Chapitre 10

Suites et séries de fonctions

Dans ce chapitre, on considère des fonctions $f_n : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ avec $n \in \mathbb{N}$. On définit dans un premier temps plusieurs types de convergences de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mais aussi de la série $\sum f_n$.

On s'intéressera ensuite aux propriétés conservées par « passage à la limite » : continuité, dérivabilité, intégration...

10.1 Différents types de convergence

10.1.1 Convergence simple

Définition 1

• On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur** I s'il existe $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que :

$$\forall x \in I, \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

La fonction f, si elle existe, est unique. On l'appelle **limite simple** de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On note $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS sur } I} f$.

• On dira de même que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge simplement sur** I si : $\forall x \in I, \ \sum f_n(x)$ converge.

Exemple 10.1. *On pose* $\forall x \geqslant 0, \ f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.
Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 10.2. *On pose* $\forall x \in \mathbb{R}, \ g_n(x) = x^n$.

• *Etudier la convergence simple de* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Illustration graphique :

• *Etudier la convergence simple de* $\sum g_n$.

Remarque : en passant à la limite, les inégalités larges sont conservées, et donc :

• Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions croissantes (resp. décroissantes) sur I et si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS sur } I} f$, alors f est croissante (resp. décroissante) sur I.
Preuve.

□

• Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions convexes (resp. concaves) sur I et si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS sur } I} f$, alors f est convexe (resp. concave) sur I.
Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est convexe et donc (par définition) on a :

$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0,1], \quad f_n(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f_n(x) + (1-\lambda) f_n(y).$

Or, par définition de limite simple, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x),\ \lim_{n\to+\infty} f_n(y) = f(y) \text{ et aussi } \lim_{n\to+\infty} f_n(\lambda x + (1-\lambda)y) = f(\lambda x + (1-\lambda)y).$$

En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Ceci étant vrai pour tout $(x,y) \in I^2$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a bien démontré que f est convexe.

□

10.1.2 Norme infinie

On rappelle dans un premier temps la définition de norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 2

On appelle norme sur E, toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :
(1) positivité : $\forall x \in E, \quad N(x) \geqslant 0$,
(2) caractère défini : $\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \implies x = 0$,
(3) homogénéité : $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$,
(4) inégalité triangulaire : $\forall x \in E,\ \forall y \in E, \quad N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

On rappelle aussi la définition de borne supérieure et la condition d'existence suivante.

Proposition 1 (borne supérieure)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
• On appelle, si elle existe, borne supérieure de A, le plus petit de ses majorants. On la note $\sup(A)$.
• Si A est une partie **non vide** et **majorée** de $\mathbb{R}$, alors A possède une borne supérieure.

On pourra utiliser le lemme suivant sans le démontrer.

Lemme

Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée de $\mathbb{R}$, et si λ est un réel **positif** alors :

$$\sup(\lambda.A) = \sup_{a\in A}(\lambda a) = \lambda \sup(A).$$

Preuve. Si $\lambda = 0$ alors $\lambda.A = \{0\}$ et le résultat est immédiat. On suppose désormais que $\lambda > 0$.

Pour tout $a \in A$ on a $a \leqslant \sup(A)$ et comme $\lambda \geqslant 0$,

$$\forall a \in A, \quad \lambda a \leqslant \lambda \sup(A).$$

Ainsi, $\lambda \sup(A)$ est un majorant de l'ensemble $\{\lambda a,\ a \in A\}$. Cet ensemble est donc non vide et majoré et donc, il possède une borne supérieure. Comme la borne supérieure est le plus petit des majorants, on a déjà :

$$\sup\{\lambda a,\ a \in A\} = \sup(\lambda.A) \leqslant \lambda \sup(A).$$

Enfin, en appliquant ce qui précède à $\lambda' = \dfrac{1}{\lambda} > 0$ et à $A' = \lambda A$, on obtient que

$$\sup(A) \leqslant \frac{1}{\lambda}\sup(\lambda.A),$$

qui donne l'inégalité inverse et termine la preuve. □

Définition 3 (Norme infinie)

On note E l'espace vectoriel des fonctions **bornées** sur un intervalle donné I :

$$E = \{f : I \longrightarrow \mathbb{K},\ \exists M > 0, \forall x \in I,\ |f(x)| \leqslant M\}.$$

Pour tout $f \in E$, on pose alors :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I}|f(x)|.$$

On définit ainsi une **norme** sur E.

