# Sujet 2 - Correction

**Centrale MP 2018 maths 2 (extrait)**

*à partir d'un corrigé d'Édouard Lucas*

## II Exemples de fonctions harmoniques

### *II.A -*

**Q 1.** *Remarque : on a $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ par produit car $(x,y) \longmapsto u(x)$ et $(x,y) \longmapsto v(y)$ le sont*

On a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $0 = \Delta f(x,y) = u''(x)v(y) + u(x)v''(y)$.

Comme $v$ est non identiquement nulle, ceci nous fournit $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $v(y_0) \neq 0$.

En posant $\lambda = \frac{v''(y_0)}{v(y_0)}$, on a alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $u''(x) + \lambda u(x) = 0$

donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $0 = \Delta f(x,y) = -\lambda u(x)v(y) + u(x)v''(y) = (v''(y) - \lambda v(y))\, u(x)$

En prenant $x = x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $u(x_0) \neq 0$, on a $\forall y \in \mathbb{R}$, $0 = v''(y) - \lambda v(y)$ Ainsi

$\boxed{\text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } u \text{ et } v \text{ soient solutions respectives des équations } z'' + \lambda z = 0 \text{ et } z'' - \lambda z = 0}$

**Q 2.** On note les équations différentielles $E_1 :\ z'' + \lambda z = 0$ et $E_2 :\ z'' - \lambda z = 0$

**Si** $\lambda = 0$ Les solutions de $E_1$ (ou $E_2$) sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ax + B$ avec $A$ et $B \in \mathbb{R}$

**Si** $\lambda > 0$ Les solutions de $E_1$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto A\cos\left(t\sqrt{\lambda}\right) + B\sin\left(t\sqrt{\lambda}\right)$ avec $A$ et $B \in \mathbb{R}$

Les solutions de $E_2$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto A'\mathrm{ch}\left(t\sqrt{\lambda}\right) + B'\mathrm{sh}\left(t\sqrt{\lambda}\right)$ avec $A'$ et $B' \in \mathbb{R}$

**Si** $\lambda < 0$ Les solutions de $E_2$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto A\cos\left(t\sqrt{-\lambda}\right) + B\sin\left(t\sqrt{-\lambda}\right)$ avec $A$ et $B \in \mathbb{R}$

Les solutions de $E_1$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto A'\mathrm{ch}\left(t\sqrt{-\lambda}\right) + B'\mathrm{sh}\left(t\sqrt{-\lambda}\right)$ avec $A'$ et $B' \in \mathbb{R}$

**Réciproquement :** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u$ et $v$ solutions non nulles respectives de $E_1 :\ z'' + \lambda z = 0$ et $E_2 :\ z'' - \lambda z = 0$.

Alors $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et ainsi $f : (x,y) \longmapsto u(x)v(y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Et on a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\Delta f(x,y) = u''(x)v(y) + u(x)v''(y) = \lambda u(x)v(y) - \lambda u(x)v(y) = 0$

donc $f$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2$

**Conclusion :** Les équations différentielles étant linéaire homogène d'ordre 2 leur solutions forment un plan vectoriel.

$$\boxed{\begin{array}{l}
\text{Une fonction } f \text{ à variables séparables sur } \mathbb{R}^2 \text{ est harmonique non nulles si et seulement si} \\
\qquad\qquad \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R},\ (A,B) \text{ et } (A',B') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ tels que} \\
\text{si} \quad \lambda = 0 \quad \text{alors} \quad f : (x,y) \longmapsto (Ax+B)\,(A'y+B') \\
\text{si} \quad \lambda > 0 \quad \text{alors} \quad f : (x,y) \longmapsto \left(A\cos\left(x\sqrt{\lambda}\right) + B\sin\left(x\sqrt{\lambda}\right)\right)\left(A'\mathrm{ch}\left(y\sqrt{\lambda}\right) + B'\mathrm{sh}\left(y\sqrt{\lambda}\right)\right) \\
\text{si} \quad \lambda < 0 \quad \text{alors} \quad f : (x,y) \longmapsto \left(A\mathrm{ch}\left(x\sqrt{-\lambda}\right) + B\mathrm{sh}\left(x\sqrt{-\lambda}\right)\right)\left(A'\cos\left(y\sqrt{-\lambda}\right) + B'\sin\left(y\sqrt{-\lambda}\right)\right)
\end{array}}$$

### *II.B -*

**Q 3.** Les fonctions $(r,\theta) \longmapsto r\cos(\theta)$ et $(r,\theta) \longmapsto r\sin(\theta)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ par produits

donc la fonction $(r,\theta) \longmapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ par composantes

de plus cette fonction est à valeurs dans l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ où $f$ y est de classe $\mathcal{C}^2$

donc par composition $\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}}$

**Q 4.** On utilise la formule de la chaîne dont l'écriture abusive est :
$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}$

