Sujet 11 - Correction

CCP PC 2004 maths 1

D'après un corrigé de Michel Carré, lycée Joffre, Montpellier

PARTIE I

1. (a) On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

   i. L'examen des colonnes de M montre aussitôt que M, et donc aussi M^T, est de rang 2. Par le théorème du rang, $\mathrm{Ker}(M)$ et $\mathrm{Ker}\,(M^T)$ sont de dimension 2 ; il suffit donc de trouver deux vecteurs non colinéaires dans chacun d'eux pour obtenir une base.
   On désigne par $(E_k)_{1\leq k\leq 4}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
   On choisit par exemple :

   $$\boxed{(E_1 - E_2,\, E_1 - E_3) \text{ pour base de } \mathrm{Ker}(M) \text{ et } (E_1 + E_2 - E_3,\, E_2 - E_4) \text{ pour base de } \mathrm{Ker}\,(M^T).}$$

   Enfin, $E_1 - E_2 \notin \mathrm{Ker}\,(M^T)$ et $E_2 - E_4 \notin \mathrm{Ker}(M)$, donc il n'y a pas d'inclusion entre $\mathrm{Ker}(M)$ et $\mathrm{Ker}\,(M^T)$.

   ii. De façon évidente, $(E_1 + E_3,\, E_1 - E_2 - E_4)$ est une base de $\mathrm{Im}(M)$ et $(E_1 + E_2 + E_3,\, E_4)$ est une base de $\mathrm{Im}\,(M^T)$.
   Il est clair que $E_1 + E_3 \notin \mathrm{Im}\,(M^T)$ et que $E_4 \notin \mathrm{Im}(M)$, il n'y a donc pas d'inclusion entre $\mathrm{Im}(M)$ et $\mathrm{Im}(M^T)$.

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

   i. $\mathrm{Ker}(A)$ est évidemment inclus dans $\mathrm{Ker}\,(A^T A)$ (à détailler quand même !) .
   Réciproquement, soit $X \in \mathrm{Ker}\,(A^T A)$.
   On a $A^T AX = 0$, d'où $0 = X^T A^T AX = (AX)^T (AX) = \|AX\|^2$.
   Par conséquent, $AX = 0$, *i.e.* $X \in \mathrm{Ker}(A)$.
   On a ainsi démontré $\boxed{\mathrm{Ker}\,(A^T A) = \mathrm{Ker}(A).}$
   L'égalité $\mathrm{Ker}\,(A\,A^T) = \mathrm{Ker}\,(A^T)$ s'obtient en remplaçant A par A^T.

   ii. $A^T A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, donc, d'après le théorème du rang et en utilisant le a) :

   $$\mathrm{rg}(A^T A) = p - \dim\big(\mathrm{Ker}\,(A^T A)\big) = p - \dim(\mathrm{Ker}(A)) = \mathrm{rg}(A).$$

   En remplaçant A par A^T, il vient $\boxed{\mathrm{rg}(A\,A^T) = \mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(A).}$

   iii. Les inclusions $\mathrm{Im}(A^T A) \subset \mathrm{Im}(A^T)$ et $\mathrm{Im}(A\,A^T) \subset \mathrm{Im}(A)$ sont évidentes et, d'après b), $\mathrm{Im}(A^T A)$ et $\mathrm{Im}(A^T)$ ont la même dimension, ainsi que $\mathrm{Im}(A\,A^T)$ et $\mathrm{Im}(A)$. On a donc bien

   $$\boxed{\mathrm{Im}(A^T A) = \mathrm{Im}(A\,A^T) = \mathrm{Im}(A).}$$

(c) i. La base $(e_k)_{1\leq k\leq r}$ de F étant orthonormale, on a pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}_q^2$:

   $g_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} b_{k,i} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{r} (B^T)(i,k) B(k,j) = (B^T B)(i,j)$. Cela montre que $\boxed{G = B^T B.}$
   On déduit alors du (b).ii que $\mathrm{rg}(G) = \mathrm{rg}(B)$, puis que $\mathrm{rg}(G) = \mathrm{rg}(\mathcal{S})$, puisque B est la matrice de $\mathcal{S}$ dans une base de F.

