Révisions pour l'oral

CCINP :

• Déroulement de l'épreuve 2024 :
L'épreuve orale de mathématiques durera une heure avec :

- une demi-heure pour présenter les documents administratifs et préparer le sujet qui ne contiendra plus qu'un seul exercice,
- une demi-heure de présentation au tableau divisée en 20 minutes pour présenter le sujet préparé puis 10 minutes pour traiter des questions non préparées.

Le sujet à préparer sera composé d'un seul exercice portant sur le programme des deux années de classe préparatoire. Une fois entré dans la salle, le candidat préparera ce sujet pendant une demiheure. Il présentera ensuite sa préparation puis l'examinateur l'interrogera sur des questions pouvant porter sur du cours, des énoncés ou des démonstrations, des exemples ou des contreexemples... La deuxième partie de l'interrogation aura pour but d'évaluer en particulier la connaissance rigoureuse du cours.

• Critères d'évaluation (rapport 2021) : L'évaluation du candidat prend en compte les critères suivants :

- la bonne compréhension des définitions et théorèmes du cours,
- l'aisance en calcul et avec les techniques de base,
- la rigueur,
- la capacité à prendre des initiatives et l'autonomie,
- la capacité d'argumentation et la clarté des explications,
- la gestion du temps et du tableau.

• Reclamations (notice 2024) : Les réclamations portant sur la conformité aux programmes (ou sur tout autre motif lié à l'interrogation elle-même) **doivent être effectuées par écrit sur le lieu même des épreuves et immédiatement après l'épreuve incriminée ;** la réclamation sera remise au Président de filière (ou son représentant). Après le 20 juillet 2024 18 h 30, les réclamations de cette nature ne seront pas considérées.

Ce qui suit concerne la session 2023 :

Une fois entré dans la salle, le candidat prépare le sujet pendant une demi-heure pendant qu'un autre candidat présente ses exercices au tableau.

• Matériel : Le papier de brouillon est fourni mais il faut prévoir de quoi écrire. Les smartphones ou autres objets connectés (montres connectées) sont interdits. Les calculatrices sont interdites. Il est fortement conseillé de prévoir de quoi lire l'heure ou un chronomètre. L'examinateur ne prête pas de montre et il n'y a pas forcément d'horloge dans la salle.
Des bouchons d'oreilles peuvent être utiles pour ne pas être distrait par l'autre candidat en passage.
L'examinateur dispose d'un ou plusieurs écrans qui lui permettent de suivre l'oral et prendre des notes.

• Gestion du temps de préparation : Les examinateurs conseillent aux candidats qui attendent de passer leur oral de se tenir prêts avec stylos, pièce d'identité et convocation dans une poche plastique facilement ouvrable. En effet, certains perdent du temps à chercher leurs documents ou stylos dans leur sac alors que le temps de préparation a déjà commencé.

• Gestion du temps de présentation : Le candidat peut admettre un résultat intermédiaire, sauter les questions qu'il souhaite. Répéter ou réécrire l'énoncé peut paraître une étape rassurante pour le candidat, mais attention de ne pas y passer trop de temps. En revanche, si le candidat prend le temps d'exposer au préalable les différentes étapes de son raisonnement avant de rentrer dans les détails, la qualité de la présentation s'en retrouve améliorée.
Les candidats ont intérêt à gagner en efficacité dans la présentation de ce qu'ils ont préparé pour bénéficier d'un temps de réflexion supplémentaire sur les questions qu'ils n'ont pas entièrement traitées, en s'appuyant sur les indications éventuelles de l'examinateur.

• Attitude générale : Les examinateurs ont noté le sérieux de la plupart des candidats qui arrivent préparés pour cette épreuve. Un bon dynamisme et une bonne communication sont toujours appréciés et peuvent permettre de valoriser la note finale.
L'autonomie du candidat est également jugée. Le rôle de l'examinateur est de poser des questions avec bienveillance, conscient du stress que peut générer ce type d'épreuve, mais pas de mener l'oral. En particulier, les candidats n'ont pas à rechercher l'approbation régulière de l'examinateur durant la présentation. Rappelons que les examinateurs gardent en tête que les candidats vivent des épreuves stressantes et ont le souci de rester bienveillants. Le candidat n'est pas censé réclamer des indications, en revanche l'examinateur est libre de faire des remarques.

• **Travail de l'oral :** Une bonne présentation passe par un équilibre subtil entre l'usage du tableau et l'oral. C'est au candidat de juger ce qui mérite d'être écrit et ce qui peut être réservé à l'oral pour gagner du temps, sans pour autant faire de compromis sur la rigueur du propos.
Les examinateurs ne sauraient trop rappeler qu'une affirmation n'est pas une démonstration. De plus, il est attendu qu'un candidat puisse énoncer proprement une définition ou un résultat du programme. À ce titre, un bon usage des quantificateurs est indispensable, même à l'oral.
D'une manière générale, la capacité à présenter une démarche, un raisonnement, voire des difficultés rencontrées de manière claire et convaincante est une compétence importante attendue des candidats et essentielle dans leur futur métier d'ingénieur. Elle prend donc une part significative dans l'évaluation de l'épreuve orale.

• **Remarques mathématiques :**
Certaines parties du programme sont mal connues : les fonctions de plusieurs variables, les isométries en petite dimension, les espaces vectoriels normés, les suites, les nombres complexes, la trigonométrie, les théorèmes d'analyse sur les fonctions continues et sur les fonctions dérivables.

- **Analyse :**

  Les théorèmes d'interversion somme et intégrale, de dérivation d'une intégrale à paramètre et d'intégration d'une série terme à terme occupent une place importante dans le programme mais ne sont pourtant pas très bien connus. De surcroit, il est souvent difficile de bien les utiliser (trouver la fonction de majoration dans le théorème de convergence dominée par exemple). L'application d'une bonne domination dans le premier cas pose parfois des difficultés. La comparaison série-intégrale est souvent mal mise en oeuvre, y compris lorsque la méthode est proposée par l'énoncé.

  Concernant les séries entières, les candidats semblent avoir très peu de recul sur la définition de rayon de convergence et les moyens pour le déterminer autre que la règle de d'Alembert (comparaison par inégalité, équivalence etc...). Pour déterminer le rayon d'une série entière, les candidats ont bien retenu le critère de d'Alembert, certes pratique dans beaucoup de cas, mais pas toujours. En particulier il ne permet pas de conclure lorsque l'on connaît seulement une inégalité sur le terme général, alors que cette inégalité permet souvent une majoration ou une minoration du rayon.

  L'analyse asymptotique demeure très problématique : les équivalents et les développements limités sont souvent grossièrement faux ou n'ont pas sens : des fonctions équivalentes à zéro, des limites qui dépendent encore de la variable. La notion d'équivalent ne vient pas toujours à l'idée, et elle est souvent mal appliquée : pour certains candidats des suites ou des fonctions pour lesquelles l'intégrale ou la suite ont le même comportement sont équivalentes.

  Un nombre non négligeable de candidats pense qu'une suite positive qui converge vers zéro est décroissante.

  La notion de convergence uniforme est dans l'ensemble mal maîtrisée.

  La partie du programme sur les fonctions de plusieurs variables n'est pas bien assimilée. La compréhension de la continuité en un point pose problème. La définition de la dérivée partielle en un point est rarement connue. Il ne faut pas oublier que les fonctions de plusieurs variables sont au programme. La notion de limite ou de continuité en une valeur (a, b) n'est qu'exceptionnellement bien connue : la plupart des candidats pensent qu'il suffit de faire tendre x vers a et y vers b en fixant l'autre variable.

  Le constat est similaire pour les équations différentielles : même sur des exemples plutôt simples, beaucoup sont en difficulté. Il n'est pas acceptable de ne pas connaître la méthode de la variation de la constante.

- **Algèbre linéaire :**

  Le calcul des polynômes caractéristiques est souvent entaché d'erreurs ce qui est préjudiciable pour la poursuite de l'exercice. L'utilisation systématique de la méthode de Sarrus par certains candidats est parfois la cause de ces erreurs. On peut donc noter des calculs parfois maladroits de déterminants (la méthode dite "de Sarrus" a l'inconvénient majeur de ne pas permettre une factorisation directement) ou pour la résolution de systèmes linéaires, avec des substitutions peu efficaces. Il est d'ailleurs souvent opportun de simplifier le déterminant par des opérations sur les lignes et les colonnes avant de se lancer dans les calculs. La différence entre les candidats se fait entre celui qui comprend vraiment ce qu'il fait et celui qui fait les choses par automatisme.

  Le lien entre polynôme caractéristique, polynôme annulateur (mentionné par certains candidats comme le polynôme annulateur) et valeurs propres d'une matrice ou d'un endomorphisme est souvent confus.

  La classique question sur le fait que les valeurs propres font partie des racines d'un polynôme annulateur donne parfois lieu à des calculs étranges (et faux) incluant des puissances de vecteurs.

  Peu de candidats voient le lien entre une combinaison linéaire nulle des colonnes de la matrice et un vecteur du noyau. Le rang de la matrice est rarement utilisé pour trouver la dimension du noyau, par exemple dans la recherche des vecteurs propres.

  La détermination d'une base orthonormée par la méthode de Gram-Schmidt et d'un projeté orthogonal sur un sous-espace (ou, ce qui est similaire, d'une distance à un tel sous- espace) est souvent mal faite. Peu de candidats pensent, lorsque cette projection orthogonale n'est pas pratique à calculer, à projeter sur l'orthogonal du sous-espace, ce qui est parfois plus simple.

  Les isométries du plan et de l'espace sont le plus souvent mal connues. Les candidats font régulièrement allusion à la matrice de ces endomorphismes et n'imaginent pas que dans une autre base elle puisse avoir une base différente, même si cette base est orthonormée.

- **Probabilités :**
  Les exercices sur les probabilités peuvent difficilement se traiter par automatisme. En probabilité, la modélisation des expériences pose problème aux candidats, ils rencontrent souvent des difficultés à décrire l'ensemble des évènements élémentaires de celles-ci. Les candidats ont des difficultés sur la compréhension d'une situation pour déterminer une loi d'une variable aléatoire. La "modélisation" de la situation probabiliste afin de reconnaître une loi (usuelle ou non) met davantage les candidats en difficulté.

  Peu de candidats connaissent la définition d'une variable aléatoire, ils ne savent pas que c'est une fonction.

ENAC Contrôleur aérien :

Épreuve de maths commune avec CCINP.

École de l'air :

Épreuve de maths commune avec CCINP.

ESM - Saint Cyr :

Une épreuve de mathématiques, durée 25mn.

Centrale (2022-2023) :

• **Mathématiques 1 :**

L'épreuve de mathématiques 1 est une épreuve sans préparation d'une durée d'environ 30 minutes. L'usage de la calculatrice est autorisé mais dans les faits très rare.
Le candidat se voit proposer un exercice de deux à quatre questions. Celles-ci sont progressives et la première est souvent très proche du cours. Il est tout à fait possible d'avoir une bonne note sans avoir répondu à toutes les questions. L'exercice proposé est avant tout un support pour évaluer les connaissances du candidat sur une ou plusieurs parties du programme et sa faculté à mener un dialogue réfléchi avec l'interrogateur.
Dans le même but, l'interrogateur peut être amené à poser quelques questions en dehors de l'exercice, ce sans corrélation avec le niveau de la prestation du candidat.

• **Mathématiques 2 :**

L'épreuve de Maths 2 est une épreuve de mathématiques utilisant l'outil informatique. Un ordinateur équipé des environnements de développement Pyzo et Spyder est mis à disposition du candidat. Des fiches d'aide présentant différentes fonctions Python pouvant être utiles sont fournies lors de l'épreuve sous forme papier ainsi que sous forme d'un fichier Pdf présent sur l'ordinateur. Ces fiches sont consultables en ligne sur le site du concours. Le candidat dispose d'une préparation d'une demi-heure puis est interrogé pendant 25 minutes environ. L'outil informatique peut être employé pour effectuer des calculs, des tracés de courbes ou de surfaces, étudier des exemples numériques correspondant à un problème théorique donné, effectuer des calculs matriciels (par exemple résoudre un système linéaire ou rechercher les éléments propres d'une matrice), simuler une expérience aléatoire, émettre des conjectures... Dans cette épreuve, on évalue la capacité du candidat à aborder de manière constructive les notions du programme de mathématiques de la filière PSI, à choisir la meilleure représentation d'un objet pour résoudre un problème donné, à organiser de manière claire un calcul complexe. La capacité à s'exprimer et la rigueur de la démarche sont aussi prises en compte dans la notation.

• **Compte-rendu de l'épreuve de Mathématiques 1 :**

Le format de l'épreuve, maintenant bien connu des étudiants, favorise tout au long de sa durée une interaction constante entre l'interrogateur et le candidat. Ceci nous a permis de classer ces derniers de façon efficace, tant sur leurs connaissances des résultats au programme que sur leur capacité à en faire un usage opportun et pertinent. En ce sens l'épreuve de mathématiques 1, avec 11,8 de moyenne et un écart type de 3,66, a fort bien tenu son rôle.
Au fil des ans nous avons pris l'habitude, dans ce rapport, d'identifier trois groupes de candidats. Celui des candidats extrêmement brillants, maitrisant parfaitement le cours et qui en font une utilisation pertinente et autonome, celui de la grande majorité des candidats, étudiants sérieux mais qui ont davantage besoin d'être guidés que ceux du précédent, enfin celui des candidats qui à la fois ignorent le cours et peinent à produire le moindre raisonnement. Nous avons constaté avec plaisir lors de cette session que le troisième groupe, déjà assez réduit les précédentes années, a presque disparu.

Il faut sans doute voir là la marque d'un écrit qui a pleinement rempli son rôle de filtre, mais il convient aussi de ne pas minimiser le travail fourni tout au long de l'année par les étudiants, le rôle et le dévouement de leurs enseignants et le mérite de tous dans ce constat positif.

