Sujet 9 - Correction

Mélange de sujets autour des matrices stochastiques

Préliminaire :

1. Le produit matriciel donne l'égalité $AX = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{n,j} \end{pmatrix}$.

   On a donc, de manière immédiate $\boxed{AX = X \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.}$

2. Si $A \in \mathcal{S}_n$ alors d'après la propreté (2) et l'équivalence précédente, $AX = X$ avec $X \neq 0$ défini précédemment. Ainsi, par définition, $\boxed{1 \text{ est valeur propre de } A.}$

3. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n$.

   • On a, avec le vecteur X défini en 1, $AX = X$ et $BX = X$. Ainsi :

   $$(AB)X = A(BX) = AX = X.$$

   Et donc, AB vérifie la propriété (2).

   • D'autre part, si on note $A = [a_{i,j}]_{i,j=1,\ldots,n}$ et $B = [b_{i,j}]_{i,j=1,\ldots,n}$ alors les coefficients de AB sont les $c_{i,j}$ définis par

   $$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

   Et comme les coefficients de A et de B sont des réels positifs, il en est de même pour ceux de AB. Et donc, AB vérifie la propriété (1).

   Finalement, AB est un élément de $\mathcal{S}_n$ et $\boxed{\mathcal{S}_n \text{ est stable par le produit matriciel.}}$

4. Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{S}_n$ et λ_1, λ_2 sont des réels positifs vérifiant $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

   • Une combinaison linéaire à coefficients positifs de réels positifs est un réel positif, donc $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ vérifie la propriété (1).

   • D'autre part, avec le vecteur X défini en 1, on a $A_1 X = X$ et $A_2 X = X$. Ainsi :

   $$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)X = \lambda_1 A_1 X + \lambda_2 A_2 X = \lambda_1 X + \lambda_2 X = (\lambda_1 + \lambda_2)X = X.$$

   Et donc, $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ vérifie la propriété (2).

   Finalement, $\boxed{\text{si } A_1, A_2 \in \mathcal{S}_n \text{ et si } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+ \text{ vérifient } \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \text{ alors } \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \text{ est dans } \mathcal{S}_n.}$

Partie I : exemples en dimensions 2 et 3

1. (a) On note $A = [a_{i,j}]_{i,j=1,2}$ et on pose $a = a_{1,1}$ et $b = a_{2,2}$. Puisque A est stochastique, on a

   — $a \geq 0$ et $b \geq 0$,
   — $a_{1,2} = 1 - a \geq 0$ et $a_{2,1} = 1 - b \geq 0$.

   Et donc, $\boxed{\text{on a trouvé des réels } a, b \in [0,1] \text{ tels que } A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}.}$

   (b) • Si $(a, b) = (1, 1)$, alors $A = I_2$ et donc $\forall p \in \mathbb{N},\ A^p = I_2$.

   • Si $(a, b) = (0, 0)$ alors $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^2 = I_2$.
   On a donc, $A^p = A$ si n est impair et $A^p = I_2$ si n est pair.
   En particulier, dans ce cas, la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ diverge.

   (c) On suppose désormais que $(a, b) \neq (1, 1)$ et que $(a, b) \neq (0, 0)$.

   i. **Méthode 1 :** Le polynôme caractéristique de A est

   $$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - (a + b)\lambda + (a + b - 1) = (X - 1)(X - (a + b - 1)).$$

   D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $P(A) = 0$.

   Méthode 2 : par le calcul.

   $$(A - I_2)(A - (a + b - 1)I_2) = \begin{pmatrix} a-1 & 1-a \\ 1-b & b-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b+1 & 1-a \\ 1-b & -a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   On a donc $\boxed{P(A) = 0.}$

   ii. Par définition de la division euclidienne, il existe des réels, $\alpha(a, b)$ et $\beta(a, b)$ êt un polynôme $Q(X)$ tels que

   $$X^p = Q(X)P(X) + \alpha(a, b)X + \beta(a, b).$$

   Puisque $a, b \in [0, 1]$ et $(a, b) \neq (1, 1)$ on a $a + b - 1 \neq 1$. Et donc, en évaluant en $X = 1$ et en $X = a + b - 1$ dans l'égalité précédente, on trouve

   $$\begin{array}{rcl} 1 & = & \alpha(a, b) + \beta(a, b) \\ (a + b - 1)^p & = & \alpha(a, b)(a + b - 1) + \beta(a, b) \end{array}.$$

   Il s'agit d'un système de Cramer dont la solution est donnée par

   $$\alpha(a, b) = \frac{(a + b - 1)^p - 1}{a + b - 2} \qquad \text{et} \qquad \beta(a, b)) = -\frac{(a + b - 1)^p - (a + b - 1)}{a + b - 2}.$$

   Par conséquent, le reste de la division euclidienne de X^p par P est

   $$\boxed{R(X) = \frac{1}{a + b - 2}\Big(((a + b - 1)^p - 1)X - (a + b - 1)^p + (a + b - 1)\Big).}$$

   iii. On a donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

   $$A^p = Q(A)P(A) + \frac{1}{a + b - 2}\Big(((a + b - 1)^p - 1)A - ((a + b - 1)^p - (a + b - 1))I_2\Big).$$

   Or, on a vu que $P(A) = 0$ donc

   $$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^p = \frac{1}{a + b - 2}\Big(((a + b - 1)^p - 1)A - ((a + b - 1)^p - (a + b - 1))I_2\Big).}$$

