Sujet 5 - Correction

Mines-Ponts PSI 2021 maths 1

à partir d'un corrigé d'A. Castella

Rq. Dans tout ce corrigé, on supposera, plus généralement et plus précisément que ce qui est fait dans l'énoncé, que l'on a :

$$X(\Omega) \subset \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\},$$

où les x_n, pour $n \in \mathbb{N}$, sont deux à deux distincts. Cela évite en particulier des cas par cas fastidieux dans les questions de cours, pour distinguer les cas où $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.

I - Questions de cours

1.
   - Par définition, X est d'espérance finie si la série $\sum x_n \mathbb{P}(X = x_n)$ converge absolument.
   - Par théorème de transfert appliqué à la fonction valeur absolue $|\cdot|$, on a alors :

$$\begin{aligned} |X| \text{ est d'espérance finie} &\iff \text{la série } \sum |x_n| \mathbb{P}(X = x_n) \text{ converge absolument} \\ &\iff \text{la série } \sum x_n \mathbb{P}(X = x_n) \text{ converge absolument} \\ &\iff X \text{ est d'espérance finie.} \end{aligned}$$

2. (a) Si X est bornée, alors il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad |X(\omega)| \leq M.$$

Et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou $n \in I$ dans l'énoncé), on a aussi $|x_n| \leq M$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n \mathbb{P}(X = x_n)| \leq M\mathbb{P}(X = x_n)$. Or par définition de probabilité, $\sum \mathbb{P}(X = x_n)$ converge (et a pour somme 1), donc par comparaison, $\sum x_n \mathbb{P}(X = x_n)$ converge absolument, et :

$$\boxed{X \text{ est bien d'espérance finie.}}$$

(b) On suppose maintenant que $\mathbb{P}(|X| \leq M) = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, si $|x_n| > M$ car on a alors $\{X = x_n\} \subset \{|X| > M\}$, donc par croissance des probabilités, $0 \leqslant \mathbb{P}(X = x_n) \leqslant \mathbb{P}(|X| > M) = 1 - \mathbb{P}(|X| \leqslant M) = 0$, donc $\mathbb{P}(X = x_n) = 0$. On a bien :

$$|x_n \mathbb{P}(X = x_n)| \leq M\mathbb{P}(X = x_n).$$

Cette égalité est évidemment encore vérifiée, si $|x_n| \leq M$.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n \mathbb{P}(X = x_n)| \leq M\mathbb{P}(X = x_n)$.
Et le raisonnement de la question précédente permet de conclure.

II - Généralités sur les variables aléatoires

3. On suppose que $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$ et que X vérifie $(\mathcal{D}_\alpha)$ où $\alpha > 0$.
   - La variable aléatoire $|X|$ est alors $\boxed{\text{à valeurs dans } \mathbb{N}}$, et donc (COURS) :

$$\text{si } |X| \text{ admet une espérance, alors la série } \sum \mathbb{P}(|X| \geqslant n) \text{ converge}[1].$$

1. C'est même une équivalence, et on a alors $\mathbb{E}(|X|) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X| \geqslant n)$.

Or par $\mathcal{D}_\alpha$, on a $\mathbb{P}(|X| \geqslant n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n}$, et la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, donc par comparaison de termes positifs, la série $\sum \mathbb{P}(|X| \geqslant n)$ diverge aussi.

Ainsi $|X|$ n'admet pas d'espérance, donc X non plus d'après la question **1**.

- On sait que si X^2 admet une espérance (i.e. si X admet une variance), alors X admet une espérance, donc par contraposée, X^2 n'admet pas d'espérance non plus.

4. On suppose que X est symétrique et que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction impaire.
   - Comme X est symétrique, X et $-X$ suivent la même loi, donc par le théorème 1 du préambule, $f(X)$ et $f(-X)$ suivent la même loi. Mais f est impaire, donc $f(-X) = -f(X)$.
     Ainsi $f(X)$ et $-f(X)$ suivent la même loi, i.e. $f(X)$ est symétrique.
   - Si $f(X)$ est d'espérance finie, alors puisque $-f(X)$ suit la même loi que $f(X)$, cette variable $-f(X)$ est aussi d'espérance finie et $\mathbb{E}(-f(X)) = \mathbb{E}(f(X))$.
     Mais par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(-f(X)) = -\mathbb{E}(f(X))$, donc $\boxed{\mathbb{E}(f(X)) = 0.}$

5. On suppose X et Y symétriques et indépendantes.

Méthode 1 : en utilisant le *principe d'égalité en loi*.
Posons $Z = (X, Y)$.

