Sujet 8 - Correction

Centrale MP 2021 maths 2 (partie I)

Un corrigé de C. Devulder

I.A - Polynômes de Tchebychev

1. On montre par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(T_n) = n}$.
   - C'est vrai aux rang 0 et 1.
   - Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n \geq 1$. On a alors $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ qui est somme de deux polynômes de degrés $n+1$ et $n-1$. Comme ces degrés sont différents, T_{n+1} est de degré $\max(n+1, n-1) = n+1$.

   $(T_k)_{0\leq k\leq n}$ étant échelonnée en degré est libre. Elle contient $n+1$ éléments de $\mathbb{C}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$. Ainsi,

$$\boxed{(T_k)_{0\leq k\leq n} \text{ est une base de } \mathbb{C}_n[X]}$$

2. Procédons encore par récurrence.
   - C'est vrai aux rang 0 et 1.
   - Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n \geq 1$. On a alors

$$T_{n+1}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)T_n(\cos(\theta) + T_{n-1}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta)$$

   Comme $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a-b) + \cos(a+b)$, le résultat au rang $n+1$ s'en déduit.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)}$$

3. Comme $\mathcal{S}_n$ est un espace-vectoriel, il suffit de prouver le résultat pour les éléments d'une base de $\mathbb{C}_n[X]$ (et de conclure par combinaisons linéaires). Or, la question précédente prouve l'appartenance pour les éléments de la base $(T_0, \dots, T_n)$. Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ \theta \mapsto P(\cos(\theta)) \in \mathcal{S}_n}$$

4. Quand θ varie dans $\mathbb{R}$, $\cos(\theta)$ décrit tout $[-1,1]$. Ainsi la norme infinie de T_n sur $[-1,1]$ est celle de $\theta \mapsto T_n(\cos(\theta))$ sur $\mathbb{R}$. Celle-ci vaut clairement 1 (puisque $|T_n(\cos(\theta))| = |\cos(n\theta)| \leq 1$ avec égalité si $\theta = 0$).

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \|T_n\|_{L^\infty([-1,1])} = 1}$$

5. Prouvons par récurrence sur n que

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ |\sin(n\theta)| \leq n|\sin(\theta)|$$

   - C'est immédiat au rang 0 .
   - Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n \geq 0$. On a alors, pour tout réel θ,

$$|\sin((n+1)\theta)| \leq |\sin(n\theta)\cos(\theta)| + |\sin(\theta)\cos(n\theta)| \leq |\sin(n\theta)| + |\sin(\theta)| \leq (n+1)|\sin(\theta)|$$

   et le résultat est vrai au rang $n+1$.

Par ailleurs, en dérivant la relation $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$, on obtient

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ -\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta)) = -n\sin(n\theta)$$

En combinant ceci,

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ |\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta))| \leq n^2|\sin(\theta)|$$

On en déduiit que si $\theta \neq 0[\pi]$, $|T_n'(\cos(\theta))| \leq n^2$. Par continuité de $\theta \mapsto T_n'(\cos(\theta))$, ceci reste vrai sur $\mathbb{R}$.
La norme infinie de T_n' sur $[-1,1]$ est donc plus petite que n^2.
En utilisant une expression précédente, on a

$$\forall \theta \in]0,\pi/2],\ |T_n'(\cos(\theta))| = n\frac{|\sin(n\theta)|}{\sin(\theta)} \underset{\theta\to 0^+}{\sim} n\frac{n\theta}{\theta} = n^2$$

et ainsi (continuité) $|T_n'(0)| = n^2$. On a donc $\boxed{\forall n \in\ \mathbb{N},\ \|T_n'\|_{L^\infty([-1,1))} = n^2}$

I.B - Inégalité de Bernstein

6. Par hypothèse, et en notant c le coefficient dominant de A,

$$A = c\prod_{j=1}^{2n}(X-\alpha_j)$$

On en déduit que

$$A' = c\sum_{k=1}^{2n}\prod_{\substack{1\leq j\leq 2n\\ j\neq k}}(X-\alpha_j)$$

et en particulier

$$A'(\alpha_k) = c\prod_{\substack{1\leq j\leq 2n\\ j\neq k}}(\alpha_k-\alpha_j)$$

