Sujet 7 - Correction

E3A PC 2016 maths 2

Un corrigé de J. Granados

Partie I

1. Le rayon de convergence du DSE en 0 de cette fonction vaut 1 et on a :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}.}$$

2. On applique le résultat précedent en $-\dfrac{1}{2}$ et on obtient :

$$\boxed{\ln(2) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}(-1)^k}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k}}{k2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}.}$$

3. (a) On applique la règle de D'Alembert :

$$\frac{k(k+1)}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+2} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

<u>Le rayon de convergence de cette série entière vaut donc $1/1$ *i.e.* 1.</u>

On pose alors $f : x \in]-1,1[\mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}$. f est la somme d'une série entière de rayon de convergence 1 donc elle est dérivable et on a, pour tout $x \in]-1,1[,\ f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$. D'après la question 1., on a donc, pour tout $x \in]-1,1[,\ f'(x) = -\ln(1-x)$. $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $x \mapsto (1-x)\ln(1-x) - (1-x)$ est une primitive de f'. De plus $f(0) = 0$ donc

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = (1-x)\ln(1-x) + x.}$$

(b) On a alors $2f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 \times \left(\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\right) = 1 - \ln(2)$. On a donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k} = 1 - \ln(2).}$$

4. On a :

— Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^k \times \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = -\dfrac{1}{k} < 0$ donc la série est alternée ;

— La suite $\left(\dfrac{1}{k}\right)_{k\geqslant 1}$ est décroissante et converge vers 0.

D'après le critère spécial sur les séries alternées, $\underline{\text{la série } \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ converge.}}$

Si $x = 0$ la somme est nulle donc le résultat est vrai.

Soit $x \in]0,1]$. Le critère spécial s'applique de nouveau donc la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$ converge et on a la majoration :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Or $x \in]0,1]$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n \leq 1$. On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1}.}$$

La série de fonction $\sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$ converge donc uniformément sur $[0,1]$ (car son reste converge uniformément vres 0 d'après la question précédente). De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$ est continue sur $[0,1]$ donc la fonction $x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$ est continue sur $[01]$. De plus, elle coïncide sur $[0,1[$ avec la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$. Cette dernière étant continue sur $[0,1]$, l'égalité reste vraie en 1 :

$$\boxed{\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}.}$$

Partie II

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $a_n = \frac{1 \times \ldots \times (2n-1)}{n2^{n+1}n!} \times \frac{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n} = \frac{(2n)!}{n2^{n+1}n! \times 2^n n!}$ d'où le résultat souhaité.

   (b) Formule de Stirling : $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.}$

   (c) On en déduit que $(n!)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n$ et $(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} 2\sqrt{\pi n}$. On a donc

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{n^{3/2}}.$$

   Or la série à termes positifs $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de Riemann) donc $\underline{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} a_n \text{ converge.}}$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $I_n - I_{n+1} = \int_0^{\frac{pi}{2}} \sin^{2n}(x)(1-\sin^2(x))dx = \int_0^{\frac{pi}{2}} \sin^{2n}(x)\cos(x) \times \cos(x)dx$. $x \mapsto \frac{\sin^{2n+1}(x)}{2n+1}$ et cos sont de classe $\mathbb{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc on peut faire une intégration par parties. On a alors :

$$\boxed{I_n - I_{n+1} = \left[\frac{\sin^{2n+1}(x)}{2n+1}\cos(x)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\frac{pi}{2}} \frac{\sin^{2n+1}(x)}{2n+1} \times (-\sin(x))dx = \frac{I_{n+1}}{2n+1}.}$$

   (b) Montrons ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

Initialisation : D'après la question précédente, $I_1 = \frac{1}{2}I_0 = \int_0^{\frac{pi}{2}} 1dx = \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2^1 1!}\frac{\pi}{2}$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété soit vraie. En nutilisant la question précédente, on a :

$$I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}I_n = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{2^n n!}\frac{\pi}{2} = \frac{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{\pi}{2}.$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : La propriété est vraie au rang 1 et héréditaire à partir de ce rang donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = n\pi a_n$.