- On a $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$, et pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = (x,y)) &= \mathbb{P}(X = x, Y = y) \quad \text{par définition}\\
&= \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y\\
&= \mathbb{P}(X = -x)\mathbb{P}(Y = -y) \quad \text{par symétrie de } X \text{ et } Y\\
&= \mathbb{P}(X = -x, Y = -y) \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y\\
&= \mathbb{P}(-X = x, -Y = y)\\
&= \mathbb{P}(-Z = (x,y)) \quad \text{par définition.}
\end{aligned}$$

  Donc $Z = (X, Y)$ et $-Z = (-X, -Y)$ suivent la même loi.
- Par le théorème du préambule appliqué aux variables Z et $-Z$ et à la fonction $u : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$, on voit alors que $u(Z) = X + Y$ et $u(-Z) = -X - Y$ suivent la même loi, i.e. que la variable $X + Y$ est symétrique[2].

Méthode 2 : « à la main »
On note $Z = X + Y$.
On écrit la formule des probabilité totale, avec le système complet d'événements $(Y = y)_{y\in Y(\Omega)}$.

$$\begin{aligned}
\forall z \in Z(\Omega), \quad \mathbb{P}(X + Y = z) \quad &= \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}\Big(X + Y = z, Y = y\Big) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}\Big(X = z - y, Y = y\Big)\\
&= \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = z - y)\mathbb{P}(Y = y) \qquad \text{car } X, Y \text{sont indépendantes}\\
&= \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = -z + y)\mathbb{P}(Y = -y) \qquad \text{car } X, Y \text{sont symétriques}\\
&= \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}\Big(X = -z + y, Y = -y\Big) \qquad \text{car } X, Y \text{sont indépendantes}\\
&= \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}\Big(X + Y = -z, Y = -y\Big) \quad = \quad \mathbb{P}(X + Y = -z)
\end{aligned}$$

2. On pourrait avoir envie d'appliquer le 1er point de la question **4** ici, plutôt que se ramener à nouveau au théorème 1, mais on est dans un cadre différent : la variable Z n'est pas à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction $u : (x + y) \mapsto x + y$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$.

La dernière égalité, s'obtient avec la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(Y=-y)_{y\in Y(\Omega)}$ (c'est bien un système complet d'événements puisque Y est symétrique).
On a bien démontré que $\boxed{Z = X+Y \text{ est symétrique.}}$

III - Deux sommes de séries

6. Posons $\ell(t) = \dfrac{z}{1-tz}$, de sorte que $L(x) = \displaystyle\int_0^x \ell(t)\mathrm{d}t$.
   - On a $|z| \leqslant 1$ et $z \neq 1$. Pour tout $t \in [0;1]$:
     – Si $t \in [0;1[$ alors, puisque $|z| \leq 1$, on $|tz| \leq |t| < 1$ et donc $tz \neq 1$.
     – Si $t = 1$, alors $1 - tz = 1 - z \neq 0$ car $z \neq 1$.
     Ainsi, $\ell : t \mapsto \dfrac{z}{1-tz}$ est bien définie sur $[0;1]$, et elle y est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme quotient de la fonction constante $t \mapsto z$ et de la fonction affine $t \mapsto 1 - tz$ qui le sont.
   - La fonction $L : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \ell(t)\mathrm{d}t$ est donc bien définie sur $[0;1]$, et, puisque ℓ est continue sur $[0,1]$, par le théorème fondamental du calcul intégral, c'est une primitive de ℓ sur $[0;1]$. Comme ℓ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, sa primitive L l'est aussi.

     $$\boxed{L \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } [0;1].}$$

   - Montrons par récurrence que[3] pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!z^n}{(1-xz)^n}$ pour $t \in [0;1]$.
     - ⋆ On a $L' = \ell$ donc la formule est vraie pour $n = 1$.
     - ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ est tel que $\forall\, x \in [0;1]$, $L^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!z^n}{(1-xz)^n}$.
       Alors en dérivant cette relation (avec la formule $(u^\alpha)'(x) = \alpha u'(x)u^{\alpha-1}(x)$), on obtient

       $$\forall\, x \in [0;1], \quad L^{(n+1)}(x) = \frac{(n-1)!z^n \times (-n) \times (-z)}{(1-xz)^{n+1}} = \frac{n!z^{n+1}}{(1-xz)^{n+1}},$$

       qui est la formule voulue au rang $n+1$.