On peut écrire $A^p = \dfrac{(a+b-1)^p}{a+b-2}\begin{pmatrix} a-1 & 1-a \\ 1-b & b-1 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{a+b-2}\begin{pmatrix} b-1 & a-1 \\ b-1 & a-1 \end{pmatrix}$.

iv. Puisque $a, b \in [0,1]$ alors $a+b-1 \in [-1,1]$ et comme $(a,b) \neq (0,0)$ et $(a,b) \neq (1,1)$, on a même $a+b-1 \in]-1,1[$. Ainsi, $\lim\limits_{p\to+\infty} (a+b-1)^p = 0$. En passant à la limite dans l'égalité précédente, on trouve

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} A^p = \frac{1}{a+b-2}(-A+(a+b-1)I_2) = \frac{1}{a+b-2}\begin{pmatrix} b-1 & a-1 \\ b-1 & a-1 \end{pmatrix}.}$$

2. Un exemple où $n=3$: Soit $\alpha \in [0,1[$. On définit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}$.

(a) $1-\alpha$ et α sont des réels positifs et $1+0+0 = (1-\alpha)+\alpha+0 = 0+(1-\alpha)+\alpha = 1$. Donc

$$\boxed{M \text{ est une matrice stochastique.}}$$

(b) M est triangulaire, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi, $\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{1, \alpha\}.}$ On remarque que $\alpha \neq 1$ et que leurs multiplicités sont $m_1 = 1$ et $m_\alpha = 2$.

Sous-espace propre associé à 1 : Soit $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} X \in E_1(M) &\iff MX = X \\ &\iff \begin{cases} (1-\alpha)x + (\alpha-1)y = 0 \\ (1-\alpha)y + (\alpha-1)z = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y = z \qquad \text{car } \alpha \neq 1 \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{E_1(M) = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}.}$

Sous-espace propre associé à α :

La matrice $M - \alpha I_3 = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2, son noyau est une droite vectorielle qui contient $(0,0,1)$. On a donc $\boxed{E_\alpha(M) = \mathrm{Vect}\{(0,0,1)\}.}$

On a $\dim(E_1(M)) + \dim(E_\alpha(M)) = 1+1 < 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc $\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

(c) Une base de $\mathrm{Ker}(M - I_3)$ est $X_1 = (1,1,1)$. De plus, $M - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-\alpha & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & \alpha-1 \end{pmatrix}$ est de rang deux et son image est engendrée par ses vecteurs colonnes. En divisant par $\alpha - 1$, on trouve que (X_2, X_3) est une base de $\mathrm{Im}(M - I_3)$ avec $X_2 = (0,1,0)$ et $X_3 = (0,0,1)$. Or

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

donc la famille concaténée (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Et par conséquent,

$$\boxed{\mathrm{Ker}(M - I_3) \text{ et } \mathrm{Im}(M - I_3) \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{C}^3.}$$

(d) Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
On sait qu'il existe un unique $Y \in \mathrm{Ker}(M - I_3)$ et un unique $Z \in \mathrm{Im}(M - I_3)$ tels que $X = Y + Z$.

$$X = (x, y, z) = \delta(1, 1, 1) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1)$$

est obtenu pour $\delta = x, \beta = y - x$ et $\gamma = z - x$. Ainsi, $Y = (x, x, x)$ et la matrice dans la base $\mathcal{B}$, de la projection sur $\mathrm{Ker}(M - I_3)$ dans la direction de $\mathrm{Im}(M - I_3)$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(e) On pose $Y_1 = (1, 1, 1), Y_2 = (0, 0, 1)$. On cherche $Y_3 = (x, y, z)$ tel que $MY_3 = (1 - \alpha)Y_2 + \alpha Y_3$.

$$MY_3 = (1 - \alpha)Y_2 + \alpha Y_3 \iff \begin{cases} (1 - \alpha)x = 0 \\ (1 - \alpha)y = 1 - \alpha \end{cases}$$

$$\iff x = 0 \text{ et } y = 1 \qquad \text{car } \alpha \neq 1$$

Prenons par exemple $Y_3 = (0, 1, 0)$. On d'efinit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\det(P) = -1$ et par choix de Y_1, Y_2, Y_3, on a

$$\boxed{P^{-1}MP = T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 - \alpha \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}}.$$

(f) On pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a donc :

- $T = D + N$
- $N^2 = 0$ et donc pour tout entier $k \geq 2$, on a $N^k = 0$.
- $ND = ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(1 - \alpha) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha N$ et par récurrence $ND^k = \alpha^k N$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- La matrice D est diagonale et donc pour tout entier k on a $D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^k & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^k \end{pmatrix}$.

On peut donc utiliser la formule du binôme de Newton. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$T^p = (D + N)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} D^{p-k} N^k = \sum_{k=0}^{1} \binom{p}{k} D^{p-k} N^k = D^p + pD^{p-1}N$$

Cette égalité est encore valable pour $p = 0$. On a donc $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \qquad T^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^p & p\alpha^{p-1}(1 - \alpha) \\ 0 & 0 & \alpha^p \end{pmatrix}}$.