ii. G est symétrique, donc G est diagonalisable dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de G et $X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ un vecteur propre de G associé à λ. On a :

$$0 \leq \|BX\|^2 = (BX)^T(BX) = X^T B^T BX = X^T GX = X^T(\lambda X) = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2,$$

ainsi $\boxed{\lambda \geq 0.}$

iii. $\gamma(x_1, \ldots, x_q) = \det(G)$ est le produit des valeurs propres de G, donc est positif ou nul d'après le ii).
De plus :

$$\boxed{\gamma(x_1, \ldots, x_q) = 0 \Longleftrightarrow G \text{ non inversible } \Longleftrightarrow \operatorname{rg}(G) < q \Longleftrightarrow \operatorname{rg}(\mathcal{S}) < q \ (\textit{cf } \text{a)}) \Longleftrightarrow \mathcal{S} \text{ est liée.}}$$

iv. Prenons $q = 2$. On a alors $G = \begin{pmatrix} \|x_1\|^2 & \langle x_2, x_1\rangle \\ \langle x_2, x_1\rangle & \|x_2\|^2 \end{pmatrix}$, et $\gamma(x_1, x_2) = \|x_1\|^2\|x_2\|^2 - \langle x_2, x_1\rangle^2$.
Avec le c), on retrouve que $\langle x_2, x_1\rangle^2 \leq \|x_1\|^2\|x_2\|^2$, avec égalité si et seulement si x_1 et x_2 sont colinéaires.

(d) Posons $x'_j = x_j + \sum_{k\neq j} \alpha_k x_k$. Notons $S' = (x_1, ..., x'_j, ..., x_q)$. S et S' engendrent le même SEV .
Notons B' la matrice des composantes de $(x_1, ..., x'_j, ..., x_q)$ dans la base $(e_1, ..., e_r)$ et $G' = (B')^T B'$.
On remplace la colonne C'_j de $\det(G')$ par $C'_j - \sum_{k\neq j} \alpha_k C'_k$:

$< x_i, x'_j > - \sum_{k\neq j} \alpha_k < x_i, x_k > = < x_i, x_j >$ (pour $i = j$ on a en premier vecteur x'_j)

On remplace la ligne L''_j du déterminant obtenu par $L''_j - \sum_{k\neq j} \alpha_k L''_k$ et on retrouve $\det(G)$.

(e) Dans cette question q est supérieur ou égal à 2.

i. On note L le sous-espace vectoriel engendré par $(x_2, x_3, \cdots, x_q)$ et $p_L(x_1)$ la projection orthogonale de x_1 sur L, puis on pose $h_1 = x_1 - p_L(x_1)$.
$p_L(x_1)$ est une combinaison linéaire de $(x_2, \ldots, x_q)$, donc d'après 4.,

$$\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_q) = \gamma(h_1, x_2, \ldots, x_q).$$

Mais $h_1 \in L^\perp$, donc $\langle h_1, x_j\rangle = 0$ pour $j \geq 2$, donc $\gamma(h_1, x_2, \ldots, x_q) = \|h_1\|^2 \gamma(x_2, \ldots, x_q)$, par développement suivant la première ligne.

ii. A. Par le théorème de Pythagore, $\|h_1\|^2 \leq \|x_1\|^2 = \gamma(x_1)$, donc

$$\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_q) \leq \gamma(x_1)\, \gamma(x_2, \ldots, x_q).$$

Il y a égalité si et seulement si $\|h_1\| = \|x_1\|$ ou $\gamma(x_2, \ldots, x_q) = 0$, autrement dit si et seulement si $x_1 \in L^\perp$ ou $(x_2, \ldots, x_q)$ est lié (l'énoncé comporte une erreur concernant le cas d'égalité)

B. À partir du i), on prouve facilement, par récurrence sur q, que

$$\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_q) \leq \gamma(x_1)\gamma(x_2)\cdots\gamma(x_q),$$

avec égalité si et seulement si les x_i sont deux à deux orthogonaux ou si l'un d'eux est nul (il y a de nouveau une petite erreur dans l'énoncé).