     On conclut par récurrence que l'on a bien : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in [0;1],\ L^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!z^n}{(1-xz)^n}.}$

7. On rappelle que si $Z = X + iY \in \mathbb{C}$, alors $|Z|^2 = X^2 + Y^2 \geq X^2$ donc $|Z| \geq |X|$ (et aussi $|Z| \geq |Y|$).
   On sait que $|z| \leq 1$, on l'écrit avec $Z = 1 - tz = 1 - t(x+iy) = (1-tx) - iy$ si $z = x + iy$. On obtient :

   $$|1 - tz| \geqslant |1 - tx|.$$

   L'inégalité triangulaire donne aussi $|1 - tx| \geq 1 - |tx| = 1 - t|x|$.
   Or $|x| \leq |z| \leq 1$ donc $t|x| \leq t$ et $1 - t|x| \geq 1 - t$.
   On a donc bien $\boxed{|1 - tz| \geqslant 1 - t.}$
   Et si on avait égalité pour un $t \in]0,1]$, on aurait $t|x| = t$ et comme $t \neq 0$ $|x| = 1$. Et donc puisque $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$, on aurait $z = -1$. Mais dans ce dernier cas : $|1 - tz| = 1 + t > 1 - t$ car $t > 0$.

   On a donc bien $\boxed{\forall t \in]0,1], \quad |1 - tz| > 1 - t.}$

3. On devine la formule en calculant les premières dérivées de $L' = \ell$ au brouillon.

8. • On applique le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions (f_n) où $f_n(t) = \left|\dfrac{1-t}{1-tz}\right|^n$.

  ⋆ On montre que les fonctions f_n sont bien définies et continues sur $]0;1]$ comme en question **6**.
  De plus par la question **7**, on a $\forall\, t \in]0;1]$, $\left|\dfrac{1-t}{1-tz}\right| < 1$, donc $f_n(t) = \left|\dfrac{1-t}{1-tz}\right|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
  Ainsi la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $]0;1]$.

  ⋆ Comme $\forall\, t \in]0;1]$, $\left|\dfrac{1-t}{1-tz}\right| < 1$, on a encore $\forall\, t \in]0;1]$, $|f_n(t)| = \left|\dfrac{1-t}{1-tz}\right|^n \leqslant 1$, et la fonction φ constante égale à 1 est intégrable sur $]0;1]$ (car cet intervalle est borné).

  Donc le théorème de convergence dominée s'applique et montre que $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{1-t}{1-tz}\right|^n \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 0\mathrm{d}t = 0.}$

• On note que la fonction $t \mapsto \dfrac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}}$ est bien définie et continue sur le segment $[0;1]$ (comme en question **6**), de sorte que son intégrale y est bien définie. De plus par inégalité triangulaire :

$$\left|\int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}}\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|z|^{n+1}}{|1-tz|}\int_0^1 \left|\frac{1-t}{1-tz}\right|^n \mathrm{d}t.$$

Or $|z| \leqslant 1$ donc la suite $\left(\dfrac{|z|^{n+1}}{|1-tz|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{1-t}{1-tz}\right|^n \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par le point précédent, donc par encadrement :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}}\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

9. **Formule de Taylor avec reste intégrale :**
Soit I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Pour tous $a, x \in I$, on a :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.}$$

Comme la fonction L est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;1]$, la formule de Taylor avec reste intégral s'applique à tout ordre $N \in \mathbb{N}$ en $x = 1$, $a = 0$ et donne :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \quad L(1) = \sum_{n=0}^{N} \frac{L^{(n)}(0)}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} L^{(N+1)}(t)t.$$

Or $L(0) = \displaystyle\int_0^0 \ell(t)\mathrm{d}t = 0$ et pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0;1]$, $L^{(n)}(t) = \dfrac{(n-1)!z^n}{(1-tz)^n}$ (question **6**), donc :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \quad L(1) = \sum_{n=1}^{N} \frac{z^n}{n} + \int_0^1 \frac{(1-t)^N z^{N+1}}{(1-tz)^{N+1}} t.$$

Par la question **8**, cette dernière intégrale tend vers 0 quand $N \to +\infty$, donc la série $\sum \dfrac{z^n}{n}$ converge et en passant à la limite : $\boxed{L(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}.}$

10. (ici, il faut détailler)