3. (a) pour tout $t \in [0, 1[$, $-t^2 \in]-1, 1[$ donc en tuilisant la question 1. de la partie I, on a :
$\ln(1-t^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}(-x^2)^k}{k} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{k}$.
En particulier, pour tout $t \in [0, 1[$, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{t^{2n}}{n}$ converge. Or, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(x) \in [0, 1[$ donc la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin^{2n}(x)}{n}$ converge *i.e.* la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. On a alors :

$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = -\ln(1-\sin^2(x)) = -2\ln(\cos(x)).}$$

On applique alors le théorème d'intégration terme à terme :
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue et intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ (car continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) ;
- La série de fonction $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ vers f qui est continue ;
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n = \frac{I_n}{n} = \pi a_n$ donc la série $\sum_{n \geqslant 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n|$ converge.

Alors, f est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on a :

$$\boxed{-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.}$$

4. (a) On pose $u : x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$. u est $\mathbb{C}^1$ et strictement monotone sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $u(0) = \frac{\pi}{2}$, $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $du = -dx$. I étant convergente, par changement de variable, on en déduit que $\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)(-du)$ converge et vaut I *i.e.* J converge et $I = J$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$ donc, à l'aide du changement de variable $u : x \mapsto 2x$, on a :

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x)) - \ln(2)dx = \int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\frac{du}{2} - \frac{\pi}{2}\ln(2) = \frac{J}{2} + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u))\,du - \frac{\pi}{2}\ln(2).$$

On effectue alors le changement de variable $v : u \mapsto u - \dfrac{\pi}{2}$ et on obtient :

$$I + J = \frac{J}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\left(v + \frac{\pi}{2}\right)\right) dv - \frac{\pi}{2}\ln(2) = \frac{J+I}{2} - \frac{\pi}{2}\ln(2).$$

Or $I = J$ donc $\underline{I = -\dfrac{\pi}{2}\ln(2)}$.

5. D'après les question 3.(b) et 4.(b), on a $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \ln(2).}$

Partie III

1. (a) On effectue un changement d'indice pour se ramener à la somme d'une série géométrique :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{2^n}.}$$

On a alors :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2^k} = \sum_{i=k}^{+\infty}\frac{1}{2^i} - \sum_{i=k+1}^{+\infty}\frac{1}{2^i} = U_{k-1} - Uk.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_{k-1} - U_k}{k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{U_{k-1}}{k} - \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{U_k}{k} = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{U_k}{k+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{U_k}{k} = \frac{U_n}{n} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$

On a donc bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ R_n = \frac{U_n}{n} - \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{U_k}{k(k+1)}.}$$

(c) Pour tout $k \geq n+1$, $\quad 0 \leq \dfrac{U_k}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k(k+1)2^k} \leq \dfrac{1}{n+2}\dfrac{1}{k2^k}$

d'où $0 \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{U_k}{k(k+1)} \leq \frac{R_n}{n+2}$ et donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{U_k}{k(k+1)} = o(R_n).}$

(d) On a donc $\dfrac{U_n}{n+1} = R_n + \circ(R_n)$ donc $\boxed{R_n \sim \dfrac{U_n}{n+1} \sim \dfrac{U_n}{n} \sim \dfrac{1}{n2^n}.}$

2. (a) Pour tout $t \in [0,1]$, $-t \neq 1$. Il s'agit alors de la somme des premiers termes d'une suite géomatrique :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1],\ \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k = \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)} = \frac{1}{1+t} - (-1)^n\frac{t^n}{1+t}.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

En intégrant le résultat précédent sur $[0,1]$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = [\ln(1+t)]_0^1 - (-1)^n\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt.$

De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$. On a donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = (-1)^n\displaystyle\int_0^1\frac{t^n}{1+t}dt.}$

(c) $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ et $t \mapsto \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$ sont $\mathbb{C}^1$ sur $[0,1]$ donc on peut faire une intégration par parties :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = (-1)^n \left(\left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)(t+1)} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-t^{n+1}}{(n+1)(t+1)^2} dt \right) = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt.}$$

(d) Pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leq \dfrac{1}{(1+t)^2} \leq 1$ donc, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt \leq \int_0^1 t^{n+1} = \frac{1}{n+2}.$$

D'après le théorème des gendarmes, on a alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\displaystyle\frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} dt = \circ\left(\frac{(-1)^n}{2(n+1)}\right)$.