(f) Soit $A = (a_{i,j}) \in GL_n(\mathbb{R})$ et $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ses vecteurs colonnes.

i. $(c_j)_{1\leq j\leq n}$ est par hypothèse une famille libre de $\mathbb{R}^n$, donc la question **I**-3.a), appliquée avec $q = r = n$, $F = \mathbb{R}^n$ et $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ égale à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (qui est bien orthonormale), donne

$$\gamma(c_1, \ldots, c_n) = \det(A^T A) = (\det A)^2.$$

Par ailleurs, d'après 5.b), $\gamma(c_1, \ldots, c_n) \leq \prod_{k=1}^{n} \gamma(c_k) = \prod_{k=1}^{n} \|c_k\|^2$, avec égalité si et seulement si les c_k (non nuls, puisque A est inversible) sont deux à deux orthogonaux. On en déduit l'inégalité demandée et son cas d'égalité.

PARTIE II

2. (a) $\mathcal{H}_2$ est constitué des huit matrices $\pm\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\pm\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\pm\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\pm\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) i. Soit $A \in \mathcal{H}_n$. La matrice $A' = \dfrac{A}{\sqrt{n}}$ a des vecteurs colonnes unitaires et deux à deux orthogonaux, donc $A' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, donc $(A')^T A' = I_n$, et enfin $A^T A = nI_n$.

ii. Non ; par exemple, la matrice $A = \sqrt{n}\, I_n$ vérifie $A^T A = nI_n$, mais elle n'appartient pas à $\mathcal{H}_n$.

iii. Posons encore $A' = \dfrac{A}{\sqrt{n}}\cdot$ On a $(A')^T A' = I_n$, donc $A' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, donc les vecteurs colonnes de A' sont deux à deux orthogonaux, et il en est de même de ceux de A. Finalement, $A \in \mathcal{H}_n$.

(c) i. Pour $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, $((P^{(\sigma)})^T A)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} P^{(\sigma)}_{k,i} A_{k,j} = A_{\sigma(i),j}$. Ainsi, la ligne i de $(P^{(\sigma)})^T A$ est la ligne $\sigma(i)$ de A, c'est-à-dire que l'on obtient $(P^{(\sigma)})^T A$ à partir de A en effectuant la permutation σ sur les lignes de A.

ii. De même, $(AP^{(\sigma)})_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} P^{(\sigma)}_{k,j} = A_{i,\sigma(j)}$. La colonne j de $AP^{(\sigma)}$ est la colonne $\sigma(j)$ de A, et on obtient donc $AP^{(\sigma)}$ en effectuant la permutation σ sur les colonnes de A.

iii. Soient $A \in \mathcal{H}_n$, $\Delta \in \mathcal{D}_n$ et σ une permutation de $\mathbb{N}_n$.

On a vu que la matrice $\dfrac{A}{\sqrt{n}}$ est orthogonale et on sait alors que ses vecteurs lignes sont deux à deux orthogonaux ; ceux de A le sont donc aussi et par conséquent A^T (dont les coefficients valent évidemment ± 1) appartient à $\mathcal{H}_n$.

On a vu aussi que multiplier A à droite par $P^{(\sigma)}$ revient à permuter ses colonnes. D'autre part, multiplier A à droite par Δ revient à changer certaines de ses colonnes en leurs opposées. On en déduit aussitôt que $AP^{(\sigma)}$ et $A\Delta$ sont aussi dans $\mathcal{H}_n$.

Enfin, $(P^{(\sigma)})^T A = \left(A^T P^{(\sigma)}\right)^T$ et $\Delta A = (A^T \Delta)^T$, donc ces deux matrices appartiennent encore à $\mathcal{H}_n$, d'après les résultats précédents.