Les fonctions coordonnées $(t,u) \mapsto t$ et $(t,u) \mapsto u$ sont linéaires donc continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
La fonction $t \mapsto e^{it}$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, donc par composition, la fonction $(t,u) \mapsto e^{it}$ est continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$.
Par produit, la fonction $(t,u) \mapsto ue^{it}$ est continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$, donc la fonction $(t,u) \mapsto 1+ue^{it}$ aussi (par somme avec une fonction constante donc continue).
Enfin, le module $|\cdot|$ est continu de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$, donc par composition, la fonction $\gamma : (t,u) \mapsto |1+ue^{it}|$ est continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Preuve de la minoration admise :

Soit $a \in]0;\pi[$.
Montrons que la partie $[-a;a] \times [0;1]$ de $\mathbb{R}^2$ est fermée et bornée.

- $\star$ Elle est bornée car si $(t,u) \in [-a;a] \times [0;1]$, alors $\|(t,u)\|_2 = \sqrt{t^2+u^2} \leqslant \sqrt{a^2+1}$.
- $\star$ Elle est fermée car si $((t_n,u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $[-a;a] \times [0;1]$ convergeant vers un certain $(t,u) \in \mathbb{R}^2$, alors $(t,u) \in [-a;a] \times [0;1]$ par passage des inégalités larges à la limite.

Le théorème de compacité assure donc que la fonction continue γ est bornée et atteint ses bornes sur $[-a;a] \times [0;1]$. Ainsi en notant m_a son minimum sur $[-a;a] \times [0;1]$, on a :

$$\forall\, (t,u) \in [-a;a] \times [0;1], \quad |1+ue^{it}| \geqslant m_a$$

et il existe $(t_0,u_0) \in [-a;a] \times [0;1]$ tel que $m_a = |1+u_0e^{it_0}|$.
Or comme en question **6**, on a $z = -e^{it_0}$ de module 1 et distinct de 1 (car $t_0 \in [-a;a] \subset]-\pi;\pi[$), donc $u_0 z \neq 1$, i.e. $1-u_0z = 1+u_0e^{it_0} \neq 0$, et donc $\boxed{m_a > 0.}$

11. On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

On pose, pour tout $(t,u) \in]-\pi;\pi[\times [0;1]$, $f(t,u) = \dfrac{e^{it}}{1+ue^{it}}$.

- $\star$ Pour tout $u \in [0;1]$, la fonction $t \mapsto f(t,u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi;\pi[$, car $t \mapsto e^{it}$ l'est, et :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,u) = \frac{ie^{it}(1+ue^{it}) - e^{it}iue^{it}}{(1+ue^{it})^2} = \frac{ie^{it}}{(1+ue^{it})^2}.$$

- $\star$ Pour tout $t \in]-\pi;\pi[$, la fonction $u \mapsto f(t,u)$ est continue donc intégrable sur le segment $[0;1]$.
- $\star$ Pour tout $t \in]-\pi;\pi[$, la fonction $u \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,u)$ est continue sur le segment $[0;1]$.
- $\star$ **Hypothèse de domination :** Soit $a \in]0;\pi[$. Pour tout $(t,u) \in [-a;a] \times [0;1]$, on a par la question **10** :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,u)\right| = \frac{1}{|1+ue^{it}|^2} \leqslant \frac{1}{m_a^2}$$

et la fonction constante $u \mapsto \dfrac{1}{m_a^2}$ est intégrable sur $[0;1]$ (car cet intervalle est borné).

Donc le théorème s'applique et montre que la fonction $F : t \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t,u)\mathrm{d}u$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle $[-a;a]$ où $a \in]0;\pi[$, donc sur leur réunion $]-\pi;\pi[$, et que :

$$\boxed{\forall\, t \in]\pi;\pi[, \quad F'(t) = \int_0^1 \frac{ie^{it}}{(1+ue^{it})^2}\mathrm{d}u.}$$

12. • Soit $t \in]-\pi;\pi[$. On déduit de la formule trouvée ci-dessus, par primitivation directe, que :

$$F'(t) = \left[\frac{-i}{1+ue^{it}}\right]_{u=0}^{u=1} = \frac{-i}{1+e^{it}} + i = \frac{ie^{it}}{1+e^{it}}.$$

Or $1+e^{it} = e^{it/2}(e^{-it/2}+e^{it/2}) = 2\cos(t/2)e^{it/2}$, donc :

$$F'(t) = \frac{ie^{it/2}}{2\cos(t/2)} = \frac{i\big(\cos(t/2)+i\sin(t/2)\big)}{2\cos(t/2)} = \frac{i}{2} - \frac{\tan(t/2)}{2}.$$

