Sujet 4 - Correction

E3A PC 2017 maths 1 Exercice 3

à partir d'un corrigé de M. Bourgade

1. (a) Vu que la série $\sum j(j-1)\mathbb{P}(X=j)$ converge absolument (le temr général est négligeable devant $1/j^2$), le théorème de transfert affirme que $X(X-1)$ est d'espérance finie et que

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{j=0}^{+\infty} j(j-1)\mathbb{P}(X=j) = \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{(j-2)!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{j!} = \lambda^2.$$

(b) On a $X^2 = X(X-1)+X$ est la somme de deux v.a.r.d. d'espérances finies. Par linéairité de l'esp l'espérance, X^2 aussi et :

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \mathbb{E}(X(X-1)+X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) = \lambda^2+\lambda.$$

2. Puisque X^2 est d'espérance finie, le théorème de transfert donne (réciproque) :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{j=0}^{+\infty} j^2\mathbb{P}(X=j).$$

Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$i^2\mathbb{P}(X\geq i) = i^2\sum_{j=i}^{+\infty}\mathbb{P}(X=j) \leq \sum_{j=i}^{+\infty} j^2\mathbb{P}(X=j) \leq \mathbb{E}(X^2) = \lambda^2+\lambda.$$

D'où : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(X \geq i\right) \leq \dfrac{\lambda^2+\lambda}{i^2}$. C'est aussi la seconde inégalité de Markov.

Comme la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{i^2}$ converge, il en est de même pour la série $\sum \mathbb{P}\left(X\geq i\right)$.

3. (a) On a $u_{i,k}>0$ et $\dfrac{u_{i+1,k}}{u_{i,k}} = \dfrac{\lambda}{k+i+1}$ donc :

$$\lim_{i\to+\infty}\frac{u_{i+1,k}}{u_{i,k}} = 0 < 1.$$

Ainsi, par la règle de D'Alembert, la série $\sum_{i\geq 1} u_{i,k}$ converge pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

(b) On a $0 \leq u_{i,k} \leq \left(\dfrac{\lambda}{k}\right)^i$. Ainsi, pour $k>\lambda$ on a $0<\dfrac{\lambda}{k}<1$ et la série géométrique de raison $\dfrac{\lambda}{k}$ converge.

D'où pour toute constante $K\geq\lambda$ et pour tout entier $k\geq K$, on a : $R_{n,k} = \sum_{i=n}^{+\infty} u_{i,k} \leq \sum_{i=n}^{+\infty}\dfrac{\lambda^i}{k^i}$.

4. (a) Soit un entier k tel que $k>\lambda$. On a :

$$\mathbb{P}(X\geq k) = \sum_{i=k}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i) = \left(1+\sum_{i=k+1}^{+\infty}u_{i-k,k}\right)\mathbb{P}(X=k) \leq \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{\lambda}{k}\right)^i\mathbb{P}(X=k) = \frac{k}{k-\lambda}\mathbb{P}(X=k).$$

Si on a de plus $k\geq 2\lambda$, alors :

$$\mathbb{P}(X>k) = \mathbb{P}(X\geq k) - \mathbb{P}(X=k) \leq \left(\frac{k}{k-\lambda}-1\right)\mathbb{P}(X=k) \leq \mathbb{P}(X=k).$$

(b) Comme $k \geq 1 \geq 2\lambda$, on a :

$$\sum_{i=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq i) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

(c) Comme X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, dans le cas général, on a $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq i)$.

C'est du cours ! Vous y trouverez une preuve !

5. (a) Une étude triviale des variations de la fonction réelle définie par $f(t) = \mathrm{e}^{-t} + t - 1$ montre qu'elle est à valeurs positives. On pouvait aussi utiliser la convexité de la fonction exponentielle. D'où : $\forall t \in \mathbb{R},\ 1 - t \leq \mathrm{e}^{-t}$.

(b) Soit $k \in \{0,\ 1, \ldots,\ n\}$. On a :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{n} = \frac{n^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \leq \frac{n^k}{k!} \exp\left(-\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{k-1} i\right) = \frac{n^k}{k!} \exp\left(-\alpha(n,k)\right).$$

(c) Soit $k \in \{0,\ 1, \ldots,\ n\}$. On a :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \binom{n}{k} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \leq \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\alpha(n,k)} \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}(n-k)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{\beta(n,k,\lambda)}.$$

(d) Soit $k \geq 2\lambda + 1$. Alors $\beta(n,k,\lambda) \leq 0$ et par suite $\mathbb{P}(Y = k) \leq \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}(X = k)$.

(e) Soit $k \geq 2\lambda + 1$. On a : $\sum\limits_{j=k+1}^{n} \mathbb{P}(Y = j) \leq \sum\limits_{j=k+1}^{n} \mathbb{P}(X = j) \leq \mathbb{P}(X > k) \leq \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.