Ainsi $\boxed{\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))}$

et $\boxed{\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))}$

**Q 5.** On continue à appliquer la formule de la chaîne avec une écriture abusive en servant du calcul ci-dessus :
$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \cos(\theta)\left(\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + \sin(\theta)\left(\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\right)$
puis à l'aide du théorème de Schwarz avec $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ : on a successivement

$$\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = \cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(2\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))}$$

puis
$\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = -r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} - r\sin(\theta)\left(-r\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + r\cos(\theta)\left(-r\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$
puis à l'aide du théorème de Schwarz avec $f$ de classe $\mathcal{C}^2$, on a :

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = -r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) - r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \\ r^2\sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) - r^2\sin(2\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r^2\cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\end{gathered}}$$

**Q 6.** Soit $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, on a à l'aide des calculs précédents :

$$r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\right)$$

On suppose que pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, $r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0$
avec ce qui précède :

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ \Delta f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = 0$$

Or pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, en prenant $r = \sqrt{x^2+y^2}$,
on a $r > 0$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$, tel que $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$
et ainsi $\forall (x,y)\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ \Delta f(x,y) = 0$ d'où $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$
La réciproque est immédiate. Ainsi on a bien :

$$\boxed{f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \text{ si et seulement si, pour tout } (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0}$$

**Q 7.** **Analyse :** On considère $f$ une fonction harmoniques radiales de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On note $g$ comme ci dessus.
On peut alors trouver $h$ fonction définie sur $]0,+\infty[$ telle que $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ g(r,\theta) = h(r)$
Comme $g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ alors $h$ l'est sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = 0 \ \text{ et } \ \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = h'(r) \ \text{ et } \ \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = h''(r)$$

La question précédente donne alors : $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ r^2h''(r) + rh'(r) = 0$
donc $h'$ est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 : $tz' + z = 0$
Une solution évidente est $t \mapsto 1/t$ ce qui nous fournit $A \in \mathbb{R}$ tel que $h' : r \longmapsto A/r$
Ce qui nous fournit $B \in \mathbb{R}$ tel que $h : r \longmapsto A\ln(r) + B$
donc $g : (r,\theta) \longmapsto A\ln(r) + B$ puis $f : (x,y) \longmapsto A\ln(\sqrt{x^2+y^2}) + B$

**Synthèse :** On suppose qu'il existe $A$ et $B \in \mathbb{R}$ tels que $f : (x,y) \longmapsto A\ln(x^2+y^2)+B$
alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et radiale car
la fonction $g : (r,\theta) \longmapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta) = 2A\ln(r)+B$ est indépendante de $\theta$
et on vérifie facilement que $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ r^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0$
donc $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ d'après Q10.

$$\boxed{\text{les fonctions harmoniques radiales de } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ sont les fonctions : } (x,y) \longmapsto A\ln(x^2+y^2)+B \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}}$$

**Q 8.** En se servant de la question précédente, on cherche $A$ et $B \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} 2A\ln(r_1)+B = a \\ 2A\ln(r_2)+B = b \end{cases}$

On remarque que $A = \dfrac{b-a}{2\left(\ln(r_2)-\ln(r_1)\right)}$ et $B = \dfrac{\ln(r_2)a - \ln(r_1)b}{\ln(r_2)-\ln(r_1)}$ conviennent
Alors d'après Q11, en prenant

$$\boxed{f : (x,y) \longmapsto \frac{(b-a)\ln(x^2+y^2) + 2\ln(r_2)a - 2\ln(r_1)b}{2\left(\ln(r_2)-\ln(r_1)\right)} \text{ sur } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \text{ on a } \begin{cases} f \in \in(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \mathbb{R}) \\ \Delta f = 0 \\ f(x,y) = a \text{ si } \|(x,y)\| = r_1 \\ f(x,y) = b \text{ si } \|(x,y)\| = r_2 \end{cases}}$$

***II.C -***

**Q 9.** On suppose que $f$ n'est pas identiquement nulle. Ceci nous fournit $r_0 = \|(x_0,y_0)\|$ tel que $u(r_0) \neq 0$
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ On a $u(r_0)v(\theta+2\pi) = f(r\cos(\theta+2\pi), r\sin(\theta+2\pi)) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = u(r_0)v(\theta)$
d'où $v(\theta+2\pi) = v(\theta)$
ainsi $\boxed{\text{si } f \text{ n'est pas identiquement nulle, alors } v \text{ est } 2\pi\text{-périodique}}$

**Q 10.** On suppose que $f$ est harmonique et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,
On note $g$ comme en II.B. Alors $g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ et