- On déduit de la formule ci-dessus, à nouveau par primitivation directe, et en tenant compte de ce que :

$$t \mapsto -\frac{\tan(t/2)}{2} = -\frac{\sin(t/2)}{2\cos(t/2)}$$

est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ où $u : t \mapsto \cos(t/2)$ est strictement positive sur $]-\pi;\pi[$, l'existence d'une constante $C \in \mathbb{C}$ telle que :

$$\forall\, t \in]-\pi;\pi[, \quad F(t) = \ln(\cos(t/2)) + \frac{it}{2} + C.$$

Or $F(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+u}\mathrm{d}u = \Big[\ln(1+u)\Big]_0^1 = \ln(2)$, donc $C = \ln(2)$, de sorte que :

$$\boxed{\forall\, t \in]-\pi;\pi[, \quad F(t) = \ln(2\cos(t/2)) + \frac{it}{2}.}$$

13. Soit $\theta \in]0;2\pi[$.

- En appliquant la question **9** à $z = e^{i\theta}$, qui vérifie bien $|z| \leqslant 1$ et $z \neq 1$, on voit que la série $\sum \dfrac{e^{in\theta}}{n}$ converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = L(1) = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}\mathrm{d}x.$$

- On note que $-e^{i\theta} = e^{i(\theta-\pi)}$ avec $\theta - \pi \in]-\pi;\pi[$, de sorte que :

$$\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{-e^{i(\theta-\pi)}}{1+xe^{i(\theta-\pi)}}x = -F(\theta-\pi)$$

et ainsi par la question **12** et l'identité trigonométrique $\cos(a-\pi/2) = \sin(a)$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = -F(\theta-\pi) = -\ln\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{i(\theta-\pi)}{2} = -\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + \frac{i(\pi-\theta)}{2}.$$

- Comme la série $\sum \dfrac{e^{in\theta}}{n}$ converge, il en va de même de ses parties réelle et imaginaire $\sum \dfrac{\cos(n\theta)}{n}$ et $\sum \dfrac{\sin(n\theta)}{n}$, et en identifiant les parties réelle et imaginaire dans l'égalité précédente, on trouve :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}.}$$

IV - Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique

Rq. Dans les questions **14** et **15**, la symétrie de X ne sert pas. Mais cette symetrie permettrait de montrer que $\Phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$, c'est la véritable définition de fonction caractéristique.

14. Soit $t \in \mathbb{R}$.
    - La variable aléatoire $Y_t = \cos(tX)$ est bornée, comprise entre -1 et 1, donc par la question **2**, Y_t est d'espérance finie, i.e. $\Phi_X(t) = \mathbb{E}(Y_t)$ est bien défini, et par croissance de l'espérance :
    $$-1 = \mathbb{E}(-1) \leqslant \mathbb{E}(Y_t) = \Phi_X(t) \leqslant \mathbb{E}(1) = 1.$$
    Donc la fonction Φ_X est bien définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $|\Phi_X(t)| \leqslant 1$.
    - De plus, on a évidemment $Y_t = \cos(tX) = \cos(-tX) = Y_{-t}$ puisque cos est une fonction paire, donc $\Phi_X(t) = \mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(Y_{-t}) = \Phi_X(-t)$, donc la fonction Φ_X est paire.
15. Par théorème de transfert, on obtient donc :
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \Phi_X(t) = \mathbb{E}(\cos(tX)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(tx_n)\mathbb{P}(X = x_n).$$
Donc Φ_X est la somme de la série de fonctions $\sum u_n$, où $u_n : t \mapsto \mathbb{P}(X = x_n)\cos(tx_n)$. On applique alors le théorème de continuité des séries de fonctions.
    - ⋆ Les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}$ (puisque cos l'est).
    - ⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |u_n(t)| = \mathbb{P}(X = x_n)$, et la série $\sum \mathbb{P}(X = x_n)$ converge, donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.