Preuve.(D2)

□

10.1.3 Convergence uniforme pour les suites de fonctions

On reprend la définition de convergence simple. Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f. On a donc, en revenant à la définition de limite :

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(x,\varepsilon) > 0,\ \forall n \in N, \quad n \geqslant N \implies |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, le rang à partir duquel on a $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ dépend de $x \in I$. Pour la convergence uniforme, ce rang est le même pour tous les x de I. C'est donc un mode de convergence plus contraignant que celui de la convergence simple.

Définition 4

Avec les notations précédentes : On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur** I s'il existe $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que l'une des deux propriétés équivalentes suivantes soit vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon) > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \implies \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \tag{1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \tag{2}$$

On note $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{CU sur } I}{\longrightarrow}} f$.

Preuve. Justifions l'équivalence des définitions (1) et (2).

□

Exemple 10.3. *On pose* $\forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = x^n$.
Démontrer que, pour tout $r \in]0,1[$, *la suite* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformement vers* 0 *sur* $[-r,r]$.

Proposition 2

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I alors elle converge simplement sur I et la limite uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sa limite simple.

Preuve.

□

10.1.4 Convergence uniforme pour les séries de fonctions

Définition 5

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément sur** I si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles converge uniformément sur I.

D'après ce qui précède, elle converge alors simplement sur I ce qui s'écrit : $\forall x \in I,\ \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = S(x)$.

Ainsi, les restes partiels $R_n : x \longmapsto S(x) - S_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ sont bien définis sur I.

Avec ces notations, $\sum f_n$ converge uniformément sur I si :

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n - S\|_\infty = \lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty = 0$$

ou encore si la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses restes partiels converge uniformément vers 0.

Exemple 10.4. *On reprend* $\forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = x^n$.
Démontrer que, pour tout $r \in]0,1[$, *la série* $\sum g_n$ *converge uniformement sur* $[-r, r]$.

Exercice de colle (E1)

On pose $\forall t \in [0,1],\ f_n(t) = (-1)^n \dfrac{t^n}{n}$. Démontrer que la série $\sum f_n$ converge uniformement sur $[0,1]$.

10.1.5 Convergence normale pour les séries de fonctions

Définition 6

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et bornées sur $I \subset \mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.

Exercice de colle (E2)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(t) = (-1)^n \dfrac{t^n}{n}$ et $S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{t^k}{k}$.

- Etudier la convergence simple de $\sum f_n$.
- Démontrer que pour tout $a \in]0,1[$, la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.
- Démontrer que la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0, 1]$.

D'une manière générale, on pourra remarquer que :

Si $\sum f_n$ converge normalement sur I, alors, pour tout $x \in I$, la série $\sum f_n(x)$ converge **absolument**.

Preuve.

□

10.1.6 Procédé d'étude pour les suites de fonctions

Procédé d'étude : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I.

• Recherche d'un candidat à la limite : On cherche d'abord l'ensemble D des $x \in I$ pour lesquel $f_n(x)$ admet une limite finie quand n tend vers $+\infty$. On pose alors

$$\forall x \in D,\ f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

Ainsi par définition, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur D.

• Étude de la convergence uniforme : on sait que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément, c'est nécessairement vers sa limite simple. Il reste donc à voir si $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ ou pas, avec

$$\|f_n - f\|_\infty = \|f_n - f\|_{D,\infty} = \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|.$$

On remarquera que la norme infinie et donc la convergence uniforme dépend de l'intervalle sur lequel on se place. Et en particulier :

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I $\not\Rightarrow$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I

Première piste : On sait calculer explicitement $\|f_n - f\|_\infty$ (par exemple par une étude de fonctions).
Dans ce cas, il suffit d'en déterminer la limite.
On peut obtenir des cas de divergence ou de convergence.

Exercice de colle (E1)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$.
Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergence uniformément sur $\mathbb{R}^+$. On pourra utiliser la formule de Stirling.