Dans le dernier rapport, nous avions surement vu juste en imputant aux différentes phases d'enseignement à distance les difficultés constatées en algèbre linéaire. Cette année elles ont disparu et c'est plutôt l'analyse qui a posé le plus de difficultés aux candidats.
L'an passé nous terminions ce paragraphe en regrettant une fois de plus les lacunes fréquentes dans les domaines suivants :

- les candidats ont du mal à représenter les situations qu'ils rencontrent ; ils ne font quasiment jamais spontanément de dessins ou schémas, pourtant une figure claire peut résumer les hypothèses du problème, exposer rapidement les notations introduites et aider à résoudre l'exercice ;

- le calcul asymptotique, l'appréciation des ordres de grandeur n'est pas toujours maitrisé, en tout cas pas avec la virtuosité attendue chez ceux qui se destinent à une profession scientifique ;
- le calcul différentiel et la géométrie différentielle élémentaires sont souvent très mal connus au point que des questions aussi simples que le calcul des dérivées partielles en coordonnées polaires ou le lien entre le vecteur gradient et les ensembles de niveau d'une fonction font chuter des candidats.

Si le dernier point semble, pour ce qui est du calcul différentiel en tout cas, s'améliorer légèrement, sans doute sous l'effet des nombreuses questions posées depuis plusieurs années dans ce domaine, pour les deux autres points nous ne pouvons que reconduire le constat dressé l'an passé, pire, il semble que les lacunes calculatoires quittent le cadre de l'analyse pour atteindre également le calcul matriciel le plus élémentaire et atteindre des candidats qui par ailleurs ont un bon niveau théorique. Nous ne pouvons qu'encourager les candidats à une pratique régulière de ce champ de notre discipline.

Ces trois points dépassant le cadre des seules mathématiques pour constituer le socle commun aux sciences, nous continuerons donc l'an prochain à y être sensibles et à les contrôler par des sujets comme par des questions annexes posées en fin d'épreuve. Reste à espérer que les candidats du concours 2023 auront lu et tenu compte des précédentes remarques.

Témoignage :

- ⋆ **Pierre D. :** *Pour Maths 1, c'était vraiment un oral compliqué basé sur de l'analyse. Pour la question de cours c'était démontrer le théorème fondamental de l'analyse en partie (il fallait montrer le caractère C1 d'une fonction qui se mettait sous la forme de l'intégrale du cours). Et ensuite, déterminer la limite d'une fonction (il m'a donné des questions intermédiaires pour m'aider sans quoi j'étais totalement bloqué).*

  La prestation n'étant pas fameuse on a abandonné l'exercice et j'ai eu des questions de cours : formule de Taylor avec reste intégrale, application de la règle de la chaine et théorème des valeurs intermédiaires. Déçu de ma prestation, j'ai obtenu le note de 9 à cet oral.

• Compte-rendu de l'épreuve de Mathématiques 2 :

La majorité des candidats a compris le principe de l'épreuve de Maths 2 et beaucoup ont pris la peine de se familiariser avec les fiches d'aide disponibles pour l'épreuve 2.

Le jury est globalement satisfait des performances des candidats : la moyenne sur l'épreuve est d'environ 11,43 avec un écart type de 3,51. La majorité des candidats a été capable – parfois avec un peu d'aide – de répondre à l'étude numérique proposée et apporter des éléments de preuve mathématique, certains candidats le faisant de manière très brillante et autonome. Ces excellentes prestations sont un peu en diminution par rapport aux années précédentes. Par contre, on peut déplorer des prestations faibles aussi bien au niveau de l'emploi de l'outil informatique que de la maitrise des questions mathématiques posées. Le réflexe de tester ses codes informatiques n'est curieusement pas du tout systématique. et une très grande partie des candidats ne sait pas comment n'exécuter qu'une partie des codes. Les moins habiles ne savent pas exécuter d'instructions dans la console, ou ignorent qu'il faut fermer la fenêtre graphique avant de relancer l'exécution de leur code.

Il est très rare que l'étudiant soit mutique. En revanche, le jury regrette que quelques candidats parlent sans écouter les conseils qui leur sont proposés. Un peu plus d'attention de la part de ces candidats leur permettrait sans doute de mieux répondre aux exigences de l'épreuve.

Témoignages :

- ⋆ **Frank-Arthur E. :** *À Centrale, je vous précise juste qu'à la fin des 30 minutes, juste avant mon passage au tableau, l'examinateur est venu à mon poste et m'a demandé de lui présenter la partie informatique. Pour la question 3, il m'a d'ailleurs explicitement demandé d'expliquer comment j'avais fait. Je suis ensuite allé au tableau pour traiter la partie mathématique. D'ailleurs, la planche m'a paru significativement plus longue que celle qu'on a traité en préparation.*
- ⋆ **Pierre D. :** *Pour Maths-Info, j'ai eu des probabilités. Les niveaux de mathématiques et d'info étaient relativement accessibles (utilisation de la loi faible des grands nombres / détermination d'une espérance via l'informatique ...). Bien que légèrement différents, les exercices d'entrainements m'ont vraiment aidé. J'ai obtenu 14 à cet oral.*

• Remarques générales :

Nous allons donner quelques conseils et mises en garde aux futurs candidats. Certains figuraient déjà dans les précédents rapports, d'autres non. La présente liste n'abolit pas les conseils prodigués dans les anciens rapports et nous conseillons aux candidats de la prochaine cession de lire également les rapports des deux années précédentes.

Pour bien préparer ces épreuves, il faut tout d'abord travailler le cours, celui de seconde année, comme celui de première, puis les techniques usuelles. Un candidat qui connait son cours et sait comment aborder les problèmes classiques est assuré d'avoir une note fort convenable. Toutes les notions du cours de deuxième année de PSI, mais aussi du cours de première année (intersection entre les programmes de MPSI et de PCSI), doivent être connues en particulier un candidat doit savoir **énoncer précisément tout théorème au programme**, lorsqu'un examinateur le lui demande. Certains candidats utilisent des notions qui ne sont pas au programme de PSI mais qui le sont dans d'autres filières (typiquement la compacité, le lemme des noyaux), alors même qu'ils en ignorent d'autres au programme. Les exercices ont été spécifiquement préparés pour la filière PSI et ne demandent pas de connaissances hors programme.

Les interrogateurs attendent du candidat qu'il ne se contente pas d'écrire au tableau, mais qu'il se retourne de temps à autre, pour s'exprimer oralement. La clarté et la précision du vocabulaire choisi sont alors appréciées. À l'inverse si le candidat veut profiter d'aide de la part de l'examinateur, il doit aussi savoir se taire de temps en temps et écouter les questions intermédiaires que posent l'examinateur qui sont souvent de précieuses indications, il faut en tenir compte et ne pas hésiter à les écrire pour bien les visualiser. La réussite de l'oral repose sur un subtil équilibre entre des phases de recherche écrites, d'échanges verbaux et d'écoute avec l'examinateur.

Le jury remarque que certains candidats sont parfois bloqués par la méconnaissance de résultats élémentaires de première année voire de terminale, quelques exemples : un polynôme réel de degré impair admet une racine réelle, l'expression des racines n-èmes de l'unité, reconnaitre une primitive simple, écrire correctement une hypothèse de récurrence, utiliser une formule trigonométrique comme $\sin(x+n\pi) = (-1)^n \sin(x)$, les formules d'Euler, le lien entre affixe et vecteur, l'expression du carré du module d'un nombre complexe...

Il est attendu du candidat qu'il fasse preuve de rigueur. Quand il applique un théorème il doit en citer et en vérifier toutes les hypothèses. Sur le plan du raisonnement, il est primordial que l'examinateur sache celui qui est retenu par le candidat. Ce dernier à l'oral n'est pas tenu, comme à l'écrit, de tout rédiger, néanmoins il doit informer l'interrogateur du type de raisonnement qu'il mène : raisonnement par équivalence, raisonnement par double implication, raisonnement par récurrence. De la même façon si la quantification des variables obéit à l'oral à des exigences moins strictes qu'à l'écrit, le candidat doit au moins oralement informer l'examinateur du statut de chacune d'elles. Cette année nous avons observé une nette détérioration de l'usage des quantificateurs. Rappelons que pour montrer qu'une propriété est vraie pour tous les éléments d'un ensemble, il faut partir d'un élément quelconque de cet ensemble : par exemple, pour montrer que toutes les valeurs propres d'une matrices sont positives, on commence par écrire ou dire « soit λ une valeur propre de la matrice ». Très souvent les candidats qui ne savent pas par où commencer déclarent : « je vais peut-être faire un raisonnement par analyse-synthèse ». Rappelons que ce type de raisonnement est approprié pour montrer l'existence et l'unicité d'un objet mathématique mais n'est pas la panacée universelle, pas plus qu'une récurrence n'est systématique pour toute question faisant intervenir un entier n dans son énoncé.

D'une manière générale, les candidats n'illustrent pas assez leur propos par des dessins, des figures ou des schémas. Le jury encourage et apprécie le recours spontané à des illustrations graphiques.

En début d'épreuve, la lecture, la copie presque intégrale au tableau de l'énoncé, la présentation générale trop détaillée et creuse du sujet est une perte de temps, les membres du jury interrogent toujours en ayant l'énoncé de l'exercice, et le candidat est invité à entrer d'emblée dans le vif du sujet.

Voir aussi le détail complet du rapport de Jury en ligne (Analyse, Algèbre, Probabilités).

• Conclusion :

Le jury est globalement satisfait des résultats de cette année mais regrette la baisse du niveau en calcul et du soin porté à la quantification des variables.

Il note cependant qu'une grande majorité des candidats a compris les objectifs de ces épreuves. Le jury n'est pas là pour piéger le candidat mais bien au contraire pour évaluer au mieux ses connaissances.

De très bonnes prestations ont été réalisées par des candidats maitrisant parfaitement les outils pratiques et théoriques mis à leur disposition.

Le jury encourage tous les futurs candidats à utiliser de manière régulière l'outil informatique pour appréhender de manière plus concrète les notions théoriques étudiées en cours de mathématiques.

ENSEA :

Les grands admissibles sont dispensés d'épreuves orales.

Sinon, une épreuve orale de Mathématiques.

Navale :

L'organisation des épreuves orales, leurs caractéristiques (objectif, déroulement, matériel, etc.) et des exemples de sujets seront téléchargeables sur les sites https ://www. lamarinerecrute.fr et https ://admissio.defense.gouv.fr/admissio/.

Mines-Ponts :

• Déroulement de l'épreuve :

L'oral de mathématiques de la filière PSI se déroule en deux temps : un temps de préparation sur table d'une quinzaine de minutes environ suivie d'un exposé au tableau pouvant aller de 50 minutes à une heure.

À son entrée dans la salle, le candidat se verra proposer un premier exercice à préparer. Le deuxième sera donné pendant l'exposé et devra être traité directement. L'examinateur décide du moment pour changer de sujet sans attendre nécessairement que le premier exercice soit traité intégralement. En pratique la durée de chaque exercice sera la plupart du temps comprise entre 20 et 35 minutes, à la discrétion de l'examinateur.

Les deux exercices porteront sur des parties différentes du programme : algèbre puis analyse ou analyse puis probabilité par exemple. Le candidat pourra être interrogé sur la totalité des programmes de PCSI et de PSI. De manière exceptionnelle et à la discrétion de l'examinateur, un troisième exercice pourra être posé, sans que cela ne fasse diagnostic de la réussite ou non du candidat à son oral.

Remarques sur la session 2023 et conseils aux futurs candidats

Le jury commence par féliciter les candidats de la session 2023. La majorité d'entre eux font preuve d'une bonne maîtrise des concepts étudiés lors des deux années de classes préparatoires. Il est recommandé de commencer son exposé en précisant les questions traitées (en partie ou intégralement) lors de la préparation.

Il est important de comprendre que l'oral n'est pas une répétition des épreuves écrites et que l'on n'attend pas à ce que le candidate rédige une copie au tableau. Cependant, à l'inverse, il faut se servir du support écrit et ne pas se contenter d'avancer oralement des idées plus ou moins floues. Les théorèmes utilisés doivent en particulier être cités de manière précise et il faut en vérifier les hypothèses. Il convient par ailleurs de tenir un tableau organisé et lisible et de cantonner les abréviations à un usage raisonnable et classique.

Le jury apprécie quand un candidat est capable de lister tous les théorèmes qui peuvent s'appliquer à une situation donnée (interversion limite intégrale, diagonalisabilité d'une matrice,...) avant de réfléchir à celui qui semble le plus adapté à la situation.

Un oral est une discussion avec l'examinateur. Il est nécessaire que le candidat ne reste pas tout le temps face à son tableau. Il doit parler de manière claire et intelligible. Par ailleurs, il faut aussi qu'il soit à l'écoute et qu'il sache réagir positivement lors qu'on lui donne une indication. La meilleure solution étant de commencer par la noter à l'écrit au tableau. Par contre, cela ne signifie pas qu'il faille attendre de la part de l'examinateur une approbation permanente ou la solution à tous les problèmes.

Pour finir, de nombreux candidats font usage de résultats qui ne sont pas dans le programme officiel (étude des matrices nilpotentes, théorème de Césaro, ...). S'il est possible de les utiliser, il est alors nécessaire de pouvoir en donner une démonstration et leur usage ne sera jamais requis pour résoudre un exercice.

Analyse des difficultés

Le jury rappelle que les interrogations orales peuvent porter sur la totalité des programmes de PCSI et de PSI. Certains chapitres semblent globalement moins maîtrisés que d'autres. Nous pouvons citer par exemple le dénombrement et les probabilités dans leur ensemble, le calcul différentiel et notamment les équations différentielles ainsi que les nombres complexes.