    Ainsi le théorème s'applique et montre que : $\boxed{\text{la somme } \Phi_X = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$
16. (Les questions intermédiaires ont été ajoutées pour ce devoir)
On suppose désormais que X, en plus d'être symétrique, est entière et vérifie la condition $\mathcal{D}_\alpha$ (où $\alpha > 0$).
Soit $t \in]0; 2\pi[$.
    (a) On montre que la série $\sum R_n \cos(nt)$ converge.
    Par $\mathcal{D}_\alpha$, on a $R_n \cos(nt) = \mathbb{P}(|X| \geqslant n)\cos(nt) = \dfrac{\alpha\cos(nt)}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
    Or d'après la question **13**, la série $\sum \dfrac{\cos(nt)}{n}$ converge (car $t \in]0; 2\pi[$), et le terme en $\underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ est, par comparaison, le terme général d'une série absolument convergente, donc convergente.
    $$\boxed{\text{La série } \sum R_n \cos(nt) \text{ est donc la somme de deux séries convergentes, donc est convergente.}}$$
    (b) Montrons que $\Phi_X(t) = \Phi_{|X|}(t) = \mathbb{E}(\cos(t|X|)) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \cos(tn)\mathbb{P}(|X| = n)$.
    Comme cos est paire, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos(tX) = \cos(t|X|)$, donc
    $$\Phi_X(t) = \mathbb{E}(\cos(tX)) = \mathbb{E}(\cos(t|X|)) = \Phi_{|X|}(t).$$
    Comme X est entière, $|X|$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc par théorème de transfert [4] :

4. Sans passer par $|X|$, le théorème de transfert appliqué à X donne $\Phi_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \cos(tx_n)\mathbb{P}(X = x_n)$, où $\{x_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ est une énumération de $\mathbb{Z}$ (cf. remarque initiale), et cela complique l'identification à $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1})\cos(nt)$, puisqu'il faut alors passer par une sommation par paquets à la limite du programme (voire hors programme) en PSI.

$$\boxed{\Phi_X(t) = \Phi_{|X|}(t) = \mathbb{E}(\cos(t|X|)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(tn)\mathbb{P}(|X| = n).}$$

(c) Montrons que $\Phi_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(R_n - R_{n+1})\cos(nt)$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $R_n - R_{n+1} = \mathbb{P}(|X| \geqslant n) - \mathbb{P}(|X| \geqslant n+1) = \mathbb{P}(|X| = n)$ car X est entière, donc on a bien :

$$\boxed{\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(R_n - R_{n+1})\cos(nt).}$$

(d) Montrons que $\Phi_X(t) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} R_n\big[\cos(nt) - \cos((n-1)t)\big]$. Il s'agit d'une transfomation d'Abel...

Puisque les séries $\sum R_n\cos(nt)$ et $\sum(R_n - R_{n+1})\cos(nt)$ convergent, la série $\sum R_{n+1}\cos(nt)$ converge aussi (comme différence des deux précédentes) et par linéarité :

$$\begin{aligned}
\Phi_X(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(R_n - R_{n+1})\cos(nt) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n\cos(nt) - \sum_{n=0}^{+\infty} R_{n+1}\cos(nt) \\
&= R_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n\cos(nt) - \sum_{n=1}^{+\infty} R_n\cos((n-1)t) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n\big[\cos(nt) - \cos((n-1)t)\big]
\end{aligned}$$

puisque $R_0 = P(|X| \geqslant 0) = 1$.

17. • Posons $f_n(t) = \left(R_n - \dfrac{\alpha}{n}\right)e^{int}$ pour $n \geqslant 1$ et $t \in \mathbb{R}$.

Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ et $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \left|R_n - \dfrac{\alpha}{n}\right| = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par propriété $\mathcal{D}_\alpha$, donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ par comparaison.

Le théorème de continuité des séries de fonctions montre alors que la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est donc en particulier continue en 0, de sorte que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right)e^{int} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \xrightarrow[t\to 0]{} C = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(0) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right).$$

De plus comme α et les R_n sont réels, on a bien $C \in \mathbb{R}$.

• En séparant les parties réelle et imaginaire dans le point précédent, on obtient puisque $C \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right)\cos(nt) \xrightarrow[t\to 0]{} C \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right)\sin(nt) \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

Pour $t \in]0;2\pi[$, les séries $\sum \dfrac{\cos(nt)}{n}$ et $\sum R_n \cos(nt)$ convergent (questions **13** et **16**) donc on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right)\cos(nt) + \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n} \\
&= \underset{t\to 0}{O}(1) - \alpha \ln\left(2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\
&= \underset{t\to 0}{O}(1) - \alpha\ln(t) - \alpha\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right) \\
&= -\alpha\ln(t) + \underset{t\to 0}{O}(1) \quad \text{car } \tfrac{\sin(t/2)}{t/2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1 \text{ donc } \ln(\tfrac{\sin(t/2)}{t/2}) = \underset{t\to 0}{O}(1) \\
&= \underset{t\to 0^+}{O}(\ln(t)).
\end{aligned}$$

