Sujet 3 - Correction

E3A PSI 2021 Exercice 3

un corrigé très très détaillé de B. Winckler

1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrons que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-t^n)\,\mathrm{d}t$ converge. L'application $t \mapsto \exp(-t^n)$ est continue sur $[1, +\infty[$, et pour tout t au voisinage de $+\infty$ on a :
$$\exp(-t^n) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right) ;$$
en effet, d'après le théorème des croissances comparées : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 \exp(-t^n) = 0$. Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est d'exposant $2 > 1$, donc elle converge. La fonction $t \mapsto \exp(-t^n)$ étant positive, on peut utiliser le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, et on en déduit que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-t^n)\,\mathrm{d}t$ converge : d'où le résultat.

2. Nous allons utiliser le théorème de convergence dominée, dont nous rappelons l'énoncé : soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I. On suppose que :
   - $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I ;
   - il existe φ continue par morceaux et intégrable sur I telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|f_n| \leqslant \varphi$ (HYPOTHÈSE DE DOMINATION).

   Alors :
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est intégrable sur I ;
   - l'application f est intégrable sur I ;
   - la suite $\left(\displaystyle\int_I f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f$.

   Pour l'appliquer, on pose ici :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall t \in [1, +\infty[, \quad f_n(t) = \exp(-t^n).$$
   Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'application f_n est bien sûr continue sur $[1, +\infty[$ en tant que composée de l'exponentielle et d'une fonction puissance. De plus, pour tout $t \in]1, +\infty[$, on a : $-t^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ (limite d'une suite géométrique de raison $t > 1$), tandis que pour $t = 1$ on a : $-t^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$. Par composition avec l'exponentielle, on en déduit :
$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > 1, \\ \exp(-1) & \text{si } t = 1, \end{cases}$$
   ce qui démontre la convergence simple sur $[1, +\infty[$ de la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ vers l'application continue par morceaux : $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t > 1 \\ \exp(-1) & \text{si } t = 1 \end{cases}$. Il reste à vérifier l'hypothèse de domination. Pour cela, on note que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $t \in [1, +\infty[$, on a $t^n \geqslant t$, et donc :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall t \in [1, +\infty[, \quad |f_n(t)| \leqslant \exp(-t), \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

et l'application $\varphi : t \mapsto \exp(-t)$ est usuellement continue (par morceaux) et intégrable sur $[0, +\infty[$, donc sur $[1, +\infty[$ en particulier. L'hypothèse de domination est donc vérifiée.

Le théorème de convergence dominée s'applique, et on en déduit la convergence de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1} = \left(\int_1^{+\infty} \exp\left(-t^n\right) \mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 1}$. On a de plus :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} 0\mathrm{d}t = 0,$$

d'où le résultat.

Remarque. Même si je pense que le concepteur du sujet s'attendait effectivement à l'emploi du théorème de convergence dominée, il existe un moyen bien plus rapide d'obtenir ce résultat. Il est en effet facile de démontrer, par une étude de variations ou l'utilisation de la formule du binôme de Newton, que pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $u \in \mathbb{R}_+$, on a : $(1+u)^n \geqslant 1 + nu$. Pour tout $t \in [1, +\infty[$, en prenant $u = t - 1$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\forall t \in [1, +\infty[$, $t^n \geqslant 1 + n(t-1)$. Cela nous ramène à une intégrale rapidement calculable :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \int_1^{+\infty} \exp\left(-1 - n(t-1)\right) \mathrm{d}t = e^{-1}\left[\frac{e^{-n(t-1)}}{-n}\right]_1^{+\infty} = \frac{e^{-1}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On conclut avec le théorème des gendarmes.