Voici aussi quelques points plus précis qui ont pu poser problème aux candidats :

- La nature de la convergence d'une série entière. Il est fréquent d'entendre que la somme d'une série entière de rayon de convergence R est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ car elle converge uniformément sur l'intervalle ouvert $]-R,R[$.
- Pour les intégrales généralisées, la nature est souvent bien mieux traitée dans le cas des bornes infinies que dans le cas des bornes finies. De nombreux candidats ne savent pas que $t \longmapsto \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et ont du mal à le démontrer quand on leur demande.
- Pour établir l'indépendance de variables aléatoires, le jury attend un argument plus précis qu'une vague évocation du lemme des coalitions. Il semble nécessaire de préciser les hypothèses du théorème et de vérifier qu'elles s'appliquent dans le cadre de l'exercice.
- Les manipulations de sommes (finies ou de séries) posent de nombreux problèmes aux candidats : nous rappelons que les changements d'indices sont un attendu du programme de PCSI.
- Les candidats manquent souvent de recul relativement aux calculs dans le corps des nombres complexes : les résolutions d'équations polynomiales de degré 2 à coefficients complexes (le signe du discriminant n'est pas bien défini), l'interprétation géométrique du module et de l'argument et les manipulations de nombres sous forme trigonométrique posent régulièrement problème.
- De nombreux candidats peinent à mener des calculs sans erreurs. Cela concerne les calculs d'équivalents pour étudier la nature d'une série ou d'une intégrale, les calculs algébriques et notamment la gestion puissance mais aussi les calculs de déterminants. Par ailleurs, s'il n'est pas nécessaire de connaître par coeur toutes les formules de trigonométrie, il faut savoir les retrouver rapidement.
- Pour monter qu'une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel, il n'est pas toujours pertinent d'essayer de montrer la stabilité par combinaison linéaire. Il peut être plus efficace de voir que cette partie est le noyau ou l'image d'une application linéaire bien choisie.
- Des candidats n'utilisent pas, dans le cadre du théorème spectral, le fait que l'on puisse choisir une base orthonormée de vecteurs propres ou une matrice P orthogonale et peinent alors à résoudre des exercices généralisant le cours sur l'étude de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
-

Concours Mines-Télécom :

Admissibles CCMP : Les candidats des filières MP, MPI, PC et PSI inscrits à la fois au Concours Mines-Télécom et au Concours Commun Mines-Ponts (CCMP) et admissibles à ces deux concours ne passent que les oraux CCMP. Leurs notes sont prises en compte par le Concours Mines-Télécom lors du classement final.

Fin des 1ère et 2ème séries : il n'y a plus qu'une série d'épreuves. Un candidat est admissible à toutes les écoles ou aucune.

L'épreuve orale consiste en la résolution sans préparation de deux exercices portant sur des parties différentes du programme. Soulignons pour commencer que le programme est celui des deux années des classes préparatoires de la filière du candidat. Certains candidats ont clairement pensé que l'interrogation ne porterait que sur le programme de deuxième année, ce qui peut donner une prestation catastrophique. Les candidats admissibles avaient été sélectionnés à partir des épreuves écrites du concours MinesPonts, le niveau moyen était bon, mais même s'il y avait peu de candidats pas du tout au niveau, l'écart restait important entre les meilleurs et les plus faibles. Les candidats du concours 2022 avaient subi des confinements pendant leur préparation. Certains examinateurs ont constaté une baisse de niveau, sur les connaissances, mais également sur la façon d'aborder un oral et le traiter.

Déroulement de l'épreuve :

En entrant dans la salle d'interrogation, le candidat remet à l'examinateur sa convocation, une pièce d'identité et la feuille d'émargement des examinateurs. Il est souhaitable que ces documents soient prêts à l'avance, tout temps passé à rechercher l'un d'entre eux au fond d'un sac va raccourcir le temps de l'interrogation.

Après ces formalités, soit le candidat tire un sujet au sort, soit reçoit un sujet de l'examinateur. Tous les sujets comprennent deux exercices, et les candidats peuvent commencer par l'exercice de leur choix. Il y a donc une décision à prendre, pour cela l'examinateur laissera quelques minutes de réflexion avant de commencer l'oral proprement dit.

Il est souhaitable que le candidat se décide assez rapidement et informe clairement l'examinateur par quel exercice il commence. On peut penser qu'il est préférable de commencer par la partie qu'on maitrise le mieux, mais il faut être conscient que les deux exercices seront abordés pendant l'épreuve, pas forcément pendant la même durée.

L'épreuve orale ne doit pas être un écrit debout et a pour but de tester, bien évidemment les connaissances en mathématiques et la capacité à les mettre en œuvre, mais aussi, voire surtout, la capacité de dialogue, d'écoute et de compréhension des remarques et indications de l'examinateur. Le candidat doit veiller à adopter une attitude qui favorise l'interaction, il est fortement déconseillé par exemple de rester face au tableau, le dos tourné à l'examinateur. Il est aussi souhaitable d'éviter les attitudes négatives, par exemple en répétant «Je ne sais pas». Il faut bien sûr éviter les propositions de solutions toutes faites, données au hasard, sans savoir justifier leur mise en œuvre. Mais rester silencieux ou avouer son incompétence en espérant obtenir des indications de la part de l'examinateur est un comportement sanctionné au niveau de la note.

On attend donc que le candidat se montre sous son meilleur jour. Pour cela, il devra :

- Bien cerner et comprendre les exercices proposés,
- Envisager une ou plusieurs méthodes puis choisir la plus appropriée avant de se lancer dans la résolution du problème étudié,
- Expliquer sa démarche à l'examinateur,
- Justifier les affirmations avancées et donner des énoncés précis des théorèmes de cours utilisés.

Notation :

La notation se fait sur un ensemble de critères et non sur la seule connaissance du cours, même si cela reste un point important. Il n'est pas nécessaire de terminer les deux exercices pour avoir une bonne note. Il faut surtout être réactif, savoir prendre des initiatives, mais aussi changer de stratégie si cela est conseillé, le pire défaut est de s'obstiner dans une voie qui conduit à une impasse en restant sourd aux remarques et indications. Un autre travers est de rester trop longtemps silencieux, on attend des candidats un certain dynamisme. Il faut également faire attention à l'organisation du tableau, il est quand même regrettable qu'après deux, voire trois, années de préparation, on voit encore des calculs éparpillés aux quatre coins du tableau. Certains candidats ont été surpris que l'examinateur leur demande de refaire une démonstration, parce qu'ils pensaient qu'elle était correcte, il n'en était bien évidemment rien.

Remarques d'ordre mathématiques :

Le cours de première année est souvent très mal connu, par exemple celui sur les nombres complexes et la trigonométrie. Les équivalents et les développements limités sont mal maitrisés chez certains candidats, de même que l'intégration par parties. Des examinateurs ont relevé cette année des lacunes sur le théorème du rang et plusieurs points du cours d'algèbre linéaire de première année.

Le cours de probabilités, surtout celui de deuxième année, avec une mention particulière pour formule des probabilités totales et les systèmes complets d'événements, a parfois fait l'objet d'une impasse pure et simple.

L'algèbre linéaire reste un domaine difficile. Pour certains cela se résume à des recettes de cuisine appliquées sans le moindre recul : par exemple, utiliser systématiquement le polynôme caractéristique pour déterminer les valeurs propres d'une matrice qui est visiblement de rang 1. . .

En algèbre bilinéaire, le calcul d'une distance à un sous-espace vectoriel s'avère très difficile (voir infaisable) à mettre en œuvre lorsque l'on est déjà incapable de reconnaître que l'on est en présence d'un problème de ce type !

Les théorèmes importants sur les intégrales dépendantes d'un paramètre sont en général bien connus, mais des difficultés techniques restent souvent insurmontables au niveau de la vérification des hypothèses. Par exemple la convergence d'une intégrale qui résulte d'un prolongement par continuité de la fonction intégrée peut donner lieu à des complications étonnantes, on retrouve là une lacune du cours de première année, à laquelle on peut ajouter des difficultés dans l'utilisation des équivalents et des développements limités.

On observe aussi souvent une confusion entre le passage à la limite dans les inégalités et le théorème d'encadrement, aussi bien pour les fonctions que pour les suites : dans le premier cas l'existence de la limite est dans les hypothèses et le résultat est la valeur de la limite, dans le second cas l'existence de la limite est dans la conclusion, avec, en plus, sa valeur.

On rencontre toujours de très nombreux étudiants qui sont incapables de trouver un rayon de convergence d'une série entière lorsque la règle de d'Alembert ne s'applique pas.

Les performances en logique sont souvent décevantes, on pourrait donner une longue liste des réponses farfelues données pour la négation d'une implication. Le programme contient moins de calcul différentiel que par le passé, mais ce qui reste est souvent mal connu, les questions sur les fonctions de plusieurs variables sont très mal traitées, notamment la règle de la chaîne.

La géométrie a quasiment disparu des programmes de MP, PC et PSI et pour les candidats de ces séries elle a complètement disparu, au point que certains sont incapables de déterminer une équation de droite.

Remarques spécifiques liées aux nouveaux programmes (PSI) :

Le fait de travailler sur la demi-droite achevée pour justifier la sommabilité d'une famille de réels positifs puis pour sommer par paquets a aidé les candidats.

La matrice Hessienne et son utilisation sont connues et appréciée et, en général, correctement maîtrisées.

Témoignage :

⋆ **Pierre D. :** *Pour mines-télécom, j'ai eu des exercices classiques (cf. pièce jointe) et l'examinateur était avenant, c'était un oral très agréable. J'ai fini l'exercice 1 avec un petit peu d'aide pour montrer qu'un ensemble image est réduit à 0. L'exercice 2 était lourd en calcul (ou je n'ai pas utilisé la méthode la plus rapide), j'ai juste eu le temps d'entamer la question 3. J'ai obtenu la note de 17 à cet oral.*

Table des matières

Thème 1

Complexes, polynômes, coefficients binomiaux

Rapports de jury :

- **CCINP 2022 PSI :** *Les calculs sur les polynômes, en particulier leur factorisation (en utilisant à bon escient la division euclidienne) sont souvent maladroits.*
- **Centrale 2021 PSI :** *Le jury remarque que certains candidats sont parfois bloqués par la méconnaissance de résultats élémentaires de première année voire de terminale. Quelques exemples : un polynôme réel de degré impair admet une racine réelle, l'expression des racines n−ième de l'unité...*
- **Mines Telecom 2021 :** *Le cours de première année est souvent très mal connu, par exemple celui sur les nombres complexes et la trigonométrie.*
- **Mines-Ponts 2019 PSI :** *Les calculs sur les complexes peuvent également poser problème, notamment la recherche du nombre de racines cubiques d'un complexe non nul, ou encore la méconnaissance de l'expression des racines n−ièmes de l'unité.*

Énoncés :

Exercice 1 (CCINP PC 2023)

Le polynôme $P(X) = X^4 + 4$ est-il irréductible sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (CCINP PC 2023 - ❆)

Soit $P(X) = X^3 - (2+i)X^2 + 3X + i - 2$. Montrer qu'il possède une racine réelle et le factoriser dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 3 (CCINP PC 2023 - ❆)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n(X) = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$.

1. Montrer que $(X-1)^3$ divise P_n.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de P_n par $(X-1)^3$.

Exercice 4 (IMT PC 2021 - ❆)

Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice 5 (IMT PSI 2022 - ❆)

Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx).$$

Exercice 6 (CCINP PC 2019 - ❆)

Soit $P(X) = (X+1)^7 - X^7 - 1$. Montrer que $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$ est racine de P et déterminer sa multiplicité.

Exercice 7 (Mines-Ponts PC 2019 - ❆❆)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $P_n(X) = (X+1)^n - X^n - 1$ par $X^2 + X + 1$.

Exercice 8 (Mines-Ponts PSI 2023 - ❆❆)

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P(k)$ est premier. Montrer que P est constant.

Exercice 9 (Mines-Ponts PSI 2022 - ❆)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0) = 0$ et $Q(X+1) - Q(X) = P(X)$.

Exercice 10 (Mines-Ponts PC 2019 - ❆❆)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)$.

Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 11 (Mines-Ponts PSI 2017 - ❆)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

$$(\mathcal{E}) : \ 1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0.$$

Exercice 12 (CCINP PC 2021 et 2022 - ❆)

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(\mathcal{E}_1) : \ z^n = e^{i\pi/3}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(\mathcal{E}_2) : \ \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 1.$$

Exercice 13 (IMT PSI 2019 - ❆)

Soit $n \geq 2$ un entier, on pose $z = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

1. Déterminer le module et un argument de $z^k - 1$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} |z^k - 1| = 2\mathrm{cotan}\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

Exercice 14 (CCINP PC 2021 - ❄❄)

Soit $n \geq 2$ un entier naturel.
Pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on pose $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_k$ et $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} z_k$.
2. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(x - z_k) = \frac{x^n - 1}{x - 1}$.
3. En déduire la valeur de $C_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 15 (TPE PC 2019 - ❄❄)

En factorisant $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} X^k$ dans $\mathbb{C}[X]$, montrer que :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Exercice 16 (Navale PSI 2018, Mines-Ponts PC 2022 - ❄❄)

1. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = 1$.
2. On suppose que n est impair. On note $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

   Calculer $p = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1 - \omega_k}{1 + \omega_k}$.
3. Exprimer p en fonction de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 17 (Centrale PC 2021 - ❄❄)

On considère S l'ensemble des polynômes unitaires de degré 3 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et dont les racines complexes sont de module inférieur ou égal à 1.

1. Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + X^3 \in S$. Exprimer les relations entre les a_i et les racines z_1, z_2 et z_3 de P.
2. Montrer que S est un ensemble fini.
3. Montrer que, si $P \in S$, ses racines non nulles sont de module 1.
4. Déterminer tous les polynômes appartenant à S.

Exercice 18 (Centrale PSI et Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant tel que :

$$P(X^2) = P(X)P(X-1).$$

1. Soit ω une racine de P. Montrer que ω^2 est aussi racine de P.
2. Montrer que les racines de P sont soit nulles, soit de module 1.
3. Montrer que 0 n'est pas racine de P
4. Déterminer tous les polynômes solution.

Exercice 19 (Mines-Ponts PC et MP 2021 - ❄❄❄)

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ distincts. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que : $(P(X^p))^q = (P(X^q))^p$.

Exercice 20 (Mines-Ponts PC 2019 - ❄❄❄)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in [-1, 1]$. On note $P(X) = X^{n+1} - aX^n + aX - 1$.
Montrer que les racines de P sont de module 1.

Exercice 21 (Centrale PC 2019 - ❄❄❄)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme R_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ R_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n}$$

et donner une expression de R_n.