On en déduit que $S_n \sim \dfrac{(-1)^n}{2(n+1)}$ et donc que $\boxed{S_n \sim \dfrac{(-1)^n}{2n}}$.

3. (a) $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \times \dfrac{1}{n^{3/2}}$ donc $2\sqrt{\pi}k^{3/2}a_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. On en déduit que :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall k \geqslant N, 1-\varepsilon \leq 2\sqrt{\pi}k^{3/2}a_k \leq 1+\varepsilon \ i.e.\ \frac{1-\varepsilon}{2\sqrt{\pi}k^{3/2}} \leq a_k \leq \frac{1+\varepsilon}{2\sqrt{\pi}k^{3/2}}.}$$

(b) Soit $k \geqslant 2$. $t \mapsto \dfrac{1}{t^{3/2}}$ est décroissante sur $[k, k+1]$ donc, pour tout $t \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{t^{3/2}} \leq \dfrac{1}{k^{3/2}}$. Par croissance de l'intégrale, on obtient $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^{3/2}} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^{3/2}} dt$ et donc $\boxed{\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^{3/2}} dt \leq \frac{1}{k^{3/2}}}$.

En raisonnant de même sur l'intervalle $[k-1, k]$ on obtient $\boxed{\displaystyle\frac{1}{k^{3/2}} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^{3/2}} dt.}$

(c) Soit $k \geqslant \max(2, N)$. En combinant les résultats des questions 3.(a) et (b), on obtient :

$$\frac{1-\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^{3/2}} dt \leq a_k \leq \frac{1+\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^{3/2}} dt.$$

De plus, $t \mapsto \dfrac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} a_k$ converge donc on peut sommer ces inégalités et on obtient :

$$\boxed{\forall n \geqslant N,\ \frac{1-\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt \leq T_n \leq \frac{1+\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \int_{n}^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt.}$$

(d) En calculant les intégrales, on a donc :

$$(1-\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{\pi(n+1)}} \leq T_n \leq (1+\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Par théorème d'encadrement des limites, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\pi n}T_n = 1$ soit $\boxed{T_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}}$.

4. On utilise la même méthode que pour la recherche d'un équivalent de R_n. :

$$V_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_{k-1} - U_k}{k(k+1)}.$$

Comme les séries $\sum_{k\geqslant 1} \frac{U_{k-1}}{k(k+1)}$ et $\sum_{k\geqslant 1} \frac{U_k}{k(k+1)}$ convergent, on a encore :

$$V_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_{k-1}}{k(k+1)} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{(k+1)(k+2)} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)},$$

d'où $V_n = \frac{U_n}{(n+1)(n+2)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k+1}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2^n(n+1)(n+2)} - 2\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)2^k}$.

Comme en III.1.(c), pour tout $k \geq n+1$, $\quad 0 \leq \frac{1}{k(k+1)(k+2)2^k} \leq \frac{1}{n+3}\frac{1}{k(k+1)2^k}$

D'où $0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)2^k} \leq \frac{1}{n+3}V_n$

On a donc $V_n = \frac{1}{2^n(n+1)(n+2)} + o(V_n)$ d'où $\boxed{V_n \sim \frac{1}{2^n(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{2^n n^2}.}$

5. En utilisant la notation $a_n \prec\prec b_n$ pour $a_n = o(b_n)$, les comparaisons usuelles nous donnent :

$$\frac{1}{n^2 2^n} \prec\prec \frac{1}{n2^n} \prec\prec \frac{1}{2n} \prec\prec \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Donc $V_n \prec\prec R_n \prec\prec S_n \prec\prec T_n$

Des quatre séries étudiées, $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k(k+1)2^k}$ est celle qui converge le plus rapidement vers $\ln(2)$ et $\sum_{k\geqslant 1} a_k$ est celle qui converge le plus lentement.