Or $\alpha \in [0, 1[$ donc $\lim\limits_{p \to +\infty} \alpha^p = \lim\limits_{p \to +\infty} p\alpha^{p-1}(1 - \alpha) = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{p \to +\infty} T^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

(g) On a $M = PTP^{-1}$ et par récurrence, on montrerait que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $M^p = PT^pP^{-1}$. Or l'application $M \longmapsto PMP^{-1}$ est linéaire sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie donc elle est continue. En particulier, on a :

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} M^p = P(\lim_{p\to+\infty} T^p)P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

où on a utilisé $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie II : exemples de matrices stochastiques symétriques

1. (a) On a $M \in E \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, M = aI_3 + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=W}$ et $\{I_3, W\}$ est clairement libre.

Donc, par définition, $\boxed{E = \text{Vect}\{I_3, W\} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ de dimension } 2.}$

(b) On a $U = \frac{1}{3}M(1,1) \in E$ et $V = I_3 - U \in E$. Les matrices U et V ne sont pas proportionnelles donc elles forment une famille libre de E.

$$\text{card}(U,V) = 2 = \dim(E),$$

donc $\boxed{(U,V) \text{ est une base de } E.}$

On a facilement $M(a,b) = 3bU + (a-b)I_3 = 3bU + (a-b)(V+U) = (a+2b)U + (a-b)V$.

(c) Le calcul donne $\boxed{U^2 = U,\ V^2 = I_3 - 2U + U^2 = V,\ UV = U - U^2 = 0 \text{ et } VU = 0.}$

(d) Les matrices U et V commutent donc d'après la formule du binôme de Newton, pour tout entier $p \geq 2$ on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} M(a,b)^p &= \Big((a+2b)U + (a-b)V\Big)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}(a+2b)^k(a-b)^{p-k}U^kV^{p-k} \\ &= (a+2b)^pU^p + \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}(a+2b)^k(a-b)^{p-k}\underbrace{U^kV^{p-k}}_{=0} + (a-b)^pV^p \end{aligned}$$

Or, par une récurrence simple, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $U^p = U$ et $V^p = V$. Donc :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad M(a,b)^p = (a+2b)^pU + (a-b)^pV.}$$

On l'a démontré pour $p \geq 2$, mais c'est aussi valable pour $p = 0$ ou 1.

(e) On a de manière immédiate $\boxed{M(a,b) \in \mathcal{S}_3 \iff a, b \in \mathbb{R}^+ \text{ et } a + 2b = 1.}$

(f) On suppose cette condition vérifiée. On a donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $M(a,b)^p = U + (a-b)^pV$.

- Si $b = 0$ alors $a = 1$ et $M(1,0)^p = I_3^p = I_3 \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} I_3$.
- Si $b \neq 0$ alors d'une part, $a - b = (1-2b) - b = 1 - 3b < 1$ et d'autre part

$$a - b = a - \frac{1-a}{2} = \frac{a-1}{2} \geq -\frac{1}{2} > -1.$$

Donc $a-b \in]-1,1[$ et par suite $\lim\limits_{p\to+\infty}(a-b)^p = 0$ puis $\lim\limits_{p\to+\infty} M(a,b)^p = U$.

Par conséquent, $\boxed{\lim\limits_{p\to+\infty} M(1,0)^p = I_3 \text{ et si } b\neq 0,\ \lim\limits_{p\to+\infty} M(a,b)^p = U.}$

2. (a) De manière immédiate, $N+\dfrac{1}{n-1}I_n$ est de rang $1<n$ donc

$$\boxed{N+\frac{1}{n-1}I_n \text{ n'est pas inversible : } a_n = -\frac{1}{n-1}\neq 1 \text{ convient.}}$$

Et par la formule du rang, on a $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(N-a_nI_n)) = n-1.}$

(b) On a clairement $N\in\mathcal{S}_n$ et d'après le préliminaire $X=(1,\dots,1)$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1 donc $\dim(\mathrm{Ker}(N-I_n))\geq 1$. De plus, d'après la question 2(a), a_n est valeur propre de la matrice N de multiplicité au moins $\dim(\mathrm{Ker}(N-a_nI_n)) = n-1$. Or $\sum\limits_{\lambda\in Sp(N)} m_\lambda(N) = n$ donc

$$\dim(\mathrm{Ker}(N-I_n))\leq m_1(N)\leq n-m_{a_n}(N)\leq 1.$$

Finalement, $\dim(\mathrm{Ker}(N-I_n)) = 1$ et $\boxed{X=(1,\dots,1) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(N-I_n).}$

(c) Les sous-espaces propres $E_1(N)$ et $E_{a_n}(N)$ sont en somme directe (car $a_n\neq 1$) et comme la somme de leurs dimensions vaut $1+(n-1)=n=\dim(\mathbb{C}^n)$ ils sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^n$:

$$E = E_1(N)\oplus E_{a_n}(N).$$

N n'a donc pas d'autre valeur propre, elle est diagonalisable et $Sp(N)=\left\{1,-\dfrac{1}{n-1}\right\}$ avec

$$\boxed{E_1(N) = \mathrm{Vect}\{(1,\dots,1)\} \ \text{ et } \ E_{a_n}(N) = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n,\ x_1+\cdots+x_n = 0\}.}$$