Deuxième piste : On essaie de trouver une majoration du type $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \alpha_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.
Pour cela, on doit majorer *uniformément* $|f_n(x) - f(x)|$, c'est-à-dire indépendemment de x.
On n'obtient par cette méthode que des cas de convergence.

Exercice de colle (E2)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{n^2 + x^2}$.
Etudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur un segment $[0, A] \subset \mathbb{R}^+$.

Troisième piste : On essaie de trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D telle que $f_n(x_n) - f(x_n)$ ne tende pas vers 0. Puisque

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leqslant \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty,$$

il ne peut y avoir convergence uniforme.
On n'obtient par cette méthode que des cas de divergence.

Exercice de colle (E2 - suite)

On reprend l'exemple précédent. Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$?

Deux exemples à retenir :

1. Une suite de fonctions qui converge simplement mais pas uniformément sur $[0, 1]$.

2. Une suite de fonctions qui converge simplement mais pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

10.1.7 Procédé d'étude pour les séries de fonctions

Avant de donner quelques méthodes, on donne la proposition suivante (admise).

Proposition 3

Si $\sum f_n$ converge normalement sur I alors elle converge uniformément sur I et donc elle converge simplement sur I.

Procédé d'étude : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I.

• Recherche du domaine de convergence : On cherche d'abord l'ensemble D des $x \in I$ pour lesquel la série $\sum f_n(x)$ converge. On pose alors

$$\forall x \in D,\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Ainsi par définition, $\sum f_n$ **converge simplement** sur D. Il n'est pas nécessaire d'expliciter $S(x)$ pour avoir la convergence simple.

• Etude de la convergence normale : elle est plus forte mais plus simple à étudier que la convergence uniforme.
On pose, **si elle existe** :

$$\|f_n\|_\infty = \|f_n\|_{D,\infty} = \sup_{x\in D} |f_n(x)|.$$

Là encore, la norme infinie et donc la convergence normale dépend de l'intervalle sur lequel on se place. En particulier :

$$\sum f_n \text{ converge normalement sur tout segment de } I \quad \not\Rightarrow \quad \sum f_n \text{ converge normalement sur } I$$

Première piste : On sait calculer explicitement $\|f_n\|_\infty$ (par exemple par une étude de fonctions).
Dans ce cas, il suffit de déterminer la nature de $\sum \|f_n\|_\infty$.

Deuxième piste : On essaie de trouver une majoration du type $\|f_n\|_\infty \leqslant \alpha_n$ avec $\sum \alpha_n$ convergente. Pour cela, on doit majorer *uniformément* $|f_n(x)|$, c'est-à-dire indépendemment de x. On applique ensuite les théorèmes de comparaison, on obtient la convergence de $\sum \|f_n\|_\infty$.

Troisième piste : On essaie de trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D telle que $\sum |f_n(x_n)|$ diverge. Puisque

$$|f_n(x_n)| \leqslant \sup_{x\in D} |f_n(x)| = \|f_n\|_\infty,$$

par les théorèmes de comparaison, il ne peut y avoir convergence normale.

Exercice de colle (E1)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}$. Etudier la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[0, A]$ puis sur $\mathbb{R}^+$.

• Etude de la convergence uniforme : on reprend les notations usuelles. Pour tout $x \in D$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x), \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \quad \text{et} \quad R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

On veut voir si $\|S - S_n\|_\infty = \|R_n\|_\infty$ tend vers 0.

Là encore, la norme infinie et donc la convergence uniforme dépend de l'intervalle sur lequel on se place.

$$\sum f_n \text{ converge uniformément sur tout segment de } I \quad \not\Longrightarrow \quad \sum f_n \text{ converge uniformément sur } I$$

Première piste : Dans le cadre du théorème des séries alternées, on peut essayer majorer uniformément les restes partiels par le terme général d'une suite qui tend vers 0.

Exemple 10.5. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(t) = (-1)^n \dfrac{t^n}{n}$. On a vu que la série $\sum f_n$ converge uniformément (à l'aide du théorème des séries alternées) sur $[0,1]$, mais pas normalement.*

Exemple 10.6. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$. Montrer que la série $\sum h_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.*

Deuxième piste : On peut essayer majorer uniformément les restes partiels, par des restes partiels que l'on sait calculer explicitement (séries géométriques par exemple !).
On n'obtient par cette méthode que des cas de convergence.