Posons $L_k = \frac{A(X)}{(X-\alpha_k)A'(\alpha_k)}$. $L_k \in\ \mathbb{C}_{2n-1}[X]$ et on a (immédiat si $j\neq k$ et calcul précédent si $j=k$)

$$L_k(\alpha_j) = \delta_{j,k}$$

En particulier, $B - \sum_{k=1}^{2n} B(\alpha_k)L_k$ est nul en tous les α_j. Quans $B \in\ \mathbb{C}_{2n-1}[X]$, c'est un polynôme de degré $\leq 2n-1$ qui est donc nul (puisqu"il a au moins $2n$ racine).

$$\boxed{\forall B \in \mathbb{C}_{2n-1}[X],\quad B(X) = \sum_{k=1}^{2n} B(\alpha_k)\frac{A(X)}{(X-\alpha_k)A'(\alpha_k)}}$$

On peut aussi utiliser la décomposition en éléments simple de $\frac{B}{A}$, particulièrement aisée puisque les pôles sont simples.

7. On a $P_\lambda(1) = 0$ et donc $\boxed{(X-1) \text{ divise } P_\lambda}$.
8. On fixe $\lambda \in \mathbb{C}$. Les deux membres de l'égalité à prouver étant des expressions linéaires vis à vis de P, il suffit de vérifier la formule pour des P formant une base de $\mathbb{C}_{2n}[X]$, par exemple les X^k. Or,

$$\frac{(\lambda X)^k - \lambda^k}{X-1} = \lambda^k(X^{k-1} + X^{k-2} + \cdots + 1)$$

et la valeur en 1 est $k\lambda^k$, qui est bien $\lambda(k\lambda^{k-1})$.

$$\boxed{\forall \lambda \in\ \mathbb{C},\ Q_\lambda(1) = \lambda P'(\lambda)}$$

9. On remarque tout d'abord que
$$R(\omega_k) = e^{2in\varphi_k} + 1 = 0$$
et ω_k est racine de R. De plus
$$\varphi_k - \varphi_\ell = (k-\ell)\frac{\pi}{n}$$
Si $k, \ell \in [\![1, 2n]\!]$, $-2n < k - \ell < 2n$ et donc $\varphi_k - \varphi_\ell \in]-2\pi, 2\pi[$ n'est nul que si $k = \ell$.
On a ainsi $2n$ racines différentes pour R unitaire de degré $2n$ et donc
$$\boxed{R(X) = \prod_{k=1}^{2n} (X - \omega_k)}$$

10. Si on applique (I.1) avec $A = R$ et $\alpha_k = \omega_k$ (qui sont bien distincts), on obtient, compte-tenu de $R'(\omega_k) = 2n\omega_k^{2n-1} = -\frac{2n}{\omega_k}$ (puisque $\omega_k^{2n} = -1$)
$$B(X) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{B(\omega_k)R(X)}{X - \omega_k}\omega_k$$
Ceci est vrai pour $B \in \mathbb{C}_{2n-1}[X]$ et en particulier pour Q_λ. Comme les ω_k sont différents de 1, l'expression de Q_λ donne alors
$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad Q_\lambda(X) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1}\frac{X^{2n}+1}{X - \omega_k}\omega_k}$$
Appliquons cette formule en $\lambda = 1$. Avec la question 8, on a alors
$$\lambda P'(\lambda) = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \frac{P(\lambda\omega_k) - P(\lambda)}{\omega_k - 1}\frac{2}{1 - \omega_k}\omega_k$$
Il reste à couper la somme en deux pour conclure que
$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k)\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} - \frac{P(\lambda)}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2}}$$

11. (I.2) avec $P = X^{2n}$ donne,
$$2n\lambda^{2n} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\lambda^{2n}\omega_k}{(1-\omega_k)^2} - \frac{\lambda^{2n}}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = -\frac{\lambda^{2n}}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2}$$
On en déduit que
$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = -n$$
ce qui permet, après multiplication par $P(\lambda)$ de réécrire le second terme de (II.2) et de conclure que
$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda P'(\lambda) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} P(\lambda\omega_k)\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} + nP(\lambda)}$$