(d) i. Il est clair que les coefficients de $A \otimes B$ appartiennent à $\{-1, 1\}$. Notons alors c_j, $j \in \mathbb{N}_n$, les vecteurs-colonnes de B et C_j, $j \in \mathbb{N}_{2n}$, ceux de $A \otimes B$. Il s'agit de montrer que les C_j sont deux à deux orthogonaux ; soient donc k et ℓ tels que $1 \leq k < \ell \leq 2n$. Trois cas se présentent :

- si $\ell \leq n$: $\langle C_k, C_\ell\rangle = (a_{1,1}^2 + a_{2,1}^2)\, \langle c_k, c_\ell\rangle = 0$, car $B \in \mathcal{H}_n$.
- si $n+1 \leq k$: $\langle C_k, C_\ell\rangle = (a_{1,2}^2 + a_{2,2}^2)\, \langle c_{k-n}, c_{\ell-n}\rangle = 0$, car $B \in \mathcal{H}_n$.
- si $k \leq n < n+1 \leq \ell$: $\langle C_k, C_\ell\rangle = (a_{1,1}a_{1,2} + a_{2,1}a_{2,2})\, \langle c_k, c_{\ell-n}\rangle = 0$, car $A \in \mathcal{H}_2$.

ii. Le (d).i montre que si $\mathcal{H}_n$ est non vide, il en est de même pour $\mathcal{H}_{2n}$. Comme $\mathcal{H}_2 \neq \emptyset$ (*cf* (a)), une récurrence évidente montre que $\mathcal{H}_{2^p} \neq \emptyset$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. E contient donc l'ensemble des puissances de 2 autres que 1.

iii. On sait par le (d).i que l'ensemble des $A \otimes B$, avec $(A, B) \in \mathcal{H}_2^2$, est inclus dans $\mathcal{H}_4$.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, appartient à $\mathcal{H}_4$, mais n'est pas de la forme $A \otimes B$, avec $(A, B) \in \mathcal{H}_2^2$, car son bloc "supérieur gauche" $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, n'est ni un élément de $\mathcal{H}_2$, ni l'opposé d'un élément de $\mathcal{H}_2$. L'inclusion est stricte.

(e) Soit $n \in E$, $n > 2$.

i. D'après (c).ii à partir d'un élément quelconque de $\mathcal{H}_n$, en changeant en leurs opposées les lignes dont le premier coefficient est -1, on obtient un élément de $\mathcal{H}_n$ dont les éléments de la première colonne valent tous 1.

Pour une telle matrice A, l'orthogonalité des deux premières colonnes donne $\sum_{i=1}^{n} a_{i,2} = 0$, avec $a_{i,2} = \pm 1$ pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, donc la somme comporte autant de 1 que de -1, ce qui implique que n est pair.

ii. On part de l'élément A de $\mathcal{H}_n$ obtenu au (e).i. On sait que sa deuxième colonne comporte m coefficients 1 et m coefficients -1. Par des permutations de lignes sur A, on peut, sans modifier la première colonne, obtenir une matrice B dont la deuxième colonne est formée de m coefficients 1 suivis de m coefficients -1.

D'après (c).iii cette matrice B appartient encore à $\mathcal{H}_n$.

L'orthogonalité de la troisième colonne de B avec la première et la deuxième donne :

$$\sum_{i=1}^{2m} b_{i,3} = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{m} b_{i,3} - \sum_{i=m+1}^{2m} b_{i,3} = 0, \text{ donc } \sum_{i=1}^{m} b_{i,3} = \sum_{i=m+1}^{2m} b_{i,3} = 0, \text{ avec } b_{i,3} = \pm 1 \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}_{2m}.$$

Comme au (e).i, on en déduit que m est pair, donc que n est un multiple de 4.

PARTIE III

3. (a) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On sait que S est diagonalisable en base orthonormée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres (non nécessairement distinctes). On peut écrire

$$S = PDP^{-1} = PD\,{}^tP,$$

avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

On a ainsi, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T S X = {}^t(PX) D\,(PX) = \sum_{i=1}^{n} l_i\, y_i^2$, où $Y = PX$. Comme P est inversible, l'application $X \longmapsto PX$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et par conséquent :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \backslash \{0\},\ X^T S X > 0 \iff \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \backslash \{0\},\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, y_i^2 > 0$$

$$\iff \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \lambda_i > 0.$$

(b) i. $M^T M$ est évidemment symétrique. De plus, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \backslash \{0\}$:

$$X^T M^T M X = {}^t(MX)\, MX = \|MX\|^2 > 0,$$

puisque M est inversible et X non nul. Ainsi, $\boxed{M^T M \text{ est définie positive.}}$

ii. D'après 1. et a), $M^T M$ est diagonalisable en base orthonormale dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ses valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont strictement positives.

