Sujet 10 - Correction

Mines-Ponts PC 2017 maths 1

à partir d'un corrigé de M. Devulder

1 - Premiers pas

1. $(S_k = i)_{1\leq i\leq 5}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(S_{k+1}=1) = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(S_{k+1}=1|S_k=i)\mathbb{P}(S_k=i)$$

Il reste à remarquer que les salles $2,3,4,5$ mènent toutes à 1 avec probabilité $\frac{1}{3}$ pour en déduire

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(S_{k+1}=1) = \frac{1}{3}\sum_{i=2}^{5}\mathbb{P}(S_k=i)}$$

2. On peut procéder de même pour expliciter $\mathbb{P}(S_{k+1}=j)$ pour $j=2,3,4,5$ et obtenit

$$\mathbb{P}(S_{k+1}=2) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k=1)+\frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k=3)+\frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k=5)$$
$$\mathbb{P}(S_{k+1}=3) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k=1)+\frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k=2)+\frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k=4)$$
$$\mathbb{P}(S_{k+1}=4) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k=1)+\frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k=3)+\frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k=5)$$
$$\mathbb{P}(S_{k+1}=5) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(S_k=1)+\frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k=2)+\frac{1}{3}\mathbb{P}(S_k=4)$$

Ce qui se traduit matriciellement par

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ X_{k+1} = BX_k \text{ avec } B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}}$$

3. La somme des éléments de chaque colonne de B, et donc de chaque ligne de B^T, vaut 1. Ceci signifie que

$$B^T\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

ou encore que $\boxed{1 \in \mathrm{Sp}(B^T) \text{ et } \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \in \ker(B^T - I_5)}$

4. Un calcul immédiat donne $BX_0 = X_0$ et, par récurrence immédiate, $X_k = B^k X_0 = X_0$ pour tout entier k. X_k donnant la loi de S_k,

$$\boxed{\text{toutes les } S_k \text{ ont même loi dans ce cas}}$$

5. Si le rat est dans une pièce, il la quitte au temps suivant. Ainsi, $\mathbb{P}(S_0 = 1 \cap S_1 = 1) = 0$.
Or $\mathbb{P}(S_0 = 1)\mathbb{P}(S_1 = 1) = \frac{1}{16} \neq 0$. Ainsi

$$\boxed{S_0 \text{ et } S_1 \text{ ne sont pas indépendantes}}$$

2 - Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

6. Soit $x \in \ker(u - I_E)$. On a $u(x) = x$ et par récurrence immédiate, $u^k(x) = x$ pour tout k.
Ainsi, $r_k(x) = x$ et

$$\boxed{\forall x \in \ker(u - I_E),\ \lim_{k\to+\infty} r_k(x) = x.}$$

7. Soit $x \in \operatorname{Im}(u - I_E)$. Il existe y tel que $x = (u - I_E)(y)$ et donc $x = u(y) - y$. Ainsi $u^l(x) = u^{l+1}(x) - u^l(x)$ et par télescopage :

$$r_k(x) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}(u^{l+1}(x) - u^l(x)) = \frac{1}{k}(u^k(x) - x)$$

On en déduit que $\|r_k(x)\| \leq \dfrac{1}{k}(\|u^k(x)\| + \|x\|)$. Or, u contractant les normes, on a :

$$\|u^k(x)\| = \|u(u^{k-1}(x))\| \leq \|u^{k-1}(x)\| \leq \cdots \leq \|x\|$$

Par suite $\|r_k(x)\| \leq \dfrac{1}{k}(2\|x\|)$ et comme le majorant est de limite nulle, par encadrement on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \operatorname{Im}(u - I_E),\ \lim_{k\to+\infty} r_k(x) = 0_E}$$