De même pour $t \in]0;2\pi[$, la série $\sum \dfrac{\sin(nt)}{n}$ converge (question **13**), donc la série $\sum R_n \sin(nt)$ converge comme combinaison linéaire de deux séries convergentes [5], et par linéarité :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right)\sin(nt) + \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n} \\
&= \underset{t\to 0^+}{o}(1) + \alpha\frac{\pi - t}{2} = \frac{\alpha\pi}{2} + \underset{t\to 0^+}{o}(1).
\end{aligned}$$

18. Soit $t \in]0;\frac{\pi}{2}[$.

- Par la dernière formule de la question **16**, on a $\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n\big[\cos(nt) - \cos((n-1)t)\big]$.

  Avec l'identité $\cos((n-1)t) = \cos(nt)\cos(t) + \sin(nt)\sin(t)$ et la question **17** (qui garantit que toutes les sommes écrites sont bien définies), on obtient :

$$\begin{aligned}
\Phi_X(t) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n\big[(1-\cos(t))\cos(nt) - \sin(t)\sin(nt)\big] \\
&= 1 + \underbrace{(1-\cos(t))\sum_{n=1}^{+\infty} R_n\cos(nt)}_{A(t)} - \underbrace{\sin(t)\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt)}_{B(t)}.
\end{aligned}$$

  Or $1-\cos(t) = \underset{t\to 0}{O}(t^2)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} R_n\cos(nt) = \underset{t\to 0^+}{O}(\ln(t))$, donc $A(t) = \underset{t\to 0^+}{O}(t^2\ln(t))$, et $t\ln(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, donc $A(t) = \underset{t\to 0^+}{o}(t)$.

  De même, $\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \frac{\alpha\pi}{2} + \underset{t\to 0^+}{o}(1)$, donc $B(t) = \frac{\alpha\pi t}{2} + \underset{t\to 0^+}{o}(t)$.

  Donc on a bien :
$$\Phi_X(t) = 1 - \frac{\alpha\pi t}{2} + \underset{t\to 0^+}{o}(t).$$

- Ainsi Φ_X est dérivable à droite en 0 et que sa dérivée à droite en 0 est $(\Phi_X)'_d(0) = -\frac{\alpha\pi}{2}$, puisque :
$$\frac{\Phi_X(t) - \Phi_X(0)}{t} = \frac{\Phi_X(t) - 1}{t} = -\frac{\alpha\pi}{2} + \underset{t\to 0^+}{o}(1) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{\alpha\pi}{2}.$$

5. On peut aussi le démontrer directement comme dans l'indication en question **16**, en remplaçant cos par sin.

Mais Φ_X est paire (question **14**), donc par symétrie, Φ_X est dérivable à gauche en 0 et sa dérivée à gauche en 0 est $(\Phi_X)'_g(0) = \dfrac{\alpha\pi}{2}$.
Comme les dérivées de Φ_X à gauche et à droite en 0 sont distinctes, Φ_X n'est pas dérivable en 0 (son graphe y présente un point anguleux).

V - Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des variables aléatoires M_n

Rq. Toutes les espérances écrites dans les questions suivantes existent au vu de la question **2** : toute variable aléatoire bornée admet une espérance.

19. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par définition de Φ_{X+Y} et par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}\Phi_{X+Y}(t) &= \mathbb{E}(\cos(t(X+Y)) = \mathbb{E}(\cos(tX)\cos(tY) - \sin(tX)\sin(tY)) \\ &= \mathbb{E}(\cos(tX)\cos(tY)) - \mathbb{E}(\sin(tX)\sin(tY)).\end{aligned}$$

Or les variables X et Y sont indépendantes, donc les variables $\cos(tX)$ et $\cos(tY)$ (resp. $\sin(tX)$ et $\sin(tY)$) le sont aussi, donc par propriété de l'espérance d'un produit de deux variables indépendantes :

$$\begin{aligned}\Phi_{X+Y}(t) &= \mathbb{E}(\cos(tX))\mathbb{E}(\cos(tY)) - \mathbb{E}(\sin(tX))\mathbb{E}(\sin(tY)) \\ &= \Phi_X(t)\Phi_Y(t) - \mathbb{E}(\sin(tX))\mathbb{E}(\sin(tY)).\end{aligned}$$