Exercice 22 (Mines-Ponts PSI 2022 - ❄❄❄)

Soit $P \in \mathbb{Q}_n[X]$. Montrer l'équivalence entre les propriétés :

(i) $\forall k \in \mathbb{Z}, \ P(k) \in \mathbb{Z}$

(ii) $\forall k \in [\![0, n]\!], \ P(k) \in \mathbb{Z}$

(iii) $\exists m \in \mathbb{Z}, \ \forall k \in [\![m, m+n]\!], \ P(k) \in \mathbb{Z}$

Ind : on pourra introduire les polynômes $H_k(X) = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$.

Exercice 23 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄❄)

On note U l'ensemble des complexes de modules 1.
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(U) \subset U$.

Thème 2

Algèbre linéaire, Calcul matriciel, Déterminant

Rapports de jury :

- **CCINP 2023 PSI :** *L'utilisation systématique de la méthode de Sarrus par certains candidats est parfois la cause de ces erreurs. On peut donc noter des calculs parfois maladroits de déterminants (la méthode dite "de Sarrus" a l'inconvénient majeur de ne pas permettre une factorisation directement) ou pour la résolution de systèmes linéaires, avec des substitutions peu efficaces. Il est d'ailleurs souvent opportun de simplifier le déterminant par des opérations sur les lignes et les colonnes avant de se lancer dans les calculs. La différence entre les candidats se fait entre celui qui comprend vraiment ce qu'il fait et celui qui fait les choses par automatisme.*
- **CCINP 2022 PSI :** *La compréhension de la nature des objets est au cœur des enjeux du programme. Une application linéaire sur un espace vectoriel de matrices ou de polynômes peut rapidement déstabiliser la majorité des candidats. Les calculs par blocs pour les matrices sont rarement bien menés, parfois évités en passant par des calculs coefficient par coefficient bien fastidieux.*

  La compréhension de la notion d'espaces supplémentaires (voire supplémentaires orthogonaux) est souvent fragile. Un nombre significatif de candidats s'arrête à la somme directe.

  Le calcul de déterminant est trop souvent maladroit : traité principalement avec la règle de Sarrus (matrice de taille 3) ou par développement par rapport à une ligne sans trop de réflexion.
- **CCINP 2019 PSI :** *La diagonalisation d'une matrice carrée est maîtrisée mais le lien entre matrice et application linéaire pose toujours des difficultés. La définition de la matrice d'une application linéaire dans une base donnée n'est pas suffisamment assimilée. Il en résulte des difficultés avec les exercices du type ≪ montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f est... ≫.*
- **Centrale 2022 PSI :** *Il ne faut pas confondre somme directe et supplémentaire et il convient de maitriser la définition de $E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots E_k$ souvent utilisée mais rarement comprise. Il est bon d'avoir à l'esprit l'hypothèse et la conclusion : en traduisant correctement l'une et l'autre, il n'y a parfois qu'un pas pour conclure.*
- **Mines-Ponts 2023 PSI :** *Pour monter qu'une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel, il n'est pas toujours pertinent d'essayer de montrer la stabilité par combinaison linéaire. Il peut être plus efficace de voir que cette partie est le noyau ou l'image d'une application linéaire bien choisie.*
- **Mines-Ponts 2019 PSI :** *Les exercices d'algèbre linéaire abordable en première année sur les noyaux et images d'endomorphismes peuvent poser problème. Il est souvent plus rapide de prouver qu'une application est linéaire par composée d'applications linéaires que de revenir à la définition. La notion de sous-espace stable et endomorphisme induit n'est pas toujours maîtrisée. Globalement le cours d'algèbre linéaire de PSI est su, mais manque de recul.*

Énoncés :

Exercice 24 (IMT MP 2023 - ❄)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Soit $x \in E$ tel que $u^k(x) \neq 0$.

1. Montrer que $(x, u(x), \ldots, u^k(x))$ est libre.
2. Qu'en déduit-on concernant l'indice de nilpotence ?

Exercice 25 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n$.

1. Exprimer la matrice P de la famille $(S_k)_{k\in\{0,\ldots,n\}}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que $(S_k)_{k\in\{0,\ldots,n\}}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Calculer P^{-1}.

Exercice 26 (IMT PC 2022 - ❄❄)

Soit E un espace vectoriel de dimension n, F_1 et F_2 deux sous-espaces de E de dimension $n-1$.

Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que $E = F_1 \oplus G = F_2 \oplus G$.

Exercice 27 (IMT MP 2023 - ❄)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ telle que $f \circ f = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(f) \leq 2$.

Exercice 28 (CCINP PSI 2018, 2023 (Maxence B.) - ❄)

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u^2) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(u^2) \neq \mathrm{Ker}(u)$.
3. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Déterminer les endomorphismes v qui commutent avec u.

Exercice 29 (CCINP PSI 2022 (Elias A. B. - ❄❄)

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note M l'ensemble des matrices magiques. Ce sont les matrices dont la somme des coefficients sur une ligne, sur une colonne ou sur une diagonale donne toujours le même résultat.
On note aussi :
- E l'ensemble des matrices symétriques magiques de trace nulle,
- F l'ensemble des matrices antisymétriques magiques,
- G l'ensemble des matrices dont tous les coefficients sont égaux.

1. Montrer que M est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que $M = E \oplus F \oplus G$.
3. Dans le cas où $n = 3$, calculer $\dim(E)$, puis $\dim(M)$.

Exercice 30 (CCINP PSI 2021 et 2022 - ❄❄)

Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $f + f^3 = 0$ et A sa matrice dans la base canonique.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f^2 + Id_{\mathbb{R}^3}) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
2. En déduire que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + Id_{\mathbb{R}^3})$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$ et que $\mathrm{Ker}(f^2 + Id_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0\}$.
4. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 31 (Centrale PSI 2022 - ❄❄)

1. Soit $u : P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto P' \in \mathbb{R}_n[X]$.
   Exhiber une base de $\mathbb{R}_n[X]$ dans laquelle la matrice de u n'a que des coefficients égaux à 0 ou 1.
2. Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :
   $$P - P' = Q.$$
   (b) Montrer que, si Q est à valeurs positives, il en est de même pour P.
   (c) Montrer que, si Q est à coefficients positifs, il en est de même pour P.

Exercice 32 (Centrale PSI 2022 - ❄❄)

Soit $(L_0, \dots, L_n)$ une une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant :
$$\forall (i,k) \in [\![0,n]\!]^2,\ L_k(i) = \delta_{i,k}.$$

1. Donner la forme factorisée des L_k et exprimer le coefficient dominant avec des factorielles.
2. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(k) = k^n$.
   Exprimer P de deux manières différentes.
4. Donner une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^n$.
5. Donner la dimension de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.
   Montrer qu'il existe un unique $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :
   $$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \int_0^n P(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P(k).$$

Exercice 33 (IMT PC 2022 - ❄)

Soient P le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - 2y + 3z = 0$ et D la droite vectorielle engendrée par $(2, 2, 1)$.
Montrer que P et D sont supplémentaires et déterminer les matrices dans la base canonique du projecteur sur P parallèlement à D et de la symétrie par rapport à P parallèlement à D.

Exercice 34 (CCINP PSI 2022 - ❄❄)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, p et q deux endomorphismes de E tels que $p + q = Id_E$ et $\mathrm{rg}(p) + \mathrm{rg}(q) \leq \dim(E)$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$.
2. Montrer que p et q sont des projecteurs.

Exercice 35 (ENSEA PSI 2019 - ❄❄)

On se donne une famille $(f_1, \dots, f_p)$ d'endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension n, tels que :
$$\sum_{i=1}^{p} f_i = \mathrm{Id}_E \text{ et si } i \neq j \text{ alors } f_i \circ f_j = 0.$$

1. Montrer que les f_k sont des projecteurs de E.
2. Montrer que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Im}(f_i)$.

Exercice 36 (CCINP PSI 2018 - ❄❄)

Soit f un endomorphisme de E qui admet un polynôme annulateur P vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$, d'abord en dimension finie, puis en dimension quelconque.

Exercice 37 (Mines-Ponts PSI 2022 - ❄❄)

Soient E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p et S un sous-espace de E stable par u vérifiant $E = \mathrm{Im}(u) + S$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $E = \mathrm{Im}(u^k) + S$.
2. En déduire que $S = E$.

Exercice 38 (Mines-Ponts PSI 2022 - ❄❄)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient p, q, r trois projecteurs de E. On suppose que $p + \sqrt{2}q + \sqrt{3}r$ est un projecteur.

1. Montrer que la trace d'un projecteur est un entier naturel.
2. Montrer que $q = r = 0$.

Exercice 39 (Navale PSI 2023 - ❄❄❄)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = \mathrm{Id}_E$. On suppose que $\mathrm{Im}(p)$ est stable par u.

On pose $q = \displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}$.

Montrer que q est un projecteur et que $\mathrm{Ker}(q)$ est stable par u.

Exercice 40 (IMT MP 2022 - ❄❄)

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$.

1. A-t-on nécessairement $BA = 0$?
2. Montrer que $\mathrm{tr}((A + B)^p) = \mathrm{tr}(A^p) + \mathrm{tr}(B^p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
3. Déterminer une relation entre $\mathrm{rg}(A)$ et $\mathrm{rg}(B)$.

Exercice 41 (Navale PSI 2023 (Lucas E.) - ❄❄)

Montrer que la matrice M suivante est inversible et calculer son inverse.
$$M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \ddots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

Exercice 42 (CCINP MP 2022 - ❄❄)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que A inversible, B nilpotente et $AB = BA$.
Montrer que $A - B$ et $A + B$ sont inversibles.

Exercice 43 (St-Cyr MP 2022 - ❄❄)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\text{rg}(B) = 1$.
Montrer que $\det(A + B)\det(A - B) \leq \det(A)^2$.

Exercice 44 (Mines-Ponts PSI 2023 - ❄❄)

Soit $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ avec $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que M soit inversible.
2. Calculer alors M^{-1}.

Exercice 45 (Mines-Ponts PSI 2017 - ❄❄❄)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$.

Montrer que $\det(M) \geq 0$.

Exercice 46 (Mines-Ponts PSI 2019 - ❄❄❄)

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = 0$ et $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$. Montrer que les matrices A et B sont semblables.
2. Le résultats subsiste-t-il avec les hypothèses $A^3 = B^3 = 0$ et $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$?

Exercice 47 (CCINP PSI 2023 - ❄❄)

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = a$ si $i = j$, $a_{i,j} = b$ si $i > j$ et $a_{i,j} = c$ si $i < j$.
Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Calculer $\det(A + xJ)$.
2. En déduire $\det(A)$.

Exercice 48 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

Soient $a_1, \ldots, a_n, x \in \mathbb{R}$. Calculer $\begin{vmatrix} a_1 + x & x & \cdots & x \\ x & a_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x & \cdots & x & a_n + x \end{vmatrix}$.

Exercice 49 (CCINP PSI 2023 - ❄)

1. Rappeler la forme d'une matrice de Vandermonde et l'expression de son déterminant.
2. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $f_k : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{kx}$.
   Montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre.
3. (a) Montrer que le polynôme $P(X) = X^3 + X + 1$ admet 3 racines distinctes dans $\mathbb{C}$. On les note α, β, γ.
   (b) Résoudre le système $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} x + y + z & = & 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z & = & 0 \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z & = & 0 \end{cases}$

Exercice 50 (Mines-Ponts PSI 2023 - ❄❄)

Montrer qu'il existe $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ P(X + n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X + k) = 0.$$

Exercice 51 (Mines-Ponts PSI 2021 - ❄❄)

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$.

Montrer que $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & 1 & x_2 & 1 & 0 \\ x_1^2 & 2x_1 & x_2^2 & 2x_2 & 2 \\ x_1^3 & 3x_1^2 & x_2^3 & 3x_2^2 & 6x_2 \\ x_1^4 & 4x_1^3 & x_2^4 & 4x_2^3 & 12x_2^2 \end{vmatrix} \neq 0$ si et seulement si x_1 et x_2 sont distincts.

Exercice 52 (Mines-Ponts PSI 2023 - ❄❄❄)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimenssion finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent et F un sous-espace-vectoriel de E tel que $u(F) \subset F$.
On suppose que $E = F + \text{Im}(u)$. Montrer que $E = F$.

Exercice 53 (Centrale PC 2022 - ❄❄❄)

Soit $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{tr}(M) = 0\}$.

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.
2. Montrer que toute matrice de H est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.
   On pourra raisonner par récurrence sur n et distinguer le cas où M est une matrice d'homothétie.
3. Montrer que $H = \{AB - BA,\ (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2\}$.
   On pourra utiliser la question 2.

Exercice 54 (X PSI 2023 - ❄❄)

Soit E un espace de dimension finie.
Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ formée de projecteurs.

Thème 3

Réduction

Rapports de jury :

- **CCINP 2023 PSI :** *Le calcul des polynômes caractéristiques est souvent entaché d'erreurs ce qui est préjudiciable pour la poursuite de l'exercice. Le lien entre polynôme caractéristique, polynôme annulateur (mentionné par certains candidats comme le polynôme annulateur) et valeurs propres d'une matrice ou d'un endomorphisme est souvent confus.*

  La classique question sur le fait que les valeurs propres font partie des racines d'un polynôme annulateur donne parfois lieu à des calculs étranges (et faux) incluant des puissances de vecteurs.