8. Soit $x \in \operatorname{Im}(u - I_E) \cap \ker(u - I_E)$, d'après les questions précédentes, $(r_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ est simultanément de limite x et 0_E et donc,par unicité de la limite, $x = 0_E$.
Ainsi, $\operatorname{Im}(u - I_E) \cap \ker(u - I_E) = \{0_E\}$.
De plus, par le théorème du rang, on a aussi $\dim(\operatorname{Im}(u - I_E)) + \dim(\ker(u - I_E)) = \dim(E)$. Finalement

$$\boxed{E = \ker(u - I_E) \oplus \operatorname{Im}(u - I_E)}$$

9. Soit $x \in E$. Il existe $y \in \ker(u - I_E)$ et $z \in \operatorname{Im}(u - I_E)$ tels que $x = y + z$. On a alors

$$\lim_{k\to+\infty} r^k(x) = \lim_{k\to+\infty} r^k(y) + \lim_{k\to+\infty} r^k(z) = y = p(x),$$

et $x \mapsto y = p(x)$ est la projection sur $\ker(u - I_E)$ de direction $\operatorname{Im}(u - I_E)$.

$$\boxed{\forall x \in E,\ \lim_{k\to+\infty} r_k(x) = p(x) \text{ avec } p \text{ projection sur } \ker(u - I_E) \text{ de direction } \operatorname{Im}(u - I_E)}$$

10. Pour parler de convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on devrait munir cet espace d'une norme. Et comme l'espace est de dimension finie, le choix de la norme est indifférent (les normes sont équivalentes en dimension finie).
    On sait qu'une suite matricielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ converge si et seulement si ses n^2 suites coordonnées convergent et que dans ce cas, on peut passer à la limite coordonnée par coordonnée.
    Les mêmes calculs que ceux menés ci-dessus montrent que

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad \lim_{k\to+\infty} R_k X = PX$$

    où P est la matrice (dans la base canonique) de la projection sur $\ker(A - I_n)$ de direction $\operatorname{Im}(A - I_n)$ (espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$).
    Appliquons ceci aux éléments E_j de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On pose $M_k = R_k - P$:

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\}, \quad \lim_{k\to+\infty} \|R_k E_j - PE_j\| = \lim_{k\to+\infty} \|M_k E_j\| = 0.$$

    Or, $M_k E_j$ est la j-ème colonne de M_k donc pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ on a :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \lim_{k\to+\infty} |M_k(i,j)| = 0.$$

    Ainsi toutes les suites coordonnées de $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tendent vers 0, et donc la suite matricielle $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle (cours).
    Par conséquent, la suite matricielle $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers P. Enfin, P est la matrice d'une projection d'après ce qui précède, ie $P^2 = P$.

$$\boxed{\exists\, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \lim_{k\to+\infty} R_k = P \text{ et } P^2 = P.}$$

3 - Matrices stochastiques

11. Posons $V = AU$. On a

$$\forall i, \ V_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} U_j = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$$

    On en déduit que

$$\boxed{(4) \text{ équivaut à } AU = U}$$

12. Soient A, B stochastiques. Par les formules de produit, $C = AB$ est à coefficients positifs (chaque $c_{i,j}$ est somme et produit de termes ≥ 0). En outre $CU = ABU = AU = U$ avec la question précédente. Cette même question indique que C vérifie (4) et est donc stochastique.

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est stable par multiplication}}$$

13. Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de matrices stochastiques et A sa limite. On veut montrer que A est encore une matrice stochastique.
    Comme précédemment, si on écrit A_k et A avec leurs coefficients, on a :

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \quad \lim_{k\to+\infty} A_k(i,j) = A(i,j).$$

    Puique $A_k(i,j) \geq 0$, par passage à la limite, on a aussi $A(i,j) \geq 0$.
    De plus, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a : $A_k(i,1) + \cdots + A_k(i,n) = 1$ car A_k est stochastique.

En passant à la limite quand $k \to +\infty$ dans cette égalité, on trouve que : $A(i,1) + \cdots + A(i,n) = 1$.
Et finalement, A est bien une matrice stochastique.
On a montré que $\mathcal{E}$ contient les limites de ses suites convergentes, donc $\boxed{\mathcal{E} \text{ est fermé}}$

Soient A, B stochastiques et $\lambda \in [0,1]$. Posons $M = \lambda A + (1-\lambda)B$. La positivité des coefficients de A et B entraîne celle des coefficients de M. De plus $MU = \lambda AU + (1-\lambda)BU = \lambda U + (1-\lambda)U = U$ ce qui donne (4) pour M qui est donc stochastique.