Mais X est symétrique et la fonction $f_t : x \mapsto \sin(tx)$ est impaire, donc par la question **4**, $\mathbb{E}(\sin(tX)) = 0$, donc on a bien :

$$\boxed{\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t).}$$

20. On a $M_n = \dfrac{S_n}{n}$ où $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

- Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que S_n est symétrique et que $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\Phi_{S_n}(t) = (\Phi_{X_1}(t))^n$.
  - ⋆ C'est clair pour $n = 1$ puisque $S_1 = X_1$.
  - ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel S_n est symétrique et $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\Phi_{M_n}(t) = (\Phi_{X_1}(t))^n$.
    Alors, puisque X_{n+1} est indépendant de S_n (c'est admis dans le préambule, et c'est un cas particulier du lemme des coalitions), on voit par la question **5** que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ est symétrique, et par la question **19** que $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\Phi_{S_{n+1}}(t) = \Phi_{S_n}(t)\Phi_{X_{n+1}}(t)$.
    Or X_{n+1} suit la même loi que X_1, donc $\cos(tX_{n+1})$ suit la même loi que $\cos(tX_1)$ par le théorème 1 du préambule, donc $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\Phi_{X_{n+1}}(t) = \mathbb{E}(\cos(tX_{n+1})) = \mathbb{E}(\cos(tX_1)) = \Phi_{X_1}(t)$.
    Ainsi $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\Phi_{S_{n+1}}(t) = (\Phi_{X_1}(t))^n\Phi_{X_1}(t) = (\Phi_{X_1}(t))^{n+1}$.

  On conclut par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est symétrique et $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\Phi_{S_n}(t) = (\Phi_{X_1}(t))^n$.
- Puisque S_n est symétrique, $M_n = \dfrac{S_n}{n}$ l'est aussi, et on a alors :

$$\boxed{\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{M_n}(t) = \mathbb{E}(\cos(tM_n)) = \mathbb{E}\left(\cos\left(\frac{t}{n}S_n\right)\right) = \Phi_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \left(\Phi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n.}$$

21. • Soit $t > 0$. Puisque X_1 est entière, symétrique et vérifie $\mathcal{D}_\alpha$, la question **18** s'applique et donne :

$$\Phi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right) = 1 - \frac{\pi\alpha t}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc vu la question **20**, $\Phi_{M_n}(t) = \left(1 - \dfrac{\pi\alpha t}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1 - \dfrac{\pi\alpha t}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right)$ pour n assez grand.

Or $\ln\left(1-\dfrac{\pi\alpha t}{2n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\dfrac{\pi\alpha t}{2n}$, donc $n\ln\left(1-\dfrac{\pi\alpha t}{2n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-\dfrac{\pi\alpha t}{2}$.
On obtient ainsi :

$$\forall\, t>0, \quad \Phi_{M_n}(t)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\exp\left(-\frac{\pi\alpha t}{2}\right).$$

- Comme Φ_{M_n} est paire (question **14**), on a alors pour $t<0$:

$$\Phi_{M_n}(t)=\Phi_{M_n}(-t)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\exp\left(-\frac{\pi\alpha(-t)}{2}\right)=\exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right).$$

- Enfin ce résultat est évident pour $t=0$ (car $\Phi_{M_n}(0)=1=\exp(0)$).

On a donc bien : $\boxed{\forall\, t\in\mathbb{R},\ \Phi_{M_n}(t)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\exp\left(-\dfrac{\pi\alpha|t|}{2}\right).}$

22. Posons $g : t\mapsto \exp\left(-\dfrac{\pi\alpha|t|}{2}\right)$.
On a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\Phi_{M_n}(2n\pi)=(\Phi_{X_1}(2\pi))^n=(\mathbb{E}(\cos(2\pi X_1))^n=1$ puisque X_1 est entière, donc $\cos(2\pi X_1)=1$ et donc $\mathbb{E}(\cos(2\pi X_1))=1$. Ainsi :

$$|\Phi_{M_n}(2n\pi)-g(2n\pi)|=1-\exp(-\pi^2\alpha n)\leqslant \|\Phi_{M_n}-g\|_{\infty,\mathbb{R}}.$$

Comme $1-\exp(-\pi^2\alpha n)$ tend vers 1 quand $n\to+\infty$, la norme $\|\Phi_{M_n}-g\|_{\infty,\mathbb{R}}$ ne tend pas vers 0 quand $n\to+\infty$, de sorte que la convergence de la suite $(\Phi_{M_n})_{n\in\mathbb{N}}$ vers g n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.