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = u(r)v''(\theta) \ \text{ et } \ \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = u'(r)v(\theta) \ \text{ et } \ \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = u''(r)v(\theta)$$

En utilisant Q10 : on a $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R},\ r^2u''(r)v(\theta) + u(r)v''(\theta) + ru'(r)v(\theta) = 0$
Comme $f$ est non identiquement nulle, il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $v(\theta_0) \neq 0$. En prenant $\lambda = \dfrac{-v''(\theta_0)}{v(\theta_0)}$, alors

$$\boxed{u \text{ est solution de l'équation différentielle (II.1) : } r^2z''(r) + rz'(r) - \lambda z(r) = 0}$$

On choisit $r_0 > 0$ tel que $u(r_0) \neq 0$, on a alors

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ v''(\theta) + \frac{r_0^2u''(r_0) + r_0u'(r_0)}{u(r_0)}v(\theta) = 0$$

comme $u$ est solution de l'équation différentielle (II.1), on a : $\dfrac{r_0^2u''(r_0) + r_0u'(r_0)}{u(r_0)} = \lambda$
ainsi $\boxed{v \text{ est solution de l'équation différentielle (II.2) : } z''(\theta) + \lambda z(\theta) = 0}$

**II.C.1)** On suppose ici que $\lambda = 0$.

**Q 11.** Les solutions de (II.2) sont les fonctions affines.

$\boxed{\text{Les solutions } 2\pi\text{-périodiques de (II.2) sont les fonctions constantes}}$

**Q 12.** En faisant comme en Q7. :

$\boxed{\text{Les solutions de (II.1) sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ sont les fonctions de la forme } r \longmapsto A\ln(r)+B.}$

**Q 13.** D'après Q11. dans le cas où $\lambda = 0$, les fonctions harmoniques à variables polaires séparables sont radiales. Il est clair que toutes fonctions radiale sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ est à variables polaires séparable. Alors d'après Q7.,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{les fonctions harmoniques à variables polaires séparables sont les fonctions :}\\ \qquad (x, y) \longmapsto A\ln(x^2 + y^2) + B \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}\end{array}}$$

**II.C.2)** On suppose désormais $\lambda \neq 0$.

**Q 14.** **Analyse :** Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel qu'il existe $v$ solution non nulles $2\pi$-périodiques de (II.2) : $z''(\theta) + \lambda z(\theta) = 0$

Par l'absurde si $\lambda < 0$, comme en Q2 on peut écrire $v : \theta \longmapsto A\mathrm{e}^{\theta\sqrt{-\lambda}} + B\mathrm{e}^{-\theta\sqrt{-\lambda}}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$

Si $A \neq 0$, alors $\lim\limits_{\theta \to +\infty} |v(\theta)| = +\infty$

Si $A = 0$, alors $B \neq 0$ et $\lim\limits_{\theta \to -\infty} |v(\theta)| = +\infty$

Or $v(\mathbb{R}) = v([0, 2\pi])$ car $v$ est $2\pi$-périodique et d'après le théorème des bornes atteintes $v$ est bornée sur le segment $[0, 2\pi]$ car $v$ y est continue

d'où $v$ est bornée sur $\mathbb{R}$ ce qui est en contradiction avec les limites

d'où $\lambda > 0$

comme en Q2 on peut écrire $v : \theta \longmapsto A\cos\left(\theta\sqrt{\lambda}\right) + B\sin\left(\theta\sqrt{\lambda}\right)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$

ou encore, d'après le cours, $v : \theta \longmapsto \rho\cos\left(\theta\sqrt{\lambda} + \varphi\right)$ avec $\varphi \in \mathbb{R}$ et $\rho = \sqrt{A^2 + B^2} > 0$ car $v$ non nulle

Comme $v\left(\dfrac{-\varphi}{\sqrt{\lambda}}\right) = v\left(\dfrac{-\varphi}{\sqrt{\lambda}} + 2\pi\right)$ et $\rho \neq 0$, on en déduit que $1 = \cos\left(2\pi\sqrt{\lambda}\right)$

ce qui nous fournit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2\pi\sqrt{\lambda} = k2\pi$ donc $\lambda = k^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

<u>*Autre méthode pour conclure l'analyse :*</u> *En pensant à la formule « $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ », on peut également affirmer que le groupe des périodes de $\theta \mapsto \cos\left(\theta\sqrt{\lambda} + \varphi\right)$ est $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\mathbb{Z}$. Puis utiliser que $2\pi \in \dfrac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\mathbb{Z}$ ...*

**Synthèse :** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Prenons $\lambda = k^2$. Alors $\lambda > 0$ et $\sqrt{\lambda} = k$

Les solution de (II.2) sont les fonctions $\theta \longmapsto A\cos(k\theta) + B\sin(k\theta)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$

Elles sont toutes $2\pi/k$ périodiques donc $2\pi$ périodiques

En prenant $(A, B) = (1, 0)$, on a une solution non nulle.