12. Soit $f \in \mathcal{S}_n$. Il lui est associé une suite $(a_k)_{0\leq k\leq n}$ et une suite $(b_k)_{1\leq k\leq n}$. Avec les formules d'Euler, on a

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikt} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikt} \right) \\ &= e^{-int} \left(a_0 e^{int} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k - ib_k}{2} e^{i(k+n)t} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{i(n-k)kt} \right) \right) \end{aligned}$$

Si on pose

$$U(X) = a_0 X^n + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k - ib_k}{2} X^{k+n} + \frac{a_k + ib_k}{2} X^{n-k} \right)$$

on obtient un élément de $\mathbb{C}_{2n}[X]$ tel que $f(t) = e^{-int} U(e^{it})$.

$$\boxed{\exists U \in \mathbb{C}_{2n}[X],\ \forall \theta \in \mathbb{R}, f(\theta) = \mathrm{e}^{-in\theta} U\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)}$$

13. On a $1 - \omega_k = e^{i\varphi_k/2}(e^{-i\varphi_k/2} - e^{i\varphi_k/2}) = -2ie^{i\varphi_k/2}\sin(\varphi_k/2)$ et ainsi

$$\frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = \frac{2e^{i\varphi_k}}{-4e^{i\varphi_k}\sin(\varphi_k/2)^2} = \frac{-1}{2\sin(\varphi_k/2)^2}$$

Appliquons la question 11 au polynôme U. Avec l'expression ci-dessus, on obtient

$$\lambda U'(\lambda) = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} U\left(\lambda\omega_k\right) \frac{1}{2\sin(\varphi_k/2)^2} + nU(\lambda)$$

En particulier, pour $\lambda = e^{it}$, on obtient (puisque $f'(t) = -inf(t) + ie^{-int}e^{it}U'(e^{it})$)

$$\begin{aligned} -ie^{int}(f'(t) + inf(t)) &= -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} U\left(e^{i(t+\varphi_k)}\right) \frac{1}{2\sin(\varphi_k/2)^2} + nU(e^{it}) \\ &= -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} e^{in(t+\varphi_k)} f(t+\varphi_k) \frac{1}{2\sin(\varphi_k/2)^2} + ne^{int} f(t) \end{aligned}$$

Comme $e^{in\varphi_k} = i(-1)^k$, on conclut que

$$-if'(t) = -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} i(-1)^k f(t+\varphi_k) \frac{1}{2\sin(\varphi_k/2)^2}$$

On a montré que $\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad f'(\theta) = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} f\left(\theta + \varphi_k\right) \frac{(-1)^k}{2\sin\left(\varphi_k/2\right)^2}}$

14. D'après la question 11 avec $P = 1$, on a $\displaystyle\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{2\omega_k}{(1-\omega_k)^2} = -n.$

et avec la question 13, on en déduit que $\displaystyle\frac{1}{2n} \sum \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2\sin\left(\varphi_k/2\right)^2} = n.$

Par inégalité triangulaire à partir de la question 13,

$$|f'(\theta| \leq \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \|f\|_{L^\infty([-1,1])} \frac{1}{2\sin\left(\varphi_k/2\right)^2} = n\|f\|_{L^\infty([-1,1])}$$

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad |f'(\theta)| \leqslant n\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}$$

I.C - Quelques conséquences de l'inégalité (I.4)

15. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Posons $f : t \mapsto P(\cos(t))$. La question 3 nous indique que c'est un élément de $\mathcal{S}_n$ et on peut donc lui appliquer la question 14. Mais on a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = -\sin(t)P'(\cos(t))$$

Si $x \in [-1,1]$, on applique ceci avec $t = \arccos(x)$. Comme $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ (car $\sin(\theta) = \sqrt{1-\cos^2(\theta)}$ quand $\theta \in [0,\pi]$)

$$|-\sqrt{1-x^2}P'(x)| \leq n\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq nP_{L^\infty([-1,1])}$$