Troisième piste : On peut essayer d'encadrer uniformément les restes partiels à l'aide d'intégrales.
On peut obtenir par cette méthode des cas de convergence et de divergence.

10.2 Continuité

10.2.1 Pour les suites de fonctions

Proposition 4

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad f_n \text{ continue sur } I \text{ (resp. en } a) \\ \bullet\quad f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{CU sur } I}{\longrightarrow}} f \text{ (ou sur tout segment de } I) \end{array}\right\} \implies f \text{ continue sur } I \text{ (resp. en } a).$$

Preuve.

□

Remarque 1 : Très souvent, on dispose d'une expression pour la limite simple f, on sait donc si elle est continue ou pas. Ce théorème s'utilise donc rarement dans le sens direct. Cependant, par l'absurde, on peut infirmer une convergence uniforme.

Exemple 10.7. *Retrouver rapidement que si $f_n(x) = x^n$ alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.*

Remarque 2 : Ce résultat s'écrit aussi

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

Ainsi, sous certaines hypothèses, on peut « permuter » les deux signes limites. On verra qu'il se généralise au cas où a est une extremité de l'ensemble de définition de f_n.

10.2.2 Pour les séries de fonctions

Proposition 5

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad f_n \text{ continue sur } I \text{ (resp. en } a)\\ \bullet\quad \sum f_n\ CU \text{ sur } I \text{ (ou sur tout segment de } I)\end{array}\right\} \implies \sum f_n \text{ continue sur } I \text{ (resp. en } a).$$

Remarque : La continuité est une propriété locale. Ainsi, si l'on montre que f est continue sur tout segment de I, elle le sera sur I. On peut donc restreindre l'hypothèse de convergence uniforme à tout segment de I.

Exemple 10.8. *On reprend $f_n(t) = (-1)^n\dfrac{t^n}{n}$ et pour tout $t \in]-1,1]$, on pose $S(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^n}{n}$.*
Montrons que S est continue sur $]-1,1]$.

10.3 Théorème de double limite

Le théorème suivant n'est plus au programme de PSI. Son résultat ne pourra donc pas être utilisé. Néanmoins, nous le mentionnons quand même par souci de cohérence, puisque celui concernant les séries de fonctions est au programme.

Proposition 6 (Théorème de double limite (Hors-Programme))

Si $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ est un point ou un extrémité de I :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim\limits_{x \to a} f_n(x) = b_n \in \mathbb{K} \\ \bullet \quad f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{CU sur } I} f \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{l} \bullet \quad (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \\ \bullet \quad \lim\limits_{x \to a} f(x) \text{ existe} \\ \bullet \lim\limits_{x \to a} \Big(\underbrace{\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)}_{=f(x)} \Big) = \lim\limits_{n \to +\infty} \Big(\underbrace{\lim\limits_{x \to a} f_n(x)}_{=b_n} \Big) \end{array}\right.$$

Proposition 7 (Théorème de double limite)

Si $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ est un point ou un extrémité de I :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim\limits_{x \to a} f_n(x) = b_n \in \mathbb{K} \\ \bullet \quad \sum f_n \ CU \text{ sur } I \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{l} \bullet \quad \sum b_n \text{ converge} \\ \bullet \quad \lim\limits_{x \to a} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \text{ existe} \\ \bullet \lim\limits_{x \to a} \Big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \Big) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Big(\underbrace{\lim\limits_{x \to a} f_n(x)}_{=b_n} \Big) \end{array}\right.$$

Exercice de colle (E2)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$ et on considère $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

Déterminer l'ensemble de définion D de f. Montrer que f est continue sur D et déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice de colle (E3)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$ et on considère $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

En encadrant $f(x)$ par des intégrales, démontrer que $f(x) \underset{x \to 0+}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$.

10.4 Dérivation

10.4.1 Pour les suites de fonctions

On admet le théorème suivant.