(d) Soit $X\in\mathrm{Ker}(N-a_nI_n)$. On a donc $NX = a_nX$ et donc $(a_n-1)X = (N-I_n)X\in\mathrm{Im}(N-I_n)$ et comme $a_n-1\neq 0$ on a aussi $X\in\mathrm{Im}(N-I_n)$. Par conséquent :

$$\mathrm{Im}(N-I_n)\subset\mathrm{Ker}(N-a_nI_n).$$

Par la formule du rang et la somme directe de 2(c), on a $\dim(\mathrm{Im}(N-I_n)) = \dim(\mathrm{Ker}(N-a_nI_n)) = n-1$. Donc

$$\boxed{\mathrm{Im}(N-I_n) = \mathrm{Ker}(N-a_nI_n) = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n,\ x_1+\cdots+x_n=0\}.}$$

(e) D'après ce qui précéde, $\mathrm{Im}(N-I_n)$ et $\mathrm{Ker}(N-I_n)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^n$ et donc pour tout $X=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n$, il existe un unique $Y\in\mathrm{Ker}(N-I_n)$ et un unique $Z\in\mathrm{Im}(N-I_n)$ tels que

$$X = Y+Z.$$

Il existe $\alpha\in\mathbb{C}$ tel que $Y=\alpha(1,\dots,1)$ et puisque $Z = X-Y = (x_1-\alpha,\dots,x_n-\alpha)\in\mathrm{Im}(N-I_n)$, on a

$$\sum_{i=1}^n x_i - n\alpha = 0.$$

On obtient la valeur de α et $Y = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n x_i$. Par conséquent, la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de de la projection sur $\mathrm{Ker}(N-I_n)$ dans la direction de $\mathrm{Im}(N-I_n)$ est

$$\boxed{J = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1\\ \vdots & 1 & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}.}$$

D'autre part, puisque $Z = X - Y$, la matrice de la projection sur $\mathrm{Im}(N - I_n)$ dans la direction de $\mathrm{Ker}(N - I_n)$ est

$$\boxed{K = I_n - J = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \ddots & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & n-1 & -1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix}.}$$

(f) On a clairement $(n-1)N + I_n = nJ$ et donc $(n-1)N = nJ - I_n = nJ - (J+K)$.

Il vient $\boxed{N = J - \frac{1}{n-1}K.}$

On facilement $J^2 = J$, $K^2 = I_n - 2J + J^2 = K$ et $JK = KJ = J - J^2 = 0$. La formule du binôme de Newton donne pour tout entier $p \geq 2$:

$$\begin{aligned} N^p &= \left(J - \frac{1}{n-1}K\right)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \left(-\frac{1}{n-1}\right)^{p-k} J^k K^{p-k} \\ &= J^p + \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \left(-\frac{1}{n-1}\right)^{p-k} \underbrace{J^k K^{p-k}}_{=0} + \left(-\frac{1}{n-1}\right)^p K^p \end{aligned}$$

Or, par une récurrence simple, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $J^p = J$ et $K^p = K$. Donc :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad N^p = J + \frac{(-1)^p}{(n-1)^p}V.}$$

On l'a démontré pour $p \geq 2$, mais c'est aussi valable pour $p = 1$. Le cas $p = 0$ est $N^0 = I_n$.

(g) Puisque $\left|\frac{(-1)^p}{(n-1)^p}\right| < 1$, on a $\lim_{p\to+\infty} \frac{(-1)^p}{(n-1)^p} = 0$ et $\boxed{\lim_{p\to+\infty} N^p = J.}$

Partie III : étude du cas général

1. Etude des éléments propres de A :

(a) Soit $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. On note $A = [a_{i,j}]_{i,j=1,\ldots,n}$. Alors $\|AX\| = \max_{i=1,\ldots,n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right|$.

Or, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, puisque $a_{i,j} \geq 0$, on a

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j| \leq \|X\| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \|X\|.$$

On a donc bien $\boxed{\text{pour tout } X \in \mathbb{C}^n, \text{ on a } \|AX\| \leq \|X\|.}$

Soit λ une valeur propre de A. Par définition, il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. D'après le point précédent, $\|AX\| \leq \|X\|$ et donc $\|\lambda X\| = |\lambda|.\|X\| \leq \|X\|$. Et puisque X est non nul, on a $\|X\| > 0$, par conséquent

$$\boxed{\text{Si } \lambda \in \mathbb{C} \text{ est valeur propre de } A, \text{ alors } |\lambda| \leq 1.}$$

(b) Soit Y un élément de $\text{Ker}(A - I_n)$ pour lequel il existe $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $Y = AX - X$.

   i. $Y \in \text{Ker}(A - I_n)$ donc $AY = Y$ et même $A^k Y = Y$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k Y = Y = A^{k+1}X - A^k X$. On ajoute ces égalités pour $k = 0, \ldots, p$. On obtient :

$$(p+1)Y = \sum_{k=0}^{p} \left(A^{k+1}X - A^k X\right) = A^{p+1}X - X.$$

   Et donc, quitte à changer p en $p-1$, on obtient $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ A^p X = pY + X.}$ Ce résultat est encore valide en $p = 0$ puisque $A^0 X = I_n X = X$.

   ii. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\|A^p X\| = \|A.A^{p-1}X\| \le \|A^{p-1}X\| \le \cdots \le \|AX\| \le \|X\|$. Et donc

$$\|pY\| = \|A^p X - X\| \le \|A^p X\| + \|X\| \le \|X\| + \|X\|.$$

   On a donc bien $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ p\|Y\| \le 2\|X\|.}$ Si on avait $Y \neq 0$ alors en faisant tendre p vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, on obtiendrait une contradiction. Donc $\boxed{Y = 0.}$