  Peu de candidats voient le lien entre une combinaison linéaire nulle des colonnes de la matrice et un vecteur du noyau. Le rang de la matrice est rarement utilisé pour trouver la dimension du noyau, par exemple dans la recherche des vecteurs propres.
- **CCINP 2022 PSI :** *La mise en œuvre pratique de la réduction (diagonalisation, trigonalisation) de matrices est en général satisfaisante et les conditions pour les matrices sont la plupart du temps connues : valeurs propres et dimension des espaces propres associés, polynôme annulateur scindé à racines simples. L'adaptation à des endomorphismes est souvent moins convaincante, avec des conditions qui sont rarement énoncés spontanément : existence d'une base de vecteurs propres, ou écriture de l'espace comme somme (directe) des espaces propres.*
- **CCINP 2019 PSI :** *Beaucoup de candidats savent identifier une matrice de rang* 1 *mais éprouvent plus de difficultés pour utiliser ce résultat pour écourter la recherche des espaces propres.*

  Trop de candidats confondent polynôme annulateur et polynôme caractéristique et utilisent l'expression ≪ LE polynôme annulateur ≫. Ceci les amène par exemple à considérer que si P *est annulateur de* A*, alors les racines de* P *sont valeurs propres de* A*. Dans le même ordre d'idées, certains candidats pensent que la diagonalisabilité est déductible du polynôme caractéristique et on voit trop souvent des candidats affirmer que puisque le polynôme caractéristique (ou le polynôme annulateur) est scindé, la matrice est diagonalisable.*

  Le calcul du polynôme caractéristique est la plupart du temps effectué par la règle de Sarrus ou par développement par rapport à une ligne ou une colonne, ce qui conduit à une forme développée dont la factorisation pose problème. Les polynômes de matrices et d'endomorphismes sont très mal maîtrisés. Une erreur très courante consiste à calculer $P(MX)$ *au lieu de* $P(M)X$*, lorsque* P *désigne un polynôme,* N *une matrice et* X *un vecteur.*
- **Mines Telecom 2022 :** *L'algèbre linéaire reste un domaine difficile. Pour certains cela se résume à des recettes de cuisine appliquées sans le moindre recul : par exemple, utiliser systématiquement le polynôme caractéristique pour déterminer les valeurs propres d'une matrice qui est visiblement de rang 1...*
- **Centrale 2022 PSI :** *Il est parfois difficile d'étudier le caractère diagonalisable d'une matrice* 2×2*. Le fait que les valeurs propres d'une matrice triangulaire se trouvent sur la diagonale nécessite souvent un lourd calcul. Certains candidats ne voient pas qu'une matrice de taille* n *qui n'est pas de rang* n*, admet* 0 *pour valeur propre. La détermination des espaces propres d'une matrice est le plus souvent abordée par résolution du système* $AX = \lambda X$*. La recherche du noyau de* $A - \lambda I_n$ *par opérations sur les colonnes est pourtant bien plus rapide et élégante mais suppose de savoir interpréter vectoriellement les opérations sur les colonnes.*
- **Centrale 2019 PSI :** *La recherche de vecteurs propres évidents (comme* $(1, \dots, 1)^T$*) est moins spontanée que l'année dernière. Par ailleurs, la détermination de la dimension d'un sous-espace propre doit faire intervenir un argument sur le rang du système même en petite dimension : on ne peut pas se contenter de dire ≪ on voit bien que le sous-espace est de dimension 1 ≫.*
- **Navale 2019 et 2021 PSI :** *Les étudiants doivent savoir que si deux endomorphismes commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre. Les conditions de diagonalisabilité d'une matrice ou d'un endomorphisme ont été trop souvent mal maitrisées. Il est important que les candidats sachent faire la distinction entre une condition nécessaire et une condition suffisante. Le jury a souvent constaté une majoration de l'ordre de multiplicité d'une valeur propre par la dimension du sous-espace propre associé.*

  Le rôle de la valeur propre particulière nulle n'est pas suffisamment bien connu des candidats. Si le lien entre valeur propre et racine d'un polynôme annulateur est partiellement maitrisé, la distinction du corps de référence pose souvent de nombreux problèmes. Le rôle de la valeur propre particulière nulle n'est pas suffisamment bien connu des candidats.
- **Mines-Ponts 2021 PSI :** *un polynôme annulateur d'un endomorphisme, lorsqu'il est scindé à racines simples, devrait immédiatement susciter une réaction ;*

  Après avoir obtenu une valeur propre λ *d'une matrice* A *(par exemple comme racine du polynôme caractéristique) et en cherchant à déterminer l'espace propre associé, certains candidats sont perplexes en constatant qu'il n'y a pas une unique solution au système linéaire* $AX = \lambda X$*.*
- **Mines-Ponts 2019 PSI :** *Il n'est pas suffisant, pour établir qu'un endomorphisme est diagonalisable, de donner la liste exhaustive des critères de diagonalisabilité : il faut choisir la plus adaptée à la situation. La caractérisation par l'existence d'un polynôme annulateur*

scindé à racines simples n'est pas toujours spontanément citée, et lorsque c'est le cas la simplicité des racines est souvent oubliée. Des confusions d'inégalités entre dimension des sous-espaces propres et multiplicité des valeurs propres.

Les candidats savent en général que l'indice de nilpotence d'une matrice de taille n est majoré par n, bien que ce résultat ne soit pas explicitement au programme, mais tous ne savent pas le démontrer.

Énoncés :

Exercice 55 (CCINP PSI 2023 - ❄)

Soient A, N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant le même polynôme caractéristique P.

1. Montrer que si P a n racines distinctes, alors A et B sont semblables.
2. Montrer que si ce n'est pas le cas, alors on ne peut rien dire.

Exercice 56 (IMT PSI 2023 - ❄❄)

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{rg}(A)$, $\mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Ker}(A)$.
2. Diagonaliser A.

Exercice 57 (IMT PSI 2023 - ❄❄)

1. Préciser le rang de $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer ses valeurs propres sans calculer le polynôme caractéristique.
3. La matrice T est-elle diagonalisable ?

Exercice 58 (Navale PSI 2021 (Louis-Victor G.) - ❄)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $\mathrm{rg}(f) = 1$. f est-il un projecteur ?
2. Montrer que si $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{tr}(f) = 1$ alors f est un projecteur.

Exercice 59 (IMT PSI 2022 - ❄)

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = ij$ pour $1 \leq i, j \leq n$. Déterminer les éléments propres de A.

Exercice 60 (CCINP PSI 2023 - ❄)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto (X - a)P' + P - P(a)$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.
3. Déterminer les éléments propres de f.

Exercice 61 (IMT PSI 2021 - ❄)

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension trois, (e_1, e_2, e_3) une base de E. Pour $a \in \mathbb{C}$, soit $f_a \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$ et $f_a(e_2) = 0$.

1. Donner une base de l'image et du noyau de f_a.
2. Donner la matrice de f_a dans la base (e_1, e_2, e_3).
3. Calculer A^2. Qu'en déduire ?
4. Quelles sont les valeurs propres de f_a ? Cet endomorphisme est-il inversible ? diagonalisable ?

Exercice 62 (IMT PSI 2021 (Clément G.) - ❄)

Dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique.

On note aussi $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\varphi(M) = MP$.

1. Déterminer la matrice $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.
2. Déterminer le noyau et l'image de A (avec le moins de calculs possible).
3. Diagonaliser la matrice A (avec le moins de calculs possible).

Exercice 63 (CCINP PSI 2021 - ❄❄)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mais pas diagonalisable.
2. Donner les droites stables par A.
3. Donner les plans stables par A.

Exercice 64 (Mines Télécom PSI 2021 (Ilyana D.) - ❄)

Dans $E = \mathbb{C}_2[X]$, on pose $P_1(X) = (1 - X)^2, P_2(X) = X(1 - X)$ et $P_3(X) = X^2$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de E.
2. On définit :
$$u : P \in E \longmapsto P(0)(1 - X)^2 + P(1/2)X(1 - X) + P(1)X^2.$$
Montrer que u est un endomorphisme de E et déterminer la matrice $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$.
3. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 65 (CCP PSI 2021 - ❄❄)

Soit $j = e^{2i\pi/3}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & j^2 & j \\ j^2 & j & 1 \\ j & 1 & j^2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $\Phi : M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \longmapsto AMA \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
Déterminer l'image de Φ ainsi que ses valeurs propres.

Exercice 66 (CCINP PSI 2022 (Raphaël D.) - ❄❄)

Soit φ l'application qui à $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de $X^2P(X)$ par $X^4 - 1$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. φ est-il diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.
3. φ est-il inversible ? Si oui, donner φ^{-1}.

Exercice 67 (CCINP PSI 2023 - ❄❄)

Soit T défini sur $\mathbb{C}_n[X]$ par $T(P) = (X - 1)^n P\left(\dfrac{X}{X - 1}\right)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Est-il diagonalisable ?

Exercice 68 (IMT PSI 2022 - ❄❄)

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Exprimer $\chi_{A^{-1}}$ à l'aide de χ_A.

Exercice 69 (IMT PSI 2022 (Célia D.) - ❄❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible et $J =\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.
On écrit $A^{-1} = [a'_{i,j}]_{i,j=1,\dots,n}$ et on pose $M = A^{-1}J$.

1. Donner les coefficients $m_{i,j}$ de M en fonction de ceux de A^{-1}.
2. Donner le rang de M, et en déduire une valeur propre de M.
3. Montrer que $\det(A - J) = \det(A)\left(1 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a'_{i,j}\right)$.

Exercice 70 (IMT PSI 2023 (Élise A.) - ❄)

1. Réduire la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Résoudre le système différentiel :

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t) + 2z(t) \\ y'(t) & = & y(t) \\ z'(t) & = & 2x(t) + z(t) \end{array} \right.$$

Exercice 71 (ENSEA PSI 2021 - ❄)

Soit Φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $P+P'$.
On note M_Φ la matrice représentant Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. La matrice M_Φ est-elle inversible ?
3. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 72 (CCINP PSI 2021 (Andy D.) - ❄)

Soient A, B deux matrices réelles carrées de taille n telles que $AB - BA = A$.
Soit $f : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto XB - BX$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Calculer $\mathrm{tr}(A)$ et ensuite $\mathrm{tr}(A^k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f(A^k) = \alpha k A^k$.
4. En déduire que A est nilpotente.

Exercice 73 (IMT PSI 2023 - ❄❄)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et

$$\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longmapsto M - \mathrm{tr}(M)A.$$

1. Déterminer les éléments propres de φ.
2. Calculer $\det(\varphi)$.

Exercice 74 (IMT PSI 2022 - ❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$ et :

$$f : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \mathrm{tr}(X)A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme. Déterminer son noyau.
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Quelle est sa trace ?

Exercice 75 (CCINP PSI 2022 (Aubin G.) - ❄❄)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall P \in GL_n(\mathbb{R}),\ AP = PA$.

1. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B - \lambda I_n$ soit inversible.
   En déduire que $AB = BA$.
2. Montrer alors qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $A = \alpha I_n$.

Exercice 76 (CCINP PSI 2022 - ❄❄)

Soient E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On pose $Z_u = \{v \in \mathcal{L}(E),\ u \circ v = v \circ u\}$ et, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $E_k(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda_k Id)$.

1. Montrer que Z_u est un espace vectoriel.
2. Montrer que les $E_k(u)$ sont stables par tout $v \in Z_u$.
3. Déterminer les dimensions des $E_k(u)$.
4. Soit $v \in Z_u$. Montrer que tout vecteur propre de u est également vecteur propre de v.
5. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que, pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$, on ait : $v \in Z_u$ si et seulement si $\mathcal{M}\mathrm{at}_{\mathcal{B}}(v)$ est diagonale.
6. Déterminer la dimension de Z_u.
7. Montrer que $(Id, u, \dots, u^{n-1})$ est une famille libre et en déduire une base de Z_u.

Exercice 77 (CCINP PC 2022 - ❄❄)

On pose $j = e^{2i\pi/3}$.
On suppose que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à jA.

1. Montrer que si λ est valeur propre de A alors $j\lambda$ est valeur propre de A.
2. Montrer alors que $\lambda = 0$ puis que $A^2 = 0$.

Exercice 78 (ENSEA PSI 2021 - ❄❄)

Déterminer les $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 79 (ENSEA PSI 2021 - ❄❄)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que A est semblable à $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Retrouver cette expression en observant que $A = I_3 + N$ où N est une matrice nilpotente.

Exercice 80 (CCP PSI 2021 et 2022 - ❄❄)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.
2. Trouver une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
3. Les matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$ sont-elles diagonalisables ?

Exercice 81 (ENSEA PSI 2023 (Baptiste G.) - ❄)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Diagonaliser A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. En déduire l'ensemble des matrices qui commutent avec A.

Exercice 82 (CCINP PSI 2023 - ❄)

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on cherche les matrices $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$B^2 = A \ (\star)$$

1. (a) Montrer que si $\det(A) < 0$ alors $(\star)$ n'a pas de solution.
   (b) En déduire une condition nécessaire pour que $(\star)$ possède une solution.
2. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$.
   Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 2+a & 2 & 1+a \\ 3-a & 3 & 3-a \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.
   En déduire une condition nécessaire portant sur a pour que $(\star)$ possède une solution.
   On suppose désormais que cette condition est réalisée.
   (b) Calculer χ_A et déterminer les éléments propres de A.
   On distinguera les cas $a = 1$ et $a = 3$.
   (c) Montrer qu'il existe P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
   Dans la suite, on suppose que $a \notin \{1, 3\}$.
   (d) On suppose qu'il existe M telle que $M^2 = D$. Montrer que $MD = DM$.
   (e) En déduire toutes les matrices M telles que $M^2 = D$.
   (f) Montrer que $M^2 = D \iff (PMP^{-1})^2 = A$.
   (g) En déduire toutes les matrices B telles que $B^2 = A$.

Exercice 83 (CCINP PSI 2022 - ❄)

1. Montrer que $f : M \longmapsto M - M^T$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le noyau de f et préciser sa dimension. Est-ce que f est bijectif ?
3. Calculer $f(M)$ pour M antisymétrique.
4. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
5. Étudier la diagonalisabilité de f.

Exercice 84 (CCINP PSI 2021 (Mathis T.) - ❄)

Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $M^3 - 4M = 0$ et $\mathrm{tr}(M) = 0$.

1. Montrer que les valeurs propres de M sont racines du polynôme $P(X) = X^3 - 4X$.
2. Décrire les matrices M solutions.

Exercice 85 (CCINP PSI 2023 - ❄)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M + I_n = 0$.

1. La matrice M est-elle diagonalisable ? est-elle inversible ?
2. Montrer que n est paire. Déterminer $\det(M)$ et $\mathrm{tr}(M)$.