Proposition 8

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\[2ex] \bullet \quad f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{CS sur } I}{\longrightarrow}} f \\[2ex] \bullet \quad f_n' \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{CU sur } I}{\longrightarrow}} h \text{ (sur tout segment de } I) \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \text{ et } f' = h,$$

ce qui s'écrit $\forall x \in I, \quad \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right)' = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x).$

Remarque 1 : Très souvent, on dispose d'une expression pour la limite simple f, on sait donc si elle est dérivable ou pas. Comme pour la continuité, ce théorème s'utilise donc peu dans le sens direct. L'exemple suivant montre la nécessité de la dernière hypothèse dans ce théorème.

Exemple 10.9. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1,1]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}}$. Ainsi f_n est dérivable sur $[-1,1]$.*

La suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[-1,1]$?

Remarque 2 :

Exercice de colle (E3)

Si les hypothèses du théorème de dérivation, sont vérifiées, alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I.

En effet, soit $[a,b] \subset I$. D'après la proposition précédente, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et donc $f_n - f$ aussi. Ainsi :

$$\forall x \in [a,b],\ (f_n - f)(x) = (f_n - f)(a) + \int_a^x (f_n - f)'(t)dt$$

Par inégalités triangulaires, on a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in [a,b], \quad |f_n(x) - f(x)| &\leqslant |f_n(a) - f(a)| + \int_a^x |f_n'(t) - f'(t)|dt \\
&\leqslant |f_n(a) - f(a)| + (x-a)\|f_n' - f'\|_\infty \\
&\leqslant |f_n(a) - f(a)| + (b-a)\|f_n' - f'\|_\infty
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\|f_n - f\|_\infty \leqslant |f_n(a) - f(a)| + (b-a)\|f_n' - f'\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
ceci par convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f et convergence uniforme de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ vers f'.

10.4.2 Pour les séries de fonctions

Proposition 9 (Théorème de dérivation terme à terme)

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I
- $\sum f_n$ CS sur I
- $\sum f_n'$ CU sur I (ou sur tout segment de I)

$\Longrightarrow \quad \sum f_n$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\left(\sum f_n\right)' = \sum f_n'$.

Remarque : La continuité et la dérivabilité sont des propriétés locales. Ainsi, si l'on montre que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment de I, elle le sera sur I. On peut donc restreindre l'hypothèse de convergence uniforme à tout segment de I.

Exercice de colle (E1)

On considère la fonction zeta de Riemann définie par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.
Déterminer l'ensemble de définition D de ζ, montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et exprimer $\zeta'(x)$ à l'aide d'une série.

Remarque : En utilisant la proposition ci-dessous, on aurait pu démontrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D et que :

$$\forall x \in D, \qquad \zeta^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln(n))^p}{n^x}.$$

Proposition 10

$$\left.\begin{array}{l}\bullet \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^p \text{ sur } I \\[2ex] \bullet \quad \sum f_n, \sum f_n', \dots, \sum f_n^{(p-1)}\ CS \text{ sur } I \\[2ex] \bullet \quad \sum f_n^{(p)}\ CU \quad \text{sur } I \text{ (ou sur tout segment de } I)\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\sum f_n \text{ de classe } \mathcal{C}^p \text{ sur } I \\ \text{et} \\ \forall i \in \{0,\dots,p\},\ \left(\sum f_n\right)^{(i)} = \sum f_n^{(i)}\end{array}\right.$$

10.5 Intégration sur un segment

10.5.1 Pour les suites de fonctions

Proposition 11 (Convergence uniforme)

$$\left.\begin{array}{l}\bullet \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \text{ continue sur } [a,b] \\[2ex] \bullet \quad f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU sur } [a,b]} f\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\bullet \quad f \text{ est continue sur } [a,b] \text{(déjà vu)} \\[2ex] \bullet \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)}_{=f(t)}\,dt\end{array}\right.$$

Preuve.

$\square$

Exemple 10.10. *Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{dt}{t^2+n}$ *de trois manières.*

Par une majoration simple :

Par le calcul explicite :

Par un argument de convergence uniforme sur un segment :

Dans le cadre des **suites** de fonctions, on peut donc se passer du théorème de convergence uniforme. Mais on illustre dans le paragraphe suivant, son utilité lorsqu'il est appliqué aux **séries** de fonctions.

