Sujet 1 - Correction

CCINP MP 2023 Exercice 2

Un corrigé de Mustapha Laamoum

On définit la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Soit $\varphi : x \mapsto x - e^{-x}$, on a $\varphi'(x) = 1 + e^{-x}$, donc φ est strictement croissante et $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$, le théorème des valeurs intermédiaire (généralisé) donne φ admet une unique solution, α sur $\mathbb{R}$.
De plus on a $\varphi(0) = -1$ donc α est strictement positive .

2. (x, y) est poit critique de f si et seulement si il annule les dérivées partielles de f , il est donc solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2y - e^{-x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2x + 4y = 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} x = 2y \\ x - e^{-x} = 0 \end{cases}$$

Donc f possède un unique point critique $\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right)$, *(α l'unique solution de l'équation $x = e^{-x}$)* .

3. La matrice hessienne de f et (x, y) est donnée par

$$H_f(x, y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x, y)\right)_{\substack{1\le i\le 2\\ 1\le j\le 2}} = \begin{pmatrix} 2 + e^{-x} & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

donc

$$H_f\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 + \alpha & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice symétrique réelle donc elle est diagonalisable , elle admet deux valeurs propres réelles λ et μ vérifiant :

$$\begin{cases} \lambda\mu = \det\left(H_f\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right)\right) = 4(\alpha + 1) \\ \lambda + \mu = \operatorname{Tr}\left(H_f\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right)\right) = \alpha + 6 \end{cases}$$

α est strictement positive donc $\lambda\mu > 0$ et $\lambda + \mu > 0$, par conséquent $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, ainsi est définie positive et $\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right)$ est un minimum local.