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est convexe}}$$

14. Posons $Y = AX = (y_i)_{1 \le i \le n}$. On a

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad |y_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right| \le \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \cdot |x_j| \le \|x\|_\infty \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \|x\|_\infty$$

Ceci étant vrai pour tout i, on a

$$\boxed{\|AX\|_\infty \le \|X\|_\infty \text{ pour tout } X \in \mathbb{R}^n}$$

15. Notons $B = A^p = (b_{i,j})$. B est une matrice stochastique (question 12) à coefficients > 0 par hypothèse.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker(B - I_n)$ et $s \in \{1, \ldots, n\}$ un indice tel que x_s est le maximum des x_i.

On a $BX = X$ et, en regardant la ligne s dans cette égalité, on trouve : $x_s = \sum_{j=1}^{n} b_{s,j} x_j \le x_s \sum_{j=1}^{n} b_{s,j} = x_s$.

Ainsi la majoration est une égalité, ou encore :

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{b_{s,j}(x_s - x_j)}_{\ge 0} = 0.$$

Et donc pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a $b_{s,j}(x_s - x_j) = 0$ puis, comme $b_{s,j} > 0$, $x_j = x_s$.
Ceci montre que les x_j sont tous égaux et donc que $X \in \mathrm{Vect}(U)$. Ainsi $\ker(A^p - I_n) \subset \mathrm{Vect}(U)$. Mais A^p est une matrice stochastique (question 12) et on a donc $U \in \ker(A^p - I_n)$. Ainsi

$$\boxed{\ker(A^p - I_n) = \mathrm{Vect}(U) \text{ et donc } \dim(\ker(A^p - I_n)) = 1}$$

16. On sait déjà que $\mathrm{Vect}(U) \subset \ker(A - I_n)$ car A est stochastique. Si $AX = X$ alors par récurrence $A^k X = X$ pour tout k et en particulier $A^p X = X$. La question précédente montre que $X \in \mathrm{Vect}(U)$ et ainsi

$$\boxed{\ker(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)}$$

17. Puisque A est stochastisque, par produit, les A^l sont toutes stochastiques (question 12). R_k est donc à coefficients positifs comme somme de telles matrices. De plus

$$R_k U = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} A^l U = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} U = U$$

et on a aussi (4). Finalement

$$\boxed{R_k \text{ est stochastique pour tout } k}$$

18. • Les questions 10 et 14 montrent que $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^2 = P$.

 • De plus, les questions 17 et 13 (caractère fermé) montrent que P est stochastique.

 • La partie **2** a montré que P est la matrice de la projection sur $\ker(A - I_n)$ de direction $\mathrm{Im}(A - I_n)$. On a donc $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Vect}(U)$ et P est de rang 1.

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} R_k = P, \text{ avec } P \in \mathcal{E} \text{ et } \mathrm{Im}(P) = \mathrm{Vect}(U).}$$

19. Toutes les colonnes de P sont ainsi multiples de U et donc pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, il existe $\lambda_j \in \mathbb{R}$ telle que la colonne j de P s'écrive $\lambda_j U$.
 En posant $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (matrice ligne) on a alors $P = UL$.
 Comme toutes les coordonnées de U valent 1, toutes les lignes de P valent L et comme P est stochastique, L l'est aussi.

$$\boxed{P = UL \text{ avec } L \text{ matrice ligne stochastique}}$$

20. Remarquons que
$$R_k A = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} A^l = \frac{1}{k}((k+1)R_{k+1} - I_n) = \frac{k+1}{k}R_{k+1} - \frac{1}{k}I_n$$
 D'une part, en faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{k+1}{k}R_{k+1} - \frac{1}{k}I_n\right) = P$.
 D'autre part, l'application $M \longmapsto MA$ est linéaire en dimension finie, elle est continue. Et par caractérisation séquentielle de la continuité, puisque $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} R_k = P$, on a aussi $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} R_k A = PA$.
 Et par unicité de la limite :

$$\boxed{PA = P}$$

 On aurait aussi pu dire que $\mathrm{Im}(A - I_n) = \ker(P)$ *et que donc* $P(A - I_n) = 0$.