Le majorant est indépendant de x et ainsi

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{C}_n[X],\quad \forall x \in [-1,1],\quad \left|P'(x)\sqrt{1-x^2}\right| \leqslant n\|P\|_{L^\infty((-1,1))}}$$

16. Soit $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Posons $f : \theta \mapsto Q(\cos(\theta))\sin(\theta)$. On sait déjà que $Q(\cos(\theta)) \in \mathcal{S}_{n-1}$ et s'écrit donc comme combinaison de $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ et d'une constante. Or,

$$\cos(k\theta)\sin(\theta) = \frac{1}{2}(\sin((k+1)\theta) - \sin((k-1)\theta))$$

$$\sin(k\theta)\sin(\theta) = -\frac{1}{2}(\cos((k+1)\theta) - \cos((k-1)\theta))$$

et $f(\theta)$ est donc combinaison de $\cos(j\theta)$ et $\sin(j\theta)$ pour $j \in [\![0, n]\!]$ et de $\sin(\theta)$ (pour la constante multipliée par $\sin(\theta)$). C'est donc un élément de $\mathcal{S}_n$. Comme $f'(\theta) = Q(\cos(\theta))\cos(\theta) - \sin^2(\theta)Q'(\cos(\theta))$, on a $f'(1) = Q(1)$ ($\theta = 0$). Avec (I.4), on a donc

$$|Q(1)| \leq n\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

Remarquons alors que

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ |f(\theta)| = |Q(\cos(\theta))\sin(\theta)| = |Q(x)|\sqrt{1-x^2} \ \text{ avec } x = \cos(\theta)$$

et donc $|f(\theta)|$ est plus petit que la borne supérieure des $|Q(x)|\sqrt{1-x^2}$ pour $x \in [-1,1]$. Ainsi

$$\boxed{|Q(1)| \leq n \sup_{-1\leqslant x\leqslant 1} \left|Q(x)\sqrt{1-x^2}\right|}$$

17. Soit $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $t \in [-1,1]$. Considérons $S_t(X) = R(tX) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. La question précédente utilisée avec ce polynôme donne

$$|R(t)| \leq n \sup_{-1\leqslant x\leqslant 1} \left|R(tx)\sqrt{1-x^2}\right|$$

Pour tout $x \in [-1,1]$, on a $1 - x^2 \leq 1 - t^2x^2$ et donc $\sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{1-t^2x^2}$. Ainsi

$$\forall x \in [-1,1],\ \left|R(tx)\sqrt{1-x^2}\right| \leq \left|R(tx)\sqrt{1-(tx)^2}\right| \leq \sup_{-1\leq y\leq 1} |R(y)\sqrt{1-y^2}|$$

On a ainsi montré que

$$\sup_{-1\leqslant x\leqslant 1} \left|R(tx)\sqrt{1-x^2}\right| \leq \sup_{-1\leq y\leq 1} |R(y)\sqrt{1-y^2}|$$

et on a donc

$$\boxed{|R(t)| \leqslant n \sup_{-1\leqslant x\leqslant 1} \left|R(x)\sqrt{1-x^2}\right|}$$

18. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on peut appliquer ce qui précède à $P' \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$:

$$\forall t \in [-1,1],\ |P'(t)| \leqslant n \sup_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \left| P'(x)\sqrt{1-x^2} \right|$$

Avec la question 15, on a donc

$$\forall t \in [-1,1],\ |P'(t)| \leqslant n^2 \|P\|_{L^\infty([-1,1])}$$

et ainsi

$$\boxed{\|P'\|_{L^\infty([-1,1])} \leq n^2 \|P\|_{L^\infty([-1,1])}}$$

19. D'une part, on $\|T_n\|_{L^\infty([-1,1])} = 1$ (question 4). D'autre part, $\|T_n'\|_{L^\infty([-1,1])} = n^2$ (question 5). Ainsi,

$$\boxed{\text{L'inégalité est une égalité quand } P = T_n \in \mathbb{C}_n[X]}$$