(c) Soit $Y \in \text{Ker}(A - I_n) \cap \text{Im}(A - I_n)$.
Alors Y est dans $\text{Ker}(A - I_n)$ et il existe $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $Y = AX - X$. D'après les questions précédentes, $Y = 0$ et donc

$$\text{Ker}(A - I_n) \cap \text{Im}(A - I_n) = \{0\}.$$

De plus, par la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(A - I_n)) + \dim(\text{Im}(A - I_n)) = n = \dim(\mathbb{C}^n)$ donc

$$\boxed{\text{Ker}(A - I_n) \oplus \text{Im}(A - I_n) = \mathbb{C}^n.}$$

(d) Soit $\lambda \neq 1$ une valeur propre de A. Pour tout $X \in E_\lambda(A)$ on a $AX = \lambda X$ et donc

$$AX - X = \lambda X - X = (\lambda - 1)X \in \text{Im}(A - I_n)$$

et comme $\lambda - 1 \neq 0$, on a aussi $X \in \text{Im}(A - I_n)$. On a donc démontré que

$$\boxed{\text{Tout sous-espace propre de } A \text{ associé à une valeur propre } \lambda \neq 1 \text{ est inclus dans } \text{Im}(A - I_n).}$$

2. Etude de la convergence de la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$:

(a) On suppose, dans cette question, que la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice B.

   i. La suite extraite $(A^{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers B.
   En passant à la limite dans l'égalité $A^p \times A^p = A^{2p}$, on obtient $\boxed{B^2 = B.}$

   ii. Soit λ une valeur propre de A. Par définition, il existe $X \neq 0$ tel que $AX = X$. Par récurrence, on montrerait facilement que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p X = \lambda^p X$. Or $\lim\limits_{p \to +\infty} A^p = B$ donc $\lim\limits_{p \to +\infty} A^p X = \lim\limits_{p \to +\infty} \lambda^p X = BX$. Ainsi nécessairement la suite complexe $(\lambda^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge.
   Si $\lambda < 1$ on sait déjà qu'elle converge vers 0.
   Si $|\lambda| = 1$ alors la suite $(\lambda^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\lambda = 1$.

   En effet : la suite $(\lambda^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum(\lambda^{p+1} - \lambda^p) = \sum \lambda^p(\lambda - 1)$ converge et comme la série géométrique $\sum \lambda^p$ diverge ($|\lambda| = 1$) on a $\sum \lambda^p(\lambda - 1)$ converge si et seulement si $\lambda - 1 = 0$.

(b) On suppose que A est diagonalisable. On note $\lambda_1 = 1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ les valeurs propres de A.

i. On pose $F = \bigoplus_{k=2}^{q} E_{\lambda_i}(A)$. On a montré dans III.1(d) que tout sous-espace propre de A associé à une valeur propre $\lambda \neq 1$ est inclus dans $\mathrm{Im}(A - I_n)$ donc leur somme l'est également. Ainsi

$$F \subset \mathrm{Im}(A - I_n).$$

De plus, A est diagonalisable donc $\mathbb{C}^n = E_1(A) \oplus F$. Et donc

$$\dim(F) = n - \dim(E_1(A)) = n - \dim(\mathrm{Ker}(A - I_n)) = \dim(\mathrm{Im}(A - I_n)).$$

Et finalement, $\boxed{\mathrm{Im}(A - I_n) = F = \bigoplus_{k=2}^{q} E_{\lambda_i}(A).}$

ii. On a vu en 2(a)i que si la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge alors 1 est la seule valeur propre de A dont le module est égal à 1.

Réciproquement, si 1 est la seule valeur propre de A dont le module est égal à 1. Alors, avec les notations précédentes $|\lambda_2| < 1, \dots, |\lambda_q| < 1$. Et donc pour toute valeur propre λ de A, la suite géométrique $(\lambda^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge.
La matrice A est diagonalisable donc elle est semblable à une matrice diagonale D dont les coefficients diagonaux sont des valeurs propres de A. Ainsi, la suite $(D^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge. En écrivant $A = PDP^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$ on obtient $A^p = PD^pP^{-1}$ donc la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge aussi. Finalement :

La suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si 1 est la seule valeur propre de A dont le module est égal à 1.

iii. On suppose que cette condition est vérifiée et on note B la limite de la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$.
D'après la question 2(a)i, on a $B^2 = B$ et donc B est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{C}^n$.

Avec les notations précédentes, $\mathbb{C}^n = E_1(A) \oplus F$. Et donc, pour tout $X \in \mathbb{C}^n$, il existe un unique $Y \in E_1(A)$ et un unique $Z \in F$ tel que $X = Y + Z$.
On a $AY = Y$ et donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^pY = Y$.
De plus, si λ est une autre valeur propre que 1 et si Z_0 en est un vecteur propre associé, alors $|\lambda| < 1$ et donc $A^pZ_0 = \lambda^pZ_0 \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par combinaison linéaire, on a aussi $A^pZ \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
En passant à la limite quand p tend vers $+\infty$ dans $A^pX = A^pY + A^pZ$, on obtient $BX = Y$. Ainsi, par définition,

B est la matrice de la projection sur $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ dans la direction de F =$\mathrm{Im}(A - I_n)$.