Classique
On trouve $\det(M) = 1$ et $\mathrm{tr}(M) = -\dfrac{n}{2}$.

Exercice 86 (CCINP PSI 2021 et 2022 (Célia D.) - ❄❄)

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^4 = 4M^2$ et $\{-2, 2\} \subset \mathrm{Sp}(M)$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(M) \subset \{-2, 0, 2\}$.
2. La matrice M est-elle diagonalisable.

Exercice 87 (CCINP PSI 2023 - ❄)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = \dfrac{1}{3}\left(u^2 + u + \mathrm{Id}\right)$.

1. Montrer que u est bijectif.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u^n est une combinaison linéaire de u^2, u et Id.
3. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Exercice 88 (CCINP PSI 2021 - ❄❄)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 + M^T = I_n$.

1. Montrer que, si P est un polynôme annulateur de M, toute valeur propre de M est racine de P.
2. On suppose dans cette question seulement que M est symétrique. Montrer que M est diagonalisable puis que $\mathrm{tr(M)}\det(M) \neq 0$.
3. Montrer que M est diagonalisable.
4. Montrer que M est inversible si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de M.

Exercice 89 (CCINP PSI 2023 (Thibault H.) - ❄❄)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$u^2 = u^3, \quad u \neq \mathrm{Id}_E,\ u^2 \neq 0 \text{ et } u^2 \neq u.$$

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(u) \subset \{0, 1\}$.
2. À l'aide de $u^2 \neq u$, trouver un vecteur non nul, dont l'image par u est 0.
3. Montrer que 1 est valeur propre de u.
4. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Exercice 90 (Mines-Ponts 2023 (Yassine N.) - ❄)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que f^2 soit un projecteur.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Exercice 91 (CCINP PSI 2022 - ❄❄)

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $u : m \longmapsto aM + bM^T$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Trouver un polynôme annulateur de u de degré deux.
3. Déterminer les éléments propres de u.
4. Calculer $\det(u)$ et $\mathrm{tr}(u)$.

Exercice 92 (CCINP PSI 2021 (Louis.B) - ❄❄)

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

1. Donner le rang de A ; en déduire la dimension du noyau.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Que dire de la multiplicité de la valeur propre 0 ?
4. Montrez que A admet trois valeurs propres $0, \lambda, 1 - \lambda$.
5. Donnez un polynôme annulateur de A de degré 3.

Exercice 93 (CCINP PC 2023 - ❄)

Trouver les couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 2 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 94 (CCINP PC 2021 et 2022 - ❄❄)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ pour que la matrice $M=\begin{pmatrix}0&0&c^2\\0&b^2&0\\a^2&0&0\end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 95 (CCINP PSI 2022 - ❄❄)

Soit $a\in\mathbb{R}$. Calculer le polynôme caractéristique, puis étudier la diagonalisabilité de

$$A=\begin{pmatrix}0&1&a\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$$

Exercice 96 (Mines-Ponts PSI 2021 - ❄❄)

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, u, v deux endomorphismes de E.

1. Montrer que u et v n'ont pas de valeur propre commune si et seulement si $\chi_u(v)$ est inversible.
2. On suppose qu'il existe $f\in\mathcal{L}(E)\setminus\{0\}$ tel que $u\circ f=f\circ v$. Montrer que u et v ont une valeur propre commune. Que peut-on dire si f est un automorphisme ?

Exercice 97 (CCINP PSI 2021 - ❄❄)

Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.
2. On suppose que : $\exists C\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ AC=CB$ et $C\neq 0$.
   (a) Montrer que, pour tout $P\in\mathbb{C}[X]$, on a $P(A)C=CP(B)$.
   (b) Montrer qu'un produit de matrices est inversible si et seulement si tous ses facteurs le sont. En déduire que A et B ont au moins une valeur propre commune.
3. Réciproquement, si A et B ont une valeur propre commune, montrer qu'il existe une matrice C non nulle telle que $AC=CB$.

Exercice 98 (Centrale PSI 2022 - ❄❄)

Soient $a_0,\dots,a_{N-1}\in\mathbb{C}$ et $\theta\in\mathbb{R}$. On pose :

$$J=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&&&\ddots&1\\\vdots&&\ddots&\ddots&0\\1&0&\cdots&0&0\end{pmatrix},\qquad V=\begin{pmatrix}e^{i\theta}\\e^{2i\theta}\\\vdots\\\vdots\\e^{Ni\theta}\end{pmatrix}$$

$$\text{et } A=\begin{pmatrix}a_0&a_1&\cdots&a_{N-2}&a_{N-1}\\a_{N-1}&a_0&a_1&&a_{N-2}\\a_{N-2}&a_{N-1}&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&a_1\\a_1&\cdots&a_{N-2}&a_{N-1}&a_0\end{pmatrix}.$$

1. Exprimer A comme polynôme en J.
2. Montrer que J est diagonalisable dans C. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que V soit un vecteur propre de J.
3. Montrer que A est diagonalisable dans C. Exhiber $P\in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale. En déduire une expression de $\det(A)$.

Exercice 99 (CCINP PSI 2023 - ❄❄(❄))

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que $f^2=g^2=id_E$ et $f\circ g+g\circ f=0$.

1. Montrer que f et g sont deux endomorphismes diagonalisables et que leur spectre est $\{-1,1\}$.
2. Montrer que la dimension de E est paire. On pose $\dim(E)=2n$.
3. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle f et g sont représentés par $M_f=\begin{pmatrix}I_n&0\\0&-I_n\end{pmatrix}$ et $M_g=\begin{pmatrix}0&I_n\\I_n&0\end{pmatrix}$.

Exercice 100 (CCP PSI 2018 (Loïc M.), 2019, 2021 - ❄❄)

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et B définie par $B=\begin{pmatrix}0_n&A\\I_n&0_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Donner le rang de B en fonction de celui de A.
2. Exprimer χ_B en fonction de χ_A. En déduire le spectre de B en fonction de celui de A.
3. Si A est inversible, B est-elle diagonalisable ?
4. Si A est diagonalisable mais non inversible, B est-elle diagonalisable ?

Exercice 101 (CCINP PSI 2023 - ❄❄)

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2-5A+6I_n=0$.

1. Donner deux conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité d'une matrice carrée.
2. Justifier que A est diagonalisable.
   Soit D une matrice diaginale semblable à A.
3. Montrer que les valeurs propres de A sont racines de X^2-5X+6.
4. On pose pour $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(M)=DM+MD$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que f est diagonalisable.
   Ind : utiliser des matrices par blocs.
5. On pose pour $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $g(M)=AM+MA$.
   Montrer que g est diagonalisable.

Exercice 102 (Mines-Ponts PSI 2021 - ❄❄)

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de projection. Étudier la diagonalisabilité des endomorphismes suivants :

$$u:M\longmapsto AM,\ v:M\longmapsto MA \text{ et } w:M\longmapsto AM-MA.$$

Exercice 103 (IMT PSI 2022 (Raphaël D.) - ❄❄)

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $u\in\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ définie par :

$$\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\quad u(M)=AM.$$

Montrer que $\mathrm{Sp}(u)=\mathrm{Sp}(A)$.

Exercice 104 (Mines-Ponts PSI 2021 - ❄❄❄)

Soient $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et $B=A^3+A+I_n$.
Montrer que A est un polynôme en B. Le résultat reste-t-il vrai si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$?

Exercice 105 (Navale PSI 2019, Centrale PC 2022 - ❄❄❄)

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que 1 est la seule valeur propre de M si et seulement si, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathrm{tr}(M^k)=n$.

Exercice 106 (Mines-Ponts PSI 2023 - ❄❄❄)

Soit $P = X^5 - 2X^4 - 2X^3 + X^2 + 4X + 4$.

1. Vérifier que $P(2) = P'(2) = 0$. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Trouver les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $P(M) = 0$, $\det(M) = \pm 1$ et $\operatorname{tr}(M^3) = 0$.

Exercice 107 (St Cyr MP 2023 - ❄❄❄)

Soit $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \longmapsto \mathbb{C}$ verifiant :

(i) $\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \lambda$.

Montrer que $\varphi = \det$.

Exercice 108 (CCINP PSI 2023) - ❄❄(❄))

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ admettant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

1. Montrer que $\varphi : P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \longmapsto (P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)) \in \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme.
2. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$.
   (a) Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g.
   (b) Montrer que tout vecteur propre de f est un vecteur propre de g.
   (c) Montrer qu'il existe une base de E formée de de vecteurs propres communs à f et g.
   (d) Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.
3. Montrer que l'ensemble des endomorphismes des E commutant avec f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et déterminer sa dimension.

Exercice 109 (Centrale PSI 2022 - ❄❄❄)

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $f(I_n) = I_p$ et telle que pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on ait $f(AB) = f(A)f(B)$.
On pose $\varphi : M \longmapsto \operatorname{tr}(\varphi(M))$.

1. Justifier que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\varphi(AB) = \varphi(BA)$.
2. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi : M \longmapsto \alpha\operatorname{tr}(M)$.
3. Montrer que n divise p.
4. Montrer que, si A est diagonalisable, alors $f(A)$ est diagonalisable.
5. Dans le cas $n = p = 2$, montrer que f est bijective.

Exercice 110 (Centrale PSI 2021 - ❄❄(❄))

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable telle que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice L. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A.

1. Que peut-on dire des λ_i ?
2. Montrer que A admet un polynôme annulateur de degré p.
3. Montrer que les valeurs propres de A sont racines de tous les polynômes annulateurs de A. En déduire que $(I_n, A, \ldots, A^{p-1})$ est libre.
4. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}$, il existe $P_k \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $A^k = P_k(A)$ puis qu'il existe $P \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $L = P(A)$.

Exercice 111 (Centrale PSI 2022 - ❄❄❄)

Pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on pose $M^* = \bar{M}^T$. Soient :
$\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ M^* = -M, \operatorname{tr}(M) = 0\}$
$\mathcal{G} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\ M^*M = I_2, \det(M) = 1\}$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et préciser sa dimension.
2. L'ensemble $\mathcal{A}$ est-il un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?
3. Caractériser $\mathcal{A} \cap \mathcal{G}$.
4. Une matrice appartenant à $\mathcal{G}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 112 (Centrale PSI 2021 - ❄❄❄)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr}(A) = 0$ et $\operatorname{tr}(A^2) \neq 0$. Montrer que A est diagonalisable.
2. Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $\operatorname{tr}(A^n) \neq 0$.
   Montrer que A admet une valeur propre non nulle.
   Montrer que que A est diagonalisable.
   Indication : Noter $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ de A les valeurs propres non nulles distinctes, de multiplicités $m_1, \ldots, m_N$ et considérer une matrice de Vandermonde.

Exercice 113 (IMT PSI 2023 - ❄❄(❄))

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\operatorname{Sp}(A) \cap \operatorname{Sp}(B) = \emptyset$.

1. Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible.

   On suppose désormais que qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AM = MB$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $A^kM = MB^k$.
3. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A)M = MP(B)$.
4. Montrer que M est la matrice nulle.
5. Dans le cas générale, que peut-on dire si l'on a M non nulle telle que $AM = MB$?

Exercice 114 (Mines-Ponts PSI 2019 - ❄❄)

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et T l'endomorphisme de E associant à une suite u la suite w définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Trouver les éléments propres de T .

Exercice 115 (Mines-Ponts PSI 2023 - ❄❄)

1. Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ que l'on décompose en $P = Q + iR$ avec $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q + \lambda R \in GL_n(\mathbb{C})$.
2. En déduire que si deux matrices A et B réelles sont semblables sur $\mathbb{C}$, alors elles le sont sur $\mathbb{R}$.
3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tells que $A^3 = B^3 = I_n$ et $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.
   Montrer que A et B sont semblables.

Exercice 116 (Mines-Ponts PSI 2022 (Hugo V.) - ❄❄❄)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f \circ f$ est diagonalisable. Montrer que :

$$f \text{ est diagonalisable} \iff \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}.$$

Thème 4

Algèbre bilinéaire

Rapports de jury :

- **CCINP 2023 PSI :** *La détermination d'une base orthonormée par la méthode de Gram-Schmidt et d'un projeté orthogonal sur un sous-espace (ou, ce qui est similaire, d'une distance à un tel sous- espace) est souvent mal faite. Peu de candidats pensent, lorsque cette projection orthogonale n'est pas pratique à calculer, à projeter sur l'orthogonal du sous-espace, ce qui est parfois plus simple.*

  Les isométries du plan et de l'espace sont le plus souvent mal connues. Les candidats font régulièrement allusion à la matrice de ces endomorphismes et n'imaginent pas que dans une autre base elle puisse avoir une base différente, même si cette base est orthonormée.
- **CCINP 2022 PSI :** *Le procédé de Gram Schmidt est souvent méconnu bien que classiquement attendu. En revanche, les questions relevant d'une distance à un sous-espace ou d'une projection orthogonale posent problème à une majorité de candidats. Les notions de projeté orthogonal et de distance à un sous-espace vectoriel sont méconnues.*

  Peu de candidats utilisent une approche géométrique comme support à leur intuition, alors que c'est souvent éclairant, en particulier en dimension 2 ou 3. Le conseil parfois donné d'illustrer la situation par une figure est trop souvent source de confusion alors qu'il a pour but d'aider.
- **Mines Telecom 2022 :** *En algèbre bilinéaire, le calcul d'une distance à un sous-espace vectoriel s'avère très difficile (voir infaisable) à mettre en œuvre lorsque l'on est déjà incapable de reconnaître que l'on est en présence d'un problème de ce type !*

  La géométrie a quasiment disparu des programmes de MP, PC et PSI et pour les candidats de ces séries elle a complètement disparu, au point que certains sont incapables de déterminer une équation de droite.
- **Centrale 2019 PSI :** *Reconnaitre une transformation géométrique en petite dimension dans un espace euclidien est un sujet qui permet d'évaluer de nombreuses compétences. Enfin, la résolution d'un système linéaire n'est pas utile pour déterminer l'inverse d'une matrice orthogonale.*
- **Centrale 2021 PSI :** *Si l'énoncé du théorème spectral, fréquemment demandé, est le plus souvent bien cité sous sa forme matricielle, il est bien difficile d'obtenir une formulation correcte pour les endomorphismes. Beaucoup d'étudiants parlent d'endomorphismes réels, expression dépourvue de sens et ne voient pas qu'il faut se placer dans le cadre des espaces euclidiens. La même difficulté existe pour les notions de matrices symétriques et d'endomorphismes symétriques : la matrice d'un endomorphisme symétrique est symétrique en base orthonormée, hypothèse qui est rarement citée.*
- **Centrale 2022 PSI :** *Dans le chapitre sur les espaces euclidiens, il faut avoir compris l'efficacité des bases orthonormées, en particulier pour écrire des coordonnées ou des matrices. Il faut savoir écrire les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée.*

  La définition géométrique d'une projection ou d'une symétrie, liée à la donnée de deux espaces supplémentaires, pose des problèmes à beaucoup de candidats. Le cas particulier des projections orthogonales et des symétries orthogonales n'est pas non plus toujours maitrisé.
- **Mines-Ponts 2023 PSI :** *Des candidats n'utilisent pas, dans le cadre du théorème spectral, le fait que l'on puisse choisir une base orthonormée de vecteurs propres ou une matrice P orthogonale et peinent alors à résoudre des exercices généralisant le cours sur l'étude de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.*
- **Mines-Ponts 2021 PSI :** *dans le cas d'un calcul de distance $\mathrm{d}(x,F)$ où F est un hyperplan, il est souvent bien plus aisé que déterminer $\|P_{\mathcal{F}^\perp}(x)\|$ que $\|x-P_{\mathcal{F}}(x)\|$. À noter que les questions de minimisation font trop peu souvent penser à une distance à un sous-espace vectoriel pour une norme euclidienne et que, dans ce cadre, le recours à une projection orthogonale est judicieux.*
- **Mines-Ponts 2019 PSI :** *On note des difficultés à reconnaitre une matrice de rotation du plan d'angle $\pi/2$.*

Énoncés :

Exercice 117 (Mines-Ponts PC 2018 - ❆)

Montrer que, si $x_1,\dots,x_n$ sont n réels strictement positifs dont la somme fait 1, alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\geq n^2$.

