Sujet 12 - Correction

CCINP PSI 2023 (problème 1)

Partie I - Un développement en série entière

Q9. C'est une série entière de référence. Puisque $\alpha \notin \mathbb{N}$, son rayon de convergence est $\boxed{R = 1}$.

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!}.}$$

Q10. Si $x \in]-1,1[$ alors $-x \in]-1,1[$ et d'après la question (**Q9**) avec $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, on a les égalités suivantes.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1+2n-2}{2}\right)\frac{(-x)^n}{n!} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} 1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \frac{(-x)^n}{n!} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{(2n)!}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \frac{x^n}{n!} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n
\end{aligned}$$

Partie II - Probabilité de retour à l'origine

Q11. Tout d'abord $X_t(\Omega) = \{-1, 1\}$ donc $\left(\dfrac{X_t+1}{2}\right)(\Omega) = \{0, 1\}$ et :

$$P\left(\frac{X_t+1}{2} = 1\right) = P(X_t = 1) = p \quad \text{et} \quad P\left(\frac{X_t+1}{2} = 0\right) = P(X_t = -1) = 1-p.$$

Donc $\boxed{\dfrac{X_t+1}{2} \sim \mathcal{B}(p).}$

Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes donc par le lemme des coalitions, les variables aléatoires $\dfrac{X_1+1}{2}, \dots, \dfrac{X_n+1}{2}$ sont aussi indépendantes. Comme elles suivent toutes une même loi de Bernoulli de paramètre p, leur somme $Y_n = \displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2}$ suit une loi binomiale de paramètres n et p.

$$\boxed{Y_n(\Omega) = [\![0, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0, n]\!],\ P(Y_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.}$$

Q12. Avec les notations de l'énoncé, on a $Y_n = \sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2} = \frac{1}{2}(S_n + n)$.

Et donc l'événement $(S_n = 0)$ est aussi l'évenement $\left(Y_n = \frac{n}{2}\right)$.

Comme $Y_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$, si n est impair, $P(S_n = 0) = 0$.

Si n est pair, alors $P(S_n = 0) = P\left(Y_n = \frac{n}{2}\right) = \binom{n}{n/2} p^{n/2}(1-p)^{n-n/2}$.

On a bien $\boxed{u_n = P(S_n = 0) = \begin{cases} \binom{n}{n/2}(p(1-p))^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

Q13. On a $u_{2n} = \binom{2n}{n}(p(1-p))^n$.

On voudrait utiliser le résultat de (**Q10**) avec $\frac{x^n}{2^{2n}} = (p(1-p))^n$, c'est-à-dire avec $x = 4p(1-p)$. Or l'application $x \in [0, 1] \longmapsto x(1-x)$ prend ses valeurs dans $[0, 1/4]$ et atteint son maximum $\frac{1}{4}$ uniquement en $x = \frac{1}{2}$. On distingue deux cas.

• si $p \neq \frac{1}{2}$: alors $x = 4p(1-p) \in]0, 1[$ et donc la série $\sum u_{2n} = \sum \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} x^n$ converge. Par conséquent, son terme général tend vers 0.

• si $p = \frac{1}{2}$: par la formule de Stirling, on a :

$$u_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2^{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \frac{\sqrt{4n\pi}}{2n\pi} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

• Remarque : dans les deux cas, on a

$$u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{n\pi}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dans tous les cas, on a bien démontré, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 0.}$

Ce qui signifie que la probabilité de retour à l'origine au bout de $2n$ déplacements tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Partie III - Nombre de passages par l'origine

Q14. T_n représente le nombre de passage à l'origine au cours de $2n$ déplacements.

Q15. $O_{2j}(\Omega) = \{0, 1\}$ avec $P(O_{2j} = 1) = P(S_{2j} = 0) = u_{2j}$ donc $\boxed{O_{2j} \sim \mathcal{B}(u_{2j}).}$

De plus , par linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{n} O_{2j}\right) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{E}(O_{2j}) = \sum_{j=0}^{n} u_{2j}$$

On a donc bien $\boxed{\mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j}(p(1-p))^j.}$

Q16. On suppose que $p \neq \dfrac{1}{2}$.

On a alors $4p(1-p) \in]0,1[$ et en appliquant le résultat de (**Q10**) à $x = 4p(1-p)$, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} (4p(1-p))^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} (p(1-p))^n$$

ce qui signifie par définition de série convergente que :

$$\boxed{\text{Si } p \neq \frac{1}{2} \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j} (p(1-p))^j = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}.}$$

Q17. On suppose que $p = \dfrac{1}{2}$. On montre le résultat attendu par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$: $T_0 = O_0 = 1$ car à l'instant $t = 0$, la particule est à l'origine. Donc $\mathbb{E}(T_0) = \mathbb{E}(1) = 1$.

De plus, pour $n = 0$, $\dfrac{2n+1}{2^{2n}} \dbinom{2n}{n} = 1$, le résultat est donc vérifié pour $n = 0$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose le résultat démontré pour ce n. On a $T_{n+1} = T_n + O_{2n+2}$.

Par linéarité de l'espérance et par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_{n+1}) &= \mathbb{E}(T_n) + \mathbb{E}(O_{2n+2}) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} \\
&= \frac{1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} \left((2n+1)2^2 \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} + 1 \right) \\
&= \frac{1}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1} (2(n+1)+1) = \frac{2n+3}{2^{2n+2}} \binom{2n+2}{n+1}
\end{aligned}$$

- Finalement, par le principe de récurrence, on a démontré : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.}$

Méthode 1 : On utilise comme cela est suggéré le résultat précédent.

On a vu en (**Q13**) que dans ce cas, $u_{2n} = \dfrac{1}{2^{2n}} \dbinom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$.

On a donc $\mathbb{E}(T_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2n}{\sqrt{n\pi}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et alors $\boxed{\mathbb{E}(T_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$

Méthode 2 : sans l'expression de l'espérance

On a vu en (**Q13**) que dans ce cas, $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$.

Or la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, donc par comparaison (les termes sont positifs), la série $\sum u_{2n}$ diverge. Or, ses sommes partielles sont croissantes (termes positifs), comme elles divergent, elles divergent vers $+\infty$, ce qui s'écrit :

$$\boxed{\text{Si } p = \frac{1}{2} \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j} (p(1-p))^j = +\infty.}$$