3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. L'application $t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$, et de classe C^1 sur cet intervalle, donc le changement de variable $u = t^n$ dans l'intégrale I_n est licite. On a $\mathrm{d}u = nt^{n-1}\mathrm{d}t$, de sorte que :

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\exp(-t^n)}{nt^{n-1}}(nt^{n-1}\mathrm{d}t) = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{\exp(-t^n)}{(t^n)^{\frac{n-1}{n}}}(nt^{n-1}\mathrm{d}t) = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{\exp(-u)}{u^{\frac{n-1}{n}}}\mathrm{d}u.$$

4. D'après la question, pour tout entier $n \geqslant 1$ on a : $nI_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\exp(-u)}{u^{\frac{n-1}{n}}}\mathrm{d}u$. Calculons la limite de cette dernière intégrale, encore une fois grâce au théorème de convergence dominée. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \forall u \in [1, +\infty[, \quad g_n(u) = \frac{\exp(-u)}{u^{\frac{n-1}{n}}}.$$

C'est un quotient d'une exponentielle et d'une fonction puissance, donc g_n est continue sur $[1, +\infty[$ pour tout entier $n \geqslant 1$. De plus, pour tout $u \in [1, +\infty[$, on montre qu'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{u}$ (en cas de doute dans ce calcul de limite, écrire : $\frac{1}{u^{\frac{n-1}{n}}} = e^{-\frac{n-1}{n}\ln(u)}$), et on en déduit que la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[1, +\infty[$ vers l'application $g : u \mapsto \frac{\exp(-u)}{u}$, qui est continue (par morceaux) sur $[1, +\infty[$. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et tout $u \in [1, +\infty[$ on a $u^{\frac{1}{n}} \leqslant u^1$ et donc :

$$|g_n(u)| = \frac{\exp(-u)}{u}u^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{\exp(-u)}{u}u^1 = \exp(-u) \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

et l'application $\varphi : u \mapsto \exp(-u)$ est usuellement continue (par morceaux) et intégrable sur $[0, +\infty[$, donc sur $[1, +\infty[$ en particulier. L'hypothèse de domination est donc vérifiée.

Le théorème de convergence dominée s'applique, et on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{\exp(-u)}{u^{\frac{n-1}{n}}}\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{\exp(-u)}{u}\mathrm{d}u.$$

Notons J cette intégrale. On a montré : $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = J$.

5. On a immédiatement : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{J}{n}$. Enfin... si l'on s'est bien assuré que $J \neq 0$! ! ! !

   Puisque $h : u \longmapsto \dfrac{\exp(-u)}{u}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$, si J était nulle, on aurait pour tout $u \geqslant 1$, $h(u) = 0$, absurde. Donc $J \neq 0$ et $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{J}{n}$.

6. (a) On a $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{J}{n}$, avec $J > 0$ (car c'est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non identiquement nulle sur $[1, +\infty[$). On en déduit que les séries entières $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} I_n x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ ont même rayon de convergence. Or cette dernière série entière est usuelle : elle est de rayon de convergence 1, sa somme étant l'application $x \mapsto -\ln(1-x)$. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} I_n x^n$ est $R = 1$.

   De nombreuses autres rédactions étaient possibles...

   (b) D'après la question précédente, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} I_n x^n$ converge pour tout $x \in]-1, 1[$ et diverge pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > 1$. Il reste à savoir si elle converge pour $x = 1$ et $x = -1$.

   Prenons $x = 1$. On s'intéresse donc à la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} I_n$. Or : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{J}{n} > 0$, et la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} I_n$ diverge aussi, et donc f n'est pas définie en $x = 1$.

   Prenons $x = -1$. On s'intéresse donc à la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n I_n$. Nous allons montrer qu'elle converge en utilisant le théorème spécial des séries alternées. Pour cela, on note que $I_n \geqslant 0$ pour tout entier $n \geqslant 1$ par croissance de l'intégrale (en effet une exponentielle est positive), donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n I_n$ est bien alternée. De plus, on sait déjà que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 : c'était l'objet de la question 2. Il reste à démontrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Mais pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $t \geqslant 1$, on a : $t^{n+1} \geqslant t^n$, donc pour ces mêmes valeurs de n et t on a : $\exp(-t^{n+1}) \leqslant \exp(-t^n)$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $I_{n+1} \leqslant I_n$, donc la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

   Toutes les hypothèses du théorème spécial des séries alternées étant vérifiées, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n I_n$ converge, donc f est définie pour $x = -1$.

   En conclusion, f est définie sur $[-1, 1[$.