à partir d'un corrigé de C. Devulder

IV - Spectre des matrices stochastiques

Coefficients

1. Si A est stochastique, les coefficients d'une ligne sont positifs et de somme plus petite que 1. Ils sont donc tous plus petits que 1 et finalement tous dans $[0, 1]$.
Si A est strictement stochastique, elle est stochastique à coefficients non nuls et ses coefficients sont donc tous dans $]0, 1]$. Si, par l'absurde, on avait $a_{i,j} = 1$, comme il y a au moins deux coefficients sur la ligne i et qu'ils sont > 0, la somme sur la ligne i serait > 1 ce qui est contradictoire avec le caractère stochastique. Ainsi, les coefficients sont tous dans $]0, 1[$.

2. Soit A une matrice à coefficients positifs.

   Elle est donc stochastique si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. Or,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ (Ae)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} e_j = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$$

   et la condition devient $Ae = e$ c'est à dire que e est propre pour A associé à 1 (c'est une CNS).

3. Soient A, B deux matrices de taille n et $C = AB$. On a

$$\forall i, j,\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

   Si A et B sont à coefficients positifs, il en est de même pour C.
   Si A et B sont à coefficients strictement positifs, il en est de même pour C.
   Méthode 1 : Enfin, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a

$$\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \left(a_{i,k} \sum_{j=1}^{n} b_{k,j} \right)$$

   Si A et B sont stochastiques, $\sum_{j=1}^{n} b_{k,j} = 1$ pour tout k et la somme ci-dessus vaut $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = 1$. C est donc stochastique.

   Méthode 2 :

   On pouvait aussi utiliser la question précédente, puisque si $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, alors

$$AB \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Conclusion : On a donc prouvé que les caractères stochastique et strictement stochastique sont conservés par produit.

Valeurs propres

1. Soit A une matrice stochastique et $x \in \mathbb{C}^n$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a

$$|(Ax)_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} |x_j| \leq \|x\|_\infty \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \|x\|_\infty$$

   et on en déduit (en prenant pour i l'indice correspondant à l'élément maximal) que

$$\|Ax\|_\infty \leq \|x\|_\infty$$

   Comme A^p est aussi stochastique (question 10) on a aussi

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \|A^p x\|_\infty \leq \|x\|_\infty.}$$

2. Soit λ une valeur propre complexe de A et x un vecteur propre associé. On a $Ax = \lambda x$ et, avec la question précédente

$$|\lambda|\|x\|_\infty = \|\lambda x\|_\infty = \|Ax\|_\infty \leq \|x\|_\infty$$

Comme $\|x\|_\infty > 0$ (x est vecteur propre et donc non nul) on en déduit que $|\lambda| \leq 1$. Ceci étant vrai pour toute valeur propre, $\rho(A) \leq 1$. De plus, 1 est une valeur propre de A (car A est stochastique) et cette inégalié est une égalité (on a un maximum) :

$$\boxed{\rho(A) = 1.}$$

Diagonale strictement dominante

1. Soit λ une valeur propre de A et x un vecteur propre associé. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|x_i|$ soit maximal (un nombre fini non nul de réels admet un maximum). On a alors $|x_i| > 0$ (car x, vecteur propre, est non nul) et comme $(Ax)_i = \lambda x_i$ (c'est la $i$ème ligne de $Ax = \lambda x$), on a

$$(\lambda - a_{i,i})x_i = \sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j$$

Par inégalité triangulaire (les $a_{k,j}$ sont positifs), on en déduit que

$$|\lambda - a_{i,i}| \cdot |x_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}||x_j| \leq |x_i| \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

Comme $|x_i| > 0$ on peut conclure que

$$\boxed{|\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.}$$

2. Si, par l'absurde, A n'était pas inversible, $\lambda = 0$ serait valeur propre, on aurait (avec la question précédente)

$$|a_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

ce qui contredit le caractère strictement dominant de la diagonale.
Ainsi, $\boxed{\text{toute matrice à diagonale strictement dominante est inversible.}}$

Valeur propre de module maximal

1. Posons $B = A_1 - I_{n-1}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on a

$$|b_{i,i}| = |a_{i,i} - 1| = 1 - a_{i,i} = \sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n}} a_{i,j} = \sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n-1}} b_{i,j} + a_{i,n} > \sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq n-1}} b_{i,j}$$

B est donc a diagonale dominante. On en déduit que B est inversible. Ses $n-1$ lignes sont donc indépendantes et c'est a fortiori vrai de celle de $A - I_n$. On a donc

$$\boxed{\text{rg}(A - I_n) \geq n - 1.}$$

2. $\ker(A - I_n)$ est ainsi (théorème du rang) au plus de dimension 1.
Comme il est non réduit à $\{0\}$ (1 est valeur propre d'une matrice stochastique) c'est que