Exercice 118 (CCINP PC 2023 - ❆)

On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire usuel. Déterminer une base orthonormée de l'orthogonal de

$$F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ x+y+z+t=0 \text{ et } x-y+z-t=0\}.$$

Exercice 119 (Centrale PC 2023 - ❆❆)

Soit $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien.

1. Pour $a\in E$, on pose $\varphi_a : x\longmapsto\langle a,x\rangle$.
   Montrer que $a\longmapsto\varphi_a$ est un isomorphisme de E sur $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'il existe un unique $A\in\mathbb{R}_2[X]$ tel que :
$$\forall P\in\mathbb{R}_2[X],\ P(1/2)=\int_{-1}^{1}A(t)P(t)dt.$$
   Déterminer A.

Exercice 120 (CCINP PC 2021 - ❄❄)

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par :
$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

1. Calculer la norme de $P_n = \sqrt{n}(1-X)^n$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $T \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \langle T, P\rangle = P(0)$$

Exercice 121 (Mines-Ponts PC 2017 - ❄❄)

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $f : E \longrightarrow E$. On suppose que, pour tous $x, y \in E$ on a $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
Montrer que f est linéaire.

Exercice 122 (CCINP PSI 2022 - ❄)

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Pour $P, Q \in E$, on pose :
$$f(P, Q) = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1).$$

1. Montrer que f est un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormée de E.
3. Exprimer les coordonnées d'un polynôme $P \in E$ dans cette base. Que remarque-t-on ?

Exercice 123 (Centrale PC 2023 - ❄❄)

Soit E un espace euclidien et $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que :
$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i\rangle^2.$$

1. Montrer que $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille génératrice de E.
2. Montrer que $\forall k \in \{1, \dots, p\}$, $\|e_k\| \leq 1$.
3. Montrer que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de E si et seulement si les e_k sont de norme 1.

Exercice 124 (Centrale PSI 2022 (Raphaël D.) - ❄❄)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$.
On définit $\forall (P, Q) \in E^2, \quad (P|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx.$

1. Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur E.
2. On pose pour $k \in [\![0, n]\!]$, $B_k(X) = \dfrac{X^k}{k!}$. La famille $(B_0, B_1, \dots, B_n)$ est-elle une base orthonormée de E ?
3. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, et $t \in \mathbb{R}$, on pose $f_k(t) = t^k e^{-t}$ et $L_k \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}$, $L_k(t) = \dfrac{(-1)^k}{k!} e^t f_k^{(k)}(t)$.
Justifier l'existence et l'unicité de L_k, donner son degré et son coefficient dominant.
La famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est-elle une base orthonormée de E ?

Exercice 125 (CCINP PSI 2021 et 2022 (Mathilde P.) - ❄❄)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.

1. Montrer que pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :
$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right\|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2\right).$$
2. En déduire que si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 < 1$ alors $(e_1 + u_1, \dots, e_n + u_n)$ est une base de E.

Exercice 126 (Centrale PSI 2023 - ❄❄)

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle. Soient $u = (a, b, c)^T$ un vecteur unitaire et p la projection orthogonale sur $D = \mathrm{Vect}\{u\}$.
On note aussi f l'endormorphisme canoniquement associé à
$$M = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Exprimer $p(v)$ pour tout $v = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$.
2. Exprimer $f \circ f$ en fonction de p.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ et montrer que ces deux espaces sont supplémentaires orthoginaux.
4. Montrer que $f^3 = -f$.

Exercice 127 (IMT PSI 2023 - ❄)

Pour tous $A, B \in \mathbb{R}_3[X]$, on pose $\langle A, B\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} a_k b_k$,
où les a_k et b_k sont les coefficients de P et Q respectivement.
Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(1) = 0\}$.

1. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Donner la dimension et une base de H.
3. Donner une base orthonormée de H.

Exercice 128 (CCINP PSI 2018, 2021 (Emma H.) - ❄)

On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k$,
où les a_k et b_k sont les coefficients de P et Q respectivement.
Déterminer la projection orthogonale de 1 sur l'espace vectoriel $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(1) = 0\}$.

Exercice 129 (CCINP PSI 2022 - ❄)

1. Montrer que $\varphi(A, B) = \mathrm{tr}(A^T B)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{E} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Trouver une base orthonormée de $\mathcal{E}^\perp$.
4. Déterminer la distance de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à $\mathcal{E}^\perp$.

Exercice 130 (CCINP PSI 2021 - ❄)

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $(P, Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(1) = 0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et préciser sa dimension.
3. Déterminer la distance à E du polynôme constant égal à 1.

Exercice 131 (Centrale PSI 2023 - ❄❄)

Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $(P, Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_[X]$.
2. Montrer que $\left((X-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.
La notion de base infinie n'est pas au programme...
3. Déterminer l'orthogonal de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 132 (CCINP PSI 2023 (Kevin D.) ❄❄)

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$, et on définit $(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$.

1. Montrer que $(.,.)$ est un produit scalaire et donner une base orthonormée $(L_0, L_1, \dots, L_n)$.
2. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P'(0) = (P,Q)$.
   Exprimer ce polynôme Q dans la base $(L_0, L_1, \dots, L_n)$. Déterminer explicitement Q lorsque $n = 2$.
3. On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(0) + P(1) + \cdots + P(n) = 0\}$.
   Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E et donner sa dimension.
   Déterminer l'orthogonal de F, puis la distance de X^n à F.

Exercice 133 (Centrale PSI 2022 - ❄❄)

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que la série $\sum u_n^2$ converge. Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans E, on pose :

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n.$$

1. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. Montrer que, si $u \in E$ ne s'annule pas, $\frac{1}{u}$ n'appartient pas à E.
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \in E$.
4. On note F l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension infinie.
5. Que dire de $F + F^\perp$ et de $(F^\perp)^\perp$?

Exercice 134 (IMT PSI 2023 - ❄❄)

Pour $f, g \in E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, on pose $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.

Soient $F = \{f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ f(x) = 0\}$ et $G = \{g \in E,\ \forall x \in [-1,0],\ g(x) = 0\}$.

1. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. Montrer que F et G sont en somme directe orthogonale.
3. Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires ?
4. Montrer que $G \subset F^\perp$ puis que $G = F^\perp$.

Exercice 135 (CCINP PSI 2022 (Flavien L.) - ❄❄)

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et A la matrice de u dans la base canonique de E.
On désigne par v, l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est A^T.

1. Démontrer que $\forall x, y \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, v(y)\rangle$.
2. Soit F un s.e.v de $\mathbb{R}^n$ stable par u. Montrer que $F^\perp$ est stable par v.
3. On suppose que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer le polynôme caractéristique de A. Les matrices A et A^T sont-elles diagonalisables ?
   (b) Déterminer les sev stables par u.

Exercice 136 (CCINP PSI 2023 - ❄❄)

Soient E un espace euclidien et p un projecteur de E.

1. Pour $(y,z) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, développer $\|y + \lambda z\|$.
2. Montrer que p est un projecteur orrthogonal si et seulement si :

$$\forall x \in E\ \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

Exercice 137 (Navale PC 2023 - ❄❄)

Déterminer $m = \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$.

Exercice 138 (IMT PSI 2022 - ❄)

1. Montrer que la matrice d'une projection orthogonale dans une base orthonormée est une matrice symétrique.
2. Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = A$ et $A^T = A$ est la matrice d'une projection orthogonale dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
3. Que dire de la matrice $M = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$?

Exercice 139 (CCINP PSI 2022 - ❄❄)

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe, $e = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 + e_3)$ et D la droite portée par le vecteur e.
On considère la rotation u autour de l'axe D orienté par e d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Déterminer la matrice de u dans $\mathcal{B}$.

Exercice 140 (CCINP MP 2023 - ❄❄)

Soit E un espace euclidien de dimension n et $(a,b) \in E^2$ une famille libre.

1. Montrer que l'application définie par $\varphi(x) = \langle x, a\rangle a + \langle x, b\rangle b$ est un endomorphisme symétrique de E.
2. Déterminer le noyau de φ.
3. Trouver les éléments propres de φ.

Exercice 141 (CCINP PSI 2021 (Antoine D.)- ❄)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M \neq I_n$, $M^3 = I_n$ et $M^T M = MM^T$.

1. Montrer que $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant ces hypothèses.

Exercice 142 (CCINP PSI 2022 et 2023 (Baptiste G.) - ❄)

Soit $A \in GL_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = A^T$ et $A \neq I_2$.

1. Trouver un polynôme annulateur de A.
2. Montrer que le spectre d'une matrice est inclus dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur.
   En déduire le spectre de A.
3. Montrer que A est orthogonale.
4. Déterminer $\det(A)$.
5. En déduire les matrices A vérifiant les conditions de l'énoncé.

Exercice 143 (CCINP PSI 2022 - ❄❄)

Soient $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme annulateur de A.

1. Montrer que les valeurs propres de A sont des racines de P.
2. Peut-on avoir à la fois $\mathrm{tr}(A) = 0$ et $A^2 + A^T = I_3$?

Exercice 144 (IMT PSI 2023 - ❄❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique telle $\mathrm{Sp}_\mathbb{C} \subset \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}_\mathbb{C} \subset \{0\}$.
2. Donner le polynoôme caractéristique de A.
3. Montrer que $(A^T A)^n = 0$.
4. En déduire que $A^T A = 0$.
5. Déterminer toutes les matrices solutions.

Exercice 145 (Mines-Télécom PSI 2023 (Lucas E.) - ❄❄)

Soient $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -C^T \\ C & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

1. Calculer $M^T M$. En déduire que M est inversible.
2. Montrer que $M^{-1}M^T$ est une matrice orthogonale.

Exercice 146 (CCINP PSI 2023 - ❄❄)

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur propre $X \in \Updownarrow_{n,1}(\mathbb{R})$ de A.

On pose alors $B = \begin{pmatrix} A & XX^T \\ XX^T & A \end{pmatrix}$.

2. Donner les valeurs de $A \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $Y_a = \begin{pmatrix} X \\ aX \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B.
3. Donner une base de $\Updownarrow_{2n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de B.
4. On suppose que $n = 3$.
   On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.
   On définit B comme ci-dessus. Donner un polynôme annulateur de B de degré 3.

Exercice 147 (Mines-Télécom PSI 2023 (Pierre D.) - ❄❄ ?)

Soient $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $\frac{1}{2}(A+B) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $A = B$.

Exercice 148 (CCINP PSI 2023 - ❄)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = \alpha^{i+j-2}$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Déterminer le rang de A et en déduire ses valeurs propres.

Exercice 149 (CCINP PSI 2022 (Justin A.) - ❄)

Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit $M_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de M_a. Combien de valeurs propres possède-t-elle ? Les donner.
2. M_a est-elle diagonalisable ? Si oui, trouver P et D telles que $PDP^{-1} = M_a$.
3. M_a est-elle inversible ? Dans le cas où elle ne l'est pas, donner $\mathrm{Ker}(M_a)$ et $\mathrm{Im}(M_a)$.

Exercice 150 (IMT PC 2018, IMT PSI 2021 - ❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^T.A = A.A^T$ et telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $A^p = 0$.
En considérant la matrice $B = A.A^T$, montrer que $A = 0$.

Exercice 151 (CCINP PSI 2022 (Maxence B.) et 2023 (Gab

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$.

1. Justifier que les valeurs propres de S sont réelles. On les note :
$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$
2. Soit μ une valeur propre (réelle) de A.
   Ainsi, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $AX = \mu X$.
   (a) Calculer $X^T SX$.
   (b) Montrer que $\lambda_1 \leq \mu \leq \lambda_n$.

Exercice 152 (CCINP PSI 2022 - ❄❄)

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$.

1. Montrer l'équivalence : u est défini positif $\iff$ $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.
2. Si a et b sont deux endomorphismes symétriques définis positifs, montrer qu'il existe un unique $c \in \mathcal{L}(E)$ tel que $b = a \circ c + c \circ a$.
3. Montrer que c est symétrique défini positif.