 Tout d'abord, P est une matrice dont toutes les lignes sont égale à L. PA est ainsi une matrice dont toutes les lignes sont LA. L'égalité $PA = P$ donne ainsi $LA = L$ (avec L stochastique).

 Montrons qu'il n'y en a pas d'autre. Si Y est une matrice ligne, $YA = A$ s'écrit aussi $A^T Y^T = Y^T$ ou encore $(A^T - I_n)Y^T = 0$. Or, avec la question 16, $A - I_n$ est de rang $n - 1$ (par théorème du rang) et il en est de même de $A^T - I_n$. Le noyau de $A^T - I_n$ est ainsi de dimension 1. Il contient la matrice L^T qui est non nulle (car sinon $P = 0$) donc :
$$\ker(A^T - I_n) = \mathrm{Vect}\{L^T\}.$$
 Ainsi, les matrices ligne Y vérifiant $YA = A$ sont les multiples de L. La somme des coefficients de λL ne valant 1 que si $\lambda = 1$, on a finalement

$$\boxed{L \text{ est la seule ligne stochastique telle que } LA = L}$$

21. On montre par récurrence simple que $LA^k = L$ pour tout k. En particulier, $LA^p = L$. Si, par l'absurde, on avait $\lambda_i = 0$ alors en regardant le i-ème coefficient de $LA^p = L$, on aurait
$$0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (A^p)_{j,i}$$
 Les $(A^p)_{j,i}$ étant > 0 et les λ_j positifs non tous nuls, ceci est impossible. On a montré que

$$\boxed{L \text{ est à coefficients strictement positifs}}$$

22. Puisque $\ker(A - I_n) \neq \{0\}$, 1 est valeur propre de A et donc 1 est racine du polynôme caractérique χ_A de A. On veut montrer que c'est une racine simple.
    On sait que $\ker(A - I_n) \oplus \mathrm{Im}(A - I_n) = \mathbb{R}^n$. Les espaces $F = \ker(A - I_n)$ et $G = \mathrm{Im}(A - I_n)$ sont stables par l'endomorphisme canoniquement associé à A. En notant $u_F \in \mathcal{L}(F)$ et $u_G \in \mathcal{L}(G)$ les endomorphismes induits, comme $F \oplus G = \mathbb{R}^n$,
    $$\chi_A = \chi_u = \chi_{u_F}\chi_{u_G}$$
    F est de dimension 1 et $u_F = \mathrm{Id}_F$ donc $\chi_{u_F} = (X-1)$. Comme $F \cap G = \{0\}$, $u_G - \mathrm{Id}_G$ est inversible et 1 n'est pas racine de χ_{u_G}. De tout cela, on déduit que 1 est racine simple de χ_u, c'est à dire
    $$\boxed{1 \text{ est valeur propre simple de } A}$$

4 - Application au labyrinthe

23. On a $P = UL$ où L est l'unique ligne stochastique telle que $LA = L$, c'est à dire où L^T a des coefficients positifs de somme 1 et vérifie $A^T L^L = L^L$, c'est à dire où L^T est vecteur propre de B associé à la valeur propre 1. $(4, 3, 3, 3, 3)$ est un tel vecteur propre et donc $L = \frac{1}{16}(4, 3, 3, 3, 3)$. Finalement,
    $$\boxed{P = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}}$$

24. Supposons que S_0 suive une loi convenable. On a alors $S_0 = BS_0$ et, par récurrence, $S_0 = B^k S_0$. En transposant, combinant et passant à la limite, on obtient ${S_0}^T A = {S_0}^T$. Comme ${S_0}^T$ est stochastique, la question 20 montre que ${S_0}^T = L$ trouvé ci-dessus.
    La réciproque a été traitée en question 4.
    $$\boxed{\text{Le seul cas où les } S_k \text{ ont la même loi est donnée par } \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix}}$$