10.5.2 Pour les séries de fonctions

Proposition 12 (Convergence uniforme)

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \text{ continue sur } [a,b] \\[2ex] \bullet\ \sum f_n \ CU \text{ sur } [a,b] \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \bullet\ \displaystyle\sum \int_a^b f_n(t)dt \ \text{ converge} \\[2ex] \bullet\ t \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt \ \text{ est continue sur } [a,b] \\[2ex] \bullet\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt \end{array}\right.$$

Exemple 10.11. Un premier pas vers les séries entières.
En considérant la série $\sum t^n$, *montrer que pour tout* $x \in]-1,1[$, *on a* $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

10.6 Intégration sur un intervalle quelconque

10.6.1 Théorème de convergence dominée à paramètre continu (rappel)

Proposition 13

Soient A et I des intervalles de $\mathbb{R}$ et a une extrémité de A.
On considère une fonction numérique f de deux variables définie sur $A \times I$.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} A \times I & \longrightarrow & \mathbb{K}, \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t). \end{array} \right.$$

On suppose que les trois hypothèses suivantes sont vérifiées.

1. Pour tout $t \in I$, on a $f(x,t) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell(t)$,
2. Pour tout $x \in A$, les fonction $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I,
3. Hypothèse de domination : Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ intégrable sur I telle que

$$\forall (x,t) \in A \times I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t).$$

Alors, la fonction ℓ est intégrable sur I et on a : $\displaystyle\int_I f(x,t)dt \underset{x \to a}{\longrightarrow} \int_I \ell(t)dt$.

Remarque : cette limite s'écrit aussi $\displaystyle\lim_{x \to a} \int_I f(x,t)dt = \int_I \underbrace{\left(\lim_{x \to a} f(x,t)\right)}_{=\ell(t)} dt$.

10.6.2 Théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions

Proposition 14 (Théorème de Convergence Dominée)

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées.

- $f_n \underset{n \to +\infty}{\overset{\text{CS sur } I}{\longrightarrow}} f$
- les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur I
- Hypohèse de domination : il existe $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ intégrable sur I telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I, \qquad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$$

Alors, les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et l'on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_I f_n(t)dt = \int_I \underbrace{\lim_{n \to +\infty} f_n(t)}_{=f(t)} dt$.

Exercice de colle (E1)

Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt$.

Exercice de colle (E2)

Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$.

10.6.3 Théorème de convergence dominée pour les séries de fonctions

Proposition 15 (Théorème de Convergence Dominée pour les séries de fonctions)

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées.

- $\sum f_n$ CS sur I (on note S sa somme)
- les fonctions f_n et S sont continues par morceaux sur I
- Hypohèse de domination : il existe $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue intégrable sur I telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I, \qquad \left|\sum_{k=0}^{n} f_k(t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

Alors, les fonctions f_n et S sont intégrables sur I, la série de terme général $\int_I f_n(t)dt$ converge et l'on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt.$$

Exercice de colle (E2)

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \cos^n(\pi + t)dt$.

10.6.4 Théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions

Proposition 16 (Intégration terme à terme)

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées.

- $\sum f_n$ CS sur I et sa somme S est continue par morceaux sur I
- les fonctions f_n sont **intégrables** sur I
- $\sum \left(\int_I |f_n(t)| dt \right)$ converge

Alors, S est intégrable sur I, la série $\sum \int_I f_n(t) dt$ converge et l'on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)}_{=S(t)} dt$.

Exercice de colle (E2)

Démontrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t} dt$.

10.7 Annexe : Théorème des moments (Hors-programme)

On admet le théorème suivant.

Proposition 17 (Théorème de Weierstrass)

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique.
Si f est continue sur $[a, b]$, alors il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant **uniformément** vers f sur $[a, b]$.

Preuve. Voir par exemple Mines-Ponts Maths 2 PSI 2019 (partie II)

□

Exercice de colle (Théorème des moments - E3)

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 t^n f(t)dt = 0.$$

En admettant le théorème de Weierstrass, démontrer que f est la fonction nulle sur $[0, 1]$.