Exercice 153 (Centrale PSI 2022 - ❄❄)

On pose $\varphi : (A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2 \longmapsto \mathrm{Tr}(A^T B)$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire. Montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux. Donner l'expression de $S(M)$ symétrie orthogonale de M par rapport à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
2. Soit A une matrice de $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$. Soit S_A sa projection orthogonale sur $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Sp}(S_A)$ son spectre. Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}(S_A) \subset [-1, 1]$.

Exercice 154 (IMT PSI 2022 - ❄❄)

Montrer que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\Big(\mathrm{tr}(A)\Big)^2 \leq \mathrm{rg}(A)\mathrm{tr}(A^2)$.

Exercice 155 (Centrale PSI 2022 - ❄❄)

Soient $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S = (s_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,j}| \leq 1$.
2. Montrer que, si S est positive, alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $s_{i,i} \geq 0$.
3. Montrer que, si S est positive, alors $\mathrm{tr}(SA) \leq tr(S)$. Étudier la réciproque.

Exercice 156 (Mines-Ponts PSI 2021 - ❄❄❄)

Soient E un espace euclidien, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et :
$$u : x \in E \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme symétrique de E.
2. Vérifier que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.
3. En déduire qu'il existe un automorphisme symétrique v de E tel que $u^{-1} = v^2$. Est-il unique ?
4. Soit v un automorphisme symétrique v de E tel que $u^{-1} = v^2$. Montrer que $(v(e_1), \ldots, v(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Exercice 157 (Centrale PC 2021 - ❄❄❄)

1. Soient $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs et $Q \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice $Q^T\Delta Q$ est symétrique, à valeurs propres strictement positives.
2. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives. Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que $B = P^T P$ et $A = P^T DP$.

Exercice 158 (Mines-Ponts PC 2018 - ❄❄❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si A est inversible, on peut écrire $A = OT$ avec O matrice orthogonale et T matrice triangulaire supérieure.
   On pourra appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt aux colonnes de A.
2. Montrer que $|\det(A)| \leq \sqrt{\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2\right)}$.

Thème 5

Fonctions, suites, séries numériques

Rapports de jury :

- **CCINP 2023 PSI :** *L'analyse asymptotique demeure très problématique : les équivalents et les développements limités sont souvent grossièrement faux ou n'ont pas sens : des fonctions équivalentes à zéro, des limites qui dépendent encore de la variable. La notion d'équivalent ne vient pas toujours à l'idée, et elle est souvent mal appliquée : pour certains candidats des suites ou des fonctions pour lesquelles l'intégrale ou la suite ont le même comportement sont équivalentes*

  Un nombre non négligeable de candidats pense qu'une suite positive qui converge vers zéro est décroissante.

- **CCINP 2019 PSI :** *La manipulation des équivalents pose des difficultés (addition d'équivalents, constantes multiplicatives négligées). Pour un nombre significatif de candidats, la notion de développement limité se confond avec celle de série entière. Certains candidats confondent également série entière et polynôme.*

- **CCINP 2022 PSI :** *La majoration d'une fraction rationnelle est un problème simple mais récurrent : majorer le numérateur, minorer le dénominateur. Les fonctions trigonométriques réciproques (Arcsin, Arccos, Arctan) interviennent régulièrement dans les exercices et ne sont pas toujours bien connues : ensemble de définition, conditions de dérivabilité et expression des dérivées.*

- **Mines Telecom 2022 :** *Les équivalents et les développements limités sont mal maitrisés chez certains candidats, de même que l'intégration par parties.*

  On observe aussi souvent une confusion entre le passage à la limite dans les inégalités et le théorème d'encadrement, aussi bien pour les fonctions que pour les suites : dans le premier cas l'existence de la limite est dans les hypothèses et le résultat est la valeur de la limite, dans le second cas l'existence de la limite est dans la conclusion, avec, en plus, sa valeur.

- **Centrale 2019 PSI :** *En analyse, il est essentiel de comprendre la différence entre deux exercices : démontrer qu'une limite existe, et démontrer qu'une limite existe et vaut ℓ. Rappelons que l'on ne peut écrire les symboles $\lim\limits_{x\to+\infty}$, $\displaystyle\int_a^{+\infty}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}$ qu'après avoir justifié leur existence (sauf exception précisée dans le programme : intégration par parties, changement de variables).*

- **Centrale 2021 PSI :** *Une grande majorité des candidats a été confrontée à de fréquentes difficultés sur des points issus du programme de première année. Il est assez paradoxal de constater que les candidats sont plus à même de citer le théorème de continuité des intégrales à paramètres que de donner un énoncé précis du théorème des accroissements finis.*

- **Centrale 2022 PSI :** *La maitrise des développements limités est loin d'être acquise pour tous les candidats. Rappelons que pour donner le développement limité d'une composée $f \circ g$ de deux applications, on commence par celui de g. Peu d'étudiants utilisent des développements limités au sens fort (avec des grands O), c'est dommage car ils sont suivant les situations plus ou autant économiques que ceux avec un petit o, pire certains ignorent la définition d'un grand O ou en donnent une sans recours à la valeur absolue. Rappelons enfin que si une suite de terme général u_n tend vers ℓ, on a $u_n = \ell + o(1)$.*

  Le calcul asymptotique, l'appréciation des ordres de grandeur n'est pas toujours maitrisé, en tout cas pas avec la virtuosité attendue chez ceux qui se destinent à une profession scientifique.

  Signalons que dans l'étude des séries on ne doit pas écrire la somme avant d'avoir justifié sa convergence et que les théorèmes de comparaison au programme, demandent que l'on compare les termes généraux, non pas les sommes partielles et encore moins les séries elle-mêmes ou leur sommes. Signalons que la règle de d'Alembert ne fournit pas une condition nécessaire et suffisante de convergence absolue.

  Il est à noter des confusions fréquentes sur le vocabulaire : majorée, majorée en valeur absolue, bornée. Du reste les candidats omettent souvent les valeurs absolues, pourtant nécessaires lorsqu'il s'agit de montrer la convergence d'intégrales ou de séries. Dans $\mathbb{C}$ l'omission du module conduit à des inégalités entre complexes.

- **Navale 2019 PSI :** *Les hypothèses d'étude de la convergence d'une série numérique ou d'une intégrale généralisée doivent être vérifiées, la condition de signe sur le terme général est trop souvent oubliée.*

- **Mines-Ponts 2019 PSI :** *Une grande partie des candidats a du mal à établir des majorations ou dominations simples, indispensables pour l'utilisation de nombreux théorèmes d'analyse.*

  Les calculs d'équivalents, développements limités (même à l'ordre 3) sont souvent trop approximatifs. Trop de candidats ne ressentent pas le besoin de supprimer les termes négligeables devant le reste dans un développement limité ou asymptotique. Les formules de Taylor sont mal sues.

Le schéma d'étude des suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$ n'est pas bien maîtrisé par certains candidats.

Concernant la convergence des séries, certains candidats font un usage abusif de majorations et d'équivalents pour des séries à termes non positifs, et tous ne pensent pas à examiner la convergence absolue. En revanche, le critère spécial des séries alternées est généralement bien connu, ainsi que les majorations de la somme partielle et du reste qui l'accompagnent.

Énoncés :

Exercice 159 (CCINP PSI 2024 - ❄)

Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de $f : x \longmapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

Exercice 160 (CCINP PSI 2022 - ❄❄)

Soit $f : x \longmapsto x + \ln(1 + x)$.

1. Montrer que f est une bijection de son ensemble de définition sur un intervalle à préciser. On note g la bijection réciproque.
2. Donner $g(0)$ et $g'(0)$.
3. Montrer que g admet un développement limité à tout ordre en 0.
4. Calculer le développement limité de g à l'ordre 3 en 0.

Exercice 161 (Centrale PSI 2022 - ❄❄❄)

1. Montrer que $f : y \longmapsto y^5 + y$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Soient v la réciproque de f et $u : x \longmapsto (v(x))^5$.
2. Montrer que $u(x) = x + o(x)$ quand $x \to +\infty$.
3. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que :
$$u(x) = x + \alpha x^{1/5} + \beta x^{-3/5} + o(x^{-3/5}) \text{ quand } x \to +\infty.$$
4. En déduire un développement asymptotique de v en quand $+\infty$.

Exercice 162 (ENSEA 2021 (Andy D.)- ❄❄)

Pour $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose $u_{n,p} = \dfrac{1}{p^n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{p}\right)^{1/n}\right)^n$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\lim_{p\to+\infty} u_{n,p}$ et $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\lim_{n\to+\infty} u_{n,p}$.

Exercice 163 (Mines-Ponts PC 2019 - ❄❄)

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0, +\infty[$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \ln\left(\frac{e^{u_n} - 1}{u_n}\right).$$

Exercice 164 (IMT PSI 2021 - ❄❄)

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x - \ln(x) = n$ admet une unique solution $x_n \in]0, 1]$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ puis que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n}$.
3. Obtenir un développement asymptotique de x_n (flou...).

Exercice 165 (IMT PSI 2021 - ❄❄)

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$ admet une unique solution dans $[0, 1]$. On la note a_n.
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$.
3. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 166 (Saint-Cyr 2021 (Louis-Victor G.)- ❄❄)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique réel $x \in [0, 1]$ solution de :
$$x + x^2 + \cdots + x^n = 1.$$
On note u_n cette solution.
2. Écrire une fonction python permettant de trouver la valeur de u_n avec une précision $p > 0$.
3. Conjecturer avec python une limite éventuelle pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
5. En déduire qu'elle converge puis déterminer sa limite.

Exercice 167 (CCINP PC 2024 - ❄❄)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. Montrer que :
$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{i=1}^{p}(u_{2i-1} + u_{2i}) = \sum_{i=1}^{2p} u_i.$$
2. Montrer que $\displaystyle\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ converge.
3. On pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.
Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\sum_{k=n+1}^{n+2p} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = (-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1+2k}} - \frac{1}{\sqrt{n+2+2k}}\right).$$
En déduire que :
$$R_n = (-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1+2k}} - \frac{1}{\sqrt{n+2+2k}}\right).$$
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{n+x}}$.
   (a) Montrer que g_n est convexe.
   (b) À l'aide de l'égalité des accroissement finis, montrer que :
   $$\forall x \geq 1, \ g_n(2x) - g_n(2x-1) \leq g_n(2x+1) - g_n(2x).$$
5. Montrer que $(|R_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
En déduire la nature de $\sum R_n$.

Exercice 168 (Centrale PC 2021 - ❄❄)

Soit t un réel strictement positif.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + xt\sqrt{n} - 1 = 0$ admet une unique solution réelle positive, que l'on notera $u_n(t)$.
2. Montrer que la suite $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
3. Étudier les séries $\sum u_n(t)$ et $\sum (-1)^n u_n(t)$.

Exercice 169 (IMT PSI 2022 - ❄)

Pour $n \geq 2$ entier, on pose $u_n = \text{Arctan}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right) - \dfrac{\pi}{4}$.

Déterminer la nature de $\sum u_n$.

Exercice 170 (CCINP PSI 2022 - ❄)

1. Montrer que $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$.
   On précisera le domaine de validité de cette formule.
2. Donner le développement en série entière de Arctan sur $]-1,1[$.
3. Montrer que $\dfrac{\pi}{8} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{2n+1}$.
4. Trouver une majoration de l'erreur d'approximation de π par $S_N = 8\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{2n+1}$.

Exercice 171 (ENSEA PSI 2021 - ❄)

Pour $n \geq 2$ entier, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

1. Montrer que $u_n = v_n - \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ avec $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
2. Déterminer la nature de $\sum v_n$ puis de $\sum v_n$.
3. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Conclusion ?

Exercice 172 (IMT PSI 2024 - ❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n\sin\left(\frac{1}{(-1)^n+\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 173 (Navale PSI 2021 - ❄❄)

Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$.

Exercice 174 (IMT PSI 2023 - ❄❄)

Déterminer la nature de la série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^n}{(-1)^n+\ln(n)\sqrt{n}}$.

Exercice 175 (Mines-Ponts PSI 2023 - ❄❄❄)

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sqrt{k}$.

1. Montrer que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2}\sqrt{n}$.
2. Montrer que $S_n + S_{n+1}$ admet une limite finie et que celle-ci est positive.

Exercice 176 (IMT PC 2021 - ❄)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)$.

1. Justifier que la série $\sum u_n$ converge. On note S sa somme.
2. Justifier l'existence et calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, de :
$$v_n = \tan\Big(\operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan}(n)\Big).$$
3. En déduire une expression de u_n puis la somme S.

Exercice 177 (Navale PSI 2023 (Lucas E.) - ❄❄)

Nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$.

Exercice 178 (Centrale PC 2022 - ❄❄)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+d)}$ où a, b, c, d sont des réels strictement positifs.

1. Trouver un réel α tel que la suite $(\ln(n^\alpha u_n))_{n\in\mathbb{N}}$converge.
2. On suppose que cette condition est vérifiée. Donner un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer une condition sur a, b, c, d pour que la série $\sum$ converge.

Exercice 179 (CCINP PSI 2018 et 2021 - ❄)

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de $u_0 \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et par $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. En calculant $u_{n+1} - u_n$, montrer que $\sum u_n^3$ converge.
3. Déterminer la nature de $\sum u_n^2$ (ou pourra s'intéresser à $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$).

Exercice 180 (IMT PSI 2024 - ❄❄)

1. Étudier la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.
2. Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.
   Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. On admet le théorème de Cesàro.
   Déterminer un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 181 (ENSEA PSI 2023 (Baptiste G.) - ❄)

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = x_{n+1} - x_n$.
   Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\sum y_n$ ont même nature.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$u_n = \frac{\sqrt{n}n^n e^{-n}}{n!} \text{ et } v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right).$$
   Montrer que la série $\sum v_n$ converge.
3. En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que :
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Exercice 182 (Centrale PC 2021 - ❄❄❄)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}.$$

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 183 (Mines-Ponts PSI 2023 - ❄❄)

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = a$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1} + 1.$$

1. Montrer que lorsque $a = 1$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
2. Montrer que ce résultat persiste pour $a \in \mathbb{R}$ quelconque.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k!}{n!}