**Conclusion :**

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour que (II.2) admette des solutions } 2\pi\text{-périodiques non nulles , il faut et il suffit qu'il existe } k \in \mathbb{N}^*\\ \text{tel que } \lambda = k^2\end{array}}$$

Dans ce cas,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{les solutions non nulles } 2\pi\text{-périodiques de (II.2) sont les}\\ \qquad \theta \longmapsto A\cos(k\theta) + B\sin(k\theta) \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\end{array}}$$

**Q 15.** Soit $z$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ On pose $Z : t \longmapsto z(\mathrm{e}^t)$.

Alors par composition $Z$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall r > 0,\ z(r) = Z(\ln(r))$.

Réciproquement si $Z$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ alors $z : r \longmapsto Z(\ln(r))$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

Pour $r > 0$, on a $z(r) = Z(\ln(r))$ et $z'(r) = \dfrac{Z'(\ln(r))}{r}$ et aussi $z''(r) = \dfrac{Z''(\ln(r)) - Z'(\ln(r))}{r^2}$

Ainsi $r^2 z''(r) + rz'(r) - \lambda z(r) = Z''(\ln(r)) - \lambda Z(\ln(r))$

Comme ln est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $\mathbb{R}$.

$z$ est solution de (II.1) si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R},\ Z''(t) - \lambda Z(t) = 0$

On a déjà vu cette équation en $w$ : $w'' - \lambda w = 0$ (II.1b)

Grâce à la remarque sur la classe $\mathcal{C}^2$, en début de question, on a une bijection ( qui à $z$ associe $Z$)entre les ensembles des solutions de (II.1) et de (II.1b)

Si $\lambda > 0$, les solutions de (II.1), sont les fonctions

$$r \longmapsto A\exp\left(\ln(r)\sqrt{\lambda}\right) + B\exp\left(-\ln(r)\sqrt{\lambda}\right)$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

Si $\lambda < 0$, les solutions de (II.1), sont les fonctions

$$r \longmapsto A\cos\left(\ln(r)\sqrt{-\lambda}\right) + B\sin\left(-\ln(r)\sqrt{-\lambda}\right)$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

**Q 16. Analyse :** On suppose que $f$ est harmonique à variables polaires séparables non identiquement nulles qui se prolongeant par continuité en 0. Alors d'après les questions précédentes,
on peut trouver $k \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $(A', B') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tels que

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R},\ f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = (A'\exp(\ln(r)k) + B'\exp(-\ln(r)k))\times(A\cos(k\theta) + B\sin(k\theta))$$

Je note $v : \theta \longmapsto A\cos(k\theta)+B\sin(k\theta)$ donc $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R},\ f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \left(A'r^k + B'r^{-k}\right)v(\theta)$
Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $v(\alpha) \neq 0$
Comme il existe $\ell \in \mathbb{R}$, tel que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell$ alors $\lim\limits_{r\to 0} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \ell$
donc $r \longmapsto A'r^k + B'r^{-k}$ admet une limite finie en 0 donc $B' = 0$

**Synthèse** On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $A$ et $B$ dans $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R},\ f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = r^k\left(A\cos(k\theta) + B\sin(k\theta)\right)$$

Remarque : j'ai rajouté la fonction nulle
Alors $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ à variables polaires séparables de plus $f$ est alors de classe $\mathcal{C}^2$ d'après l'énoncé (II.C) car $u : r \mapsto r^k$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $v : \theta \longmapsto A\cos(k\theta) + B\sin(k\theta)$ est $2\pi$-périodique et $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$
On définit $g$ comme en II.B. Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R}$ :

$$r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = k(k-1)g(r,\theta) \quad\text{et}\quad r\frac{\partial^2 g}{\partial r}(r,\theta) = kg(r,\theta) \quad\text{et}\quad \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = -k^2 g(r,\theta)$$

donc $r^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\dfrac{\partial^2 g}{\partial r}(r,\theta) = 0$ d'où $f$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ d'après Q10.
De plus $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R},\ |f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))| \leq (|A| + |B|)\, r^k$
donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leq (|A| + |B|)\,(x^2+y^2)^{k/2}$
or $(x^2+y^2)^{k/2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$ donc $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$
Ainsi $f$ se prolonge par continuité en 0

Les fonctions harmoniques sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ à variables polaires séparables qui se prolongent par continuité en $(0,0)$ sont les fonctions $f$ vérifiant

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R},\ f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = r^k\left(A\cos(k\theta) + B\sin(k\theta)\right)$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$