$$\boxed{\dim(\ker(A - I_n)) = 1.}$$

3. Soit λ une valeur propre de A. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $|x_i|$ soit maximal. Avec la question 13 et l'inégalité triangulaire, on a :
$$|\lambda| - a_{i,i} = |\lambda| - |a_{i,i}| \leq |\lambda - a_{i,i}| \underset{\text{Q13}}{\leq} \sum_{j \neq i} a_{i,j}$$
On raisonne par l'absurde. Si $|\lambda| = 1$, les deux membres extrêmes sont égaux, cette inégalité est une égalité. On doit donc avoir égalité dans toutes les étapes et en particulier
$$|\lambda - a_{i,i}| + a_{i,i} = |\lambda|.$$
Méthode 1 : On écrit $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ puisque $|\lambda| = 1$. On a donc
$$(\alpha - a_{i,i})^2 + \beta^2 = \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - a_{i,i}\right)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + a_{i,i}^2 - 2a_{i,i}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$
Après simplifications, il reste $a_{i,i}\alpha = a_{i,i}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ et comme $a_{i,i} \neq 0$ on obtient $\alpha = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ et donc $\alpha^2 = \alpha^2 + \beta^2$ ce qui n'est possible que lorsque $\beta = 0$.
Ainsi $\alpha = \sqrt{\alpha^2} \geq 0$ et comme $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, on trouve $\lambda = \alpha = 1$ ce qui est exclu !
Méthode 2 : C'est un cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire (Minkovski si l'on considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace euclidien de dimension 2) donc $\lambda - a_{i,i}$ et $a_{i,i}$ ont même argument. Comme $a_{i,i}$ est un réel > 0, ceci impose que $\lambda - a_{i,i}$ soit un réel > 0 et donc que λ soit un réel > 0. Comme $|\lambda| = 1$, ceci donne $\lambda = 1$. 1 est donc l'unique valeur propre de module 1 et
$$\boxed{\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{1\},\ |\lambda| < 1.}$$

V - Probabilité invariante

Une suite de variables aléatoires

1. Par formule des probabilités totales avec le système complet $((X_0 = i))_{1 \leq i \leq 4}$, on a
$$\mathbb{P}(X_1 = j) = \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}_{X_0=i}(X_1 = j)\mathbb{P}(X_0 = j)$$
$\mathbb{P}_{X_0=i}(X_1 = j)$ vaut 1/10 si $i = j$ et 3/10 sinon. On a donc $\boxed{P_1 = QP_0 \quad \text{avec} \quad Q = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}}$.
Une récurrence immédiate donne alors $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = Q^n P_0.}$
2. Si Π convient, c'est un vecteur propre pour Q associé à la valeur propre 1. Comme Q est strictement stochastique, la partie précédente montre que le sous-espace propre est de dimension 1 et même engendré par $(1, 1, 1, 1)$. La condition sur la somme des coordonnées de Π impose
$$\Pi = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \forall i,\ p_i = \frac{1}{4}$$
Réciproquement, ce vecteur convient.

Rapidité de convergence

1. Q est symétrique réelle donc diagonalisable (et par le biais d'une matrice orthogonale).

2. On sait déjà que 1 est valeur propre de sous espace propre associé $\mathrm{Vect}\{\Pi\}$.

   De plus $Q + \dfrac{2}{10} I_4$ est clairement de rang 1 et $-2/10$ est donc valeur propre de sous-espace propre associé de dimension 3 (théorème du rang). La somme des dimensions des sous-espaces propres valant 4 (Q est diagonalisable), il n'y a pas d'autre valeur propre. De plus, Q étant symétrique réelle, les sous-espaces propres sont supplémentaires orthogonaux. Ainsi

$$\mathrm{Sp}(Q) = \{1, -2/10\}$$

$$E_1(Q) = \mathrm{Vect}\{\Pi\},\ E_{-2/10}(Q) = (\mathrm{Vect}\{\Pi\})^\perp = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

   puisque $(\mathrm{Vect}\{\Pi\})^\perp$ est l'hyperplan d'équation $x + y + z + t = 0$.

3. Notons P la matrice dont la première colonne est $\dfrac{\Pi}{\|\Pi\|} = 2\Pi$ et les suivantes une base orthonormée de $(\mathrm{Vect}\{\Pi\})^\perp$. P est alors une matrice orthogonale qui diagonalise Q et

$$P^{-1}QP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2/10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2/10 \end{pmatrix}$$

   On en déduit que

$$Q^p = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2/10)^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2/10)^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-2/10)^p \end{pmatrix} P^{-1}$$

   Et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2/10)^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2/10)^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-2/10)^p \end{pmatrix} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et puisque $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue (linéaire en dimension finie par exemple), on a :

$$\lim_{p\to+\infty} Q^p = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = R$$

   La première colonne de P est 2Π et on a donc

$$P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 2p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 2p_3 & 0 & 0 & 0 \\ 2p_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   En multipliant par $P^{-1} = P^T$, seule la première ligne de P^{-1} sert et elle vaut $(2p_1, 2p_2, 2p_3, 2p_4)$. On en déduit que

$$R = 4 \begin{pmatrix} p_1^2 & p_1p_2 & p_1p_3 & p_1p_4 \\ p_2p_1 & p_2^2 & p_2p_3 & p_2p_4 \\ p_3p_1 & p_3p_2 & p_3^2 & p_3p_4 \\ p_4p_1 & p_4p_2 & p_4p_3 & p_4^2 \end{pmatrix} = 4\Pi\Pi^T = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour la suite, l'énoncé ne précise aucune norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et il est difficile de savoir à quoi correspond $\|.\|$. Bien sûr, on est en dimension finie et toutes les normes sont équivalentes ce qui rend le choix indifférent. On a

$$Q^p - R = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-2/10)^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2/10)^p 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-2/10)^p \end{pmatrix} P^{-1} = \left(-\frac{2}{10}\right)^p P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

On en déduit que

$$\|Q^p - R\| = \left(\frac{2}{10}\right)^p \left\| P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \right\| = \underset{p\to+\infty}{O} \left(\frac{2}{10}\right)^p$$

puisque $\left\| P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \right\|$ est indépendant de p.

