle (E1)

Déterminer le rayon de convergence et la somme de $f = \sum n^2 t^n$.

11.2.5 Dérivées successives

Proposition 13

Soit $f = \sum a_n t^n$ une série entière dont on note $R > 0$ le rayon de convergence.

- La fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$, on peut dériver terme à terme et le rayon de convergence est conservé.
- Les coefficients a_n sont uniquement déterminés par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Preuve.

□

Exercice de colle (E1)

Prolonger la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ par continuité et montrer que la fonction prolongée est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, +\infty[$.

11.2.6 Fonction développable en série entière

Définition 4

Soit $r > 0$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que $] - r, r[\subset I$.

On dit que f est développable en série entière sur $] - r, r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n t^n$ telle que

$$\forall t \in] - r, r[, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \quad (R \geq r)$$

Exemple 11.11. La fonction $f : t \in] - 1, +\infty[\mapsto \ln(1+t)$ est développable en série entière sur $] - 1, 1[$ puisque

$$\forall t \in] - 1, 1[, \quad f(t) = \ln(1+t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1}.$$

Le paragraphe précédent a alors pour conséquence la proposition suivante.

Proposition 14

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est développable en série entière sur $] - r, r[$ avec $\forall t \in] - r, r[, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$

alors f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] - r, r[$ et les coefficients a_n sont **uniquement** déterminés par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

11.2.7 Série de Taylor associée à une fonction

Définition 5

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle ouvert contenant 0.

Si f est de classe \mathcal{C}^∞ sur I , on appelle série de Taylor associée à f (en 0) la série entière

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n.$$

Pour montrer qu'une fonction est développable en série entière, il faut :

- S'assurer que f est de classe \mathcal{C}^∞ au voisinage de 0,
- Montrer que la série de Taylor $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$ a un rayon de convergence $R > 0$,
- Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour $t \in] - r, r[$ on ait $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$.

Remarque : le dernier point est important. Il se peut que la série de Taylor converge mais que sa somme soit distincte de f .

Exemple 11.12. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

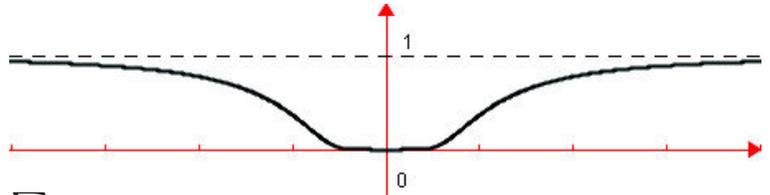
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

En raisonnant par récurrence et en appliquant le théorème de la limite de la dérivée, on montrerait que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = 0.$$

Ainsi, la série de Taylor associée à f est $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n = \sum 0 = 0$.

Elle converge évidemment sur \mathbb{R} (simplement), mais sa somme ne coïncide avec $f(t)$ qu'en $t = 0$.



11.2.8 Développements en série entière de référence

Proposition 15

La fonction exponentielle (définie comme unique solution de $y' = y$ et $y(0) = 1$) est développable en série entière sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (R = +\infty)$$

Preuve.

□

En écrivant $\operatorname{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ et $\operatorname{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad (R = +\infty)$$

$$\operatorname{sh}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (R = +\infty)$$

En utilisant à nouveau l'inégalité de Taylor-Lagrange, puisque les dérivées successives de \sin et de \cos sont bornées sur \mathbb{R} , on montrerait les égalités suivantes.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad (R = +\infty)$$

$$\sin(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (R = +\infty)$$

Conséquence : On peut maintenant vérifier que la définition de $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ coïncide bien avec celle vue en première année.

- Si $z = x \in \mathbb{R}$, on vient de démontrer que $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- Si $z = iy \in i\mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} \exp(iy) &= \cos(y) + i \sin(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (i^2)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} i(i^2)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \end{aligned}$$

- Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on a vu par produit de Cauchy que $\exp(z + z') = \exp(z) \exp(z')$ et donc le résultat est vrai :

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(x) (\cos(y) + i \sin(y)).$$

Pour finir, on donne les développements en série entière suivants.

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n \end{aligned}$$

Avec : $R = 1$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $R = +\infty$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ (polynôme).

Exercice de colle (E2)

Démontrer la formule du binôme négatif : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{(1-x)^{r+1}} = \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}$.

Remarque : La difficulté est parfois de la reconnaître quand on part de la somme...

11.3 Tableaux récapitulatifs

• Développements en série entière de référence valables sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} :

$\forall z \in \mathbb{K}$ avec $ z < 1$, $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$	$R = 1$
$\forall z \in \mathbb{K}$ avec $ z < 1$, $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n$	$R = 1$
$\forall z \in \mathbb{K}$, $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$	$R = +\infty$

• Développements en série entière de référence valables uniquement sur \mathbb{R} :

$\forall x \in]-1, 1[$, $\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$R = 1$
$\forall x \in]-1, 1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$R = 1$
$\forall x \in]-1, 1[$, $\text{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$R = 1$
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\forall x \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$R = 1$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $R = +\infty$ si $\alpha \in \mathbb{N}$