Il existe donc $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^T M = PDP^{-1}$, où $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Posons alors $\Delta = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ et $S = P\Delta P^{-1}$. Il vient $M^T M = S^2$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, puisque S est diagonalisable à valeurs propres strictement positives.

iii. S est inversible, car elle est symétrique définie positive.
Posons $R = MS^{-1}$. Il vient ${}^tRR = {}^tS^{-1}M^T MS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$, donc $\boxed{R \text{ est orthogonale.}}$

iv. On a finalement obtenu $M = RS$, avec $R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, ce que l'on voulait.
Dans toute la suite du problème on admettra l'unicité d'une telle factorisation.

(c) i. De façon générale, on sait que la trace d'une matrice carrée réelle ou complexe est la somme de ses valeurs propres complexes, comptées avec leur ordre de multiplicité. Ici, on sait que les valeurs propres de Σ sont réelles.

ii. Par théorème, Σ est diagonalisable en base orthonormée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe donc $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\Sigma = PDP^{-1}.$$

Il vient alors $Q\Sigma = QPDP^{-1}$, puis, par propriété de la trace,

$$\operatorname{Tr}(Q\Sigma) = \operatorname{Tr}(P^{-1}QPD) = \operatorname{Tr}(Q_1 D),$$

où la matrice $Q_1 = P^{-1}QP$ est orthogonale. En notant $Q_1 = \left(q_{i,j}^{(1)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$, on obtient finalement :

$$\operatorname{Tr}(Q\Sigma) = \operatorname{Tr}(Q_1 D) = \sum_{i=1}^{n} q_{i,i}^{(1)} l_i \leq \sum_{i=1}^{n} \left|q_{i,i}^{(1)}\right| l_i \leq \sum_{i=1}^{n} l_i = \operatorname{Tr}\Sigma, \text{ car } \lambda_i \geq 0,\ \left|q_{i,i}^{(1)}\right| \leq 1 \text{ et d'après i).}$$

iii. L'inégalité du ii) est valable pour toute $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et est évidemment une égalité lorsque $Q = I_n$.
On en déduit que $\operatorname{Tr}\Sigma = \max\limits_{Q\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \operatorname{Tr}(Q\Sigma) = \sup\limits_{Q\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \operatorname{Tr}(Q\Sigma)$.

(d) Soit $n \in E$. Pour toute matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{H}_n$, on pose :

$$f(A) = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right).$$

i. $\mathcal{H}_n$ est non vide ($n \in E$) et évidemment fini, donc f possède un maximum, et en particulier une borne supérieure que l'on notera α_n.

ii. Soit $T = (t_{i,j})$ la matrice triangulaire inférieure d'ordre n définie par

$$t_{i,j} = 1 \text{ si } i \geq j \text{ et } t_{i,j} = 0 \text{ si } i < j.$$

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\Big) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, t_{j,i}\Big) = \sum_{i=1}^{n} (AT)_{i,i} = \operatorname{Tr}(AT).$$

iii. D'après la question **III.b)**, on sait que $T = RS$ avec R orthogonale et S symétrique définie positive.
Posons $A' = \dfrac{A}{\sqrt{n}} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

$$f(A) = \operatorname{Tr}(ARS) = \sqrt{n}\operatorname{Tr}(A'RS) \leq \sqrt{n}\operatorname{Tr} S,$$

d'après 2.b), car $A'R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Cette inégalité est valable pour toute $A \in \mathcal{H}_n$, donc $\alpha_n \leq \sqrt{n}\operatorname{Tr} S$.

iv. $\alpha_2 = 3$ d'après **III**-(a).
Ici, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $T^T T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Les valeurs propres de $T^T T$ sont $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ et celles de $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $T^T T = S^2$ sont $\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Ainsi, $\operatorname{Tr} S = \sqrt{5}$ et on vérifie bien que $3 \leq \sqrt{2}\,\sqrt{5} = \sqrt{10}$.