Comme on sait que $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = Q^n P_0$ et comme $M \mapsto MP_0$ est continue, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = RP_0 = 4\Pi\Pi^T P_0$$

Or, $\Pi^T P_0 = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}(X_0 = i) = \dfrac{1}{4}$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P_n = \Pi.}$$

Quand n tend vers $+\infty$ on a autant de chance de se retrouver sur chaque point et cela quelle que soit la position initiale.

IV - Puissances d'une matrice stochastique

1. Soit $j \in \{1, \dots, n\}$;

$$\forall k \in [|1, n|],\ a_{k,j}^{(p+1)} = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} a_{i,j}^{(p)} \leq \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} M_j^{(p)} = M_j^{(p)}$$

En passsant au maximum sur k, on en déduit que

$$M_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p)}$$

De même

$$\forall k \in [|1, n|],\ a_{k,j}^{(p+1)} = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} a_{i,j}^{(p)} \geq \sum_{i=1}^{n} a_{k,i} m_j^{(p)} = m_j^{(p)}$$

En passsant au maximum sur k, on en déduit que

$$m_j^{(p+1)} \geq m_j^{(p)}$$

$m_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p+1)}$ est immédiat (minimum plus petit que maximum). Comme M et toutes ses puissances sont trictement stochastqiues, tous les coefficients sont > 0 et $m_j^{(p)} > 0$. Finalement

$$\boxed{0 < m_j^{(p)} \leq m_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p)}.}$$

2. On note k un indice tel que $a_{k,j}^{(p+1)} = m_j^{(p+1)}$. On a alors

$$\begin{aligned} m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} &= a_{k,j}^{(p+1)} - m_j^{(p)} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{k,i} a_{i,j}^{(p)} - \sum_{i=1}^n a_{k,i} m_j^{(p)} \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{a_{k,i}}_{\geq m} \underbrace{(a_{i,j}^{(p)} - m_j^{(p)})}_{\geq 0} \\ &\geq m \sum_{i=1}^n (a_{i,j}^{(p)} - m_j^{(p)}) \end{aligned}$$

Dans la dernière somme, tous les termes sont ≥ 0 et l'un vaut $M_j^{(p)} - m_j^{(p)}$ et donc

$$m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} \geq m(M_j^{(p)} - m_j^{(p)})$$

De même, On note ℓ un indice tel que $a_{\ell,j}^{(p+1)} = M_j^{(p+1)}$. On a alors

$$\begin{aligned} M_j^{(p)} - M_j^{(p+1)} &= M_j^{(p)} - a_{\ell,j}^{(p+1)} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{\ell,i} M_j^{(p)} - \sum_{i=1}^n a_{\ell,i} a_{i,j}^{(p)} \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{a_{\ell,i}}_{\geq m} \underbrace{(M_j^{(p)} - a_{i,j}^{(p)})}_{\geq 0} \\ &\geq m \sum_{i=1}^n (M_j^{(p)} - a_{i,j}^{(p)}) \end{aligned}$$

Dans la dernière somme, tous les termes sont ≥ 0 et l'un vaut $M_j^{(p)} - m_j^{(p)}$ et donc

$$M_j^{(p)} - M_j^{(p+1)} \geq m(M_j^{(p)} - m_j^{(p)})$$

3. On a tout d'abord

$$\begin{aligned} M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} &= M_j^{(p+1)} - M_j^{(p)} \\ &+ M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \\ &+ m_j^{(p)} - m_j^{(p+1)} \end{aligned}$$

Le premier terme est majoré avec la seconde inégalité de la question précédente. Le troisième est majoré grâce à la première inégalité. On obtient

$$\boxed{M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} \leq (1-2m)(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}).}$$

4. La question 23 montre que $(m_j^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante alors que $(M_j^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ décroît. La question précédente donne par récurrence

$$0 \leq M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \leq (1-2m)^p (M_j^{(0)} - m_j^{(0)})$$

Comme $n \geq 2$, il y a au moins deux coefficients par ligne. Ils sont > 0 et leur somme vaut 1. Ils ne peuvent donc être tous deux $< 1/2$ et l'un est $\geq 1/2$. Ainsi, $m \geq 1/2$. Le seul cas d'égalité est celui où $n = 2$ et où tous les coefficients valent $1/2$.

- Si $n = 2$ et $m = 1/2$ alors $A = A(1/2, 1/2)$. La partie I montre que (A^p) est constante et les suites $(m_j^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(M_j^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ le sont aussi (égales à $1/2$). Elles sont donc adjacentes.
- Sinon $m < 1/2$ et $(1-2m)^p \to 0$. On a donc $M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \to 0$. Les suites sont encore adjacentes.

5. En notant l_j la limite commune à $(M_j^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(m_j^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$, comme $m_j^{(p)} \leq a_{k,j}^{(p)} \leq M_j^{(p)}$ pour tout k, tous les coefficients de la colonne k dans la suite (A^p) tendent vers l_j. (A^p) converge donc vers la matrice L dont toutes les lignes valent $(l_1, \ldots, l_n)$. Comme A^p est stochastique pour tout p, L l'est aussi (passage à la limite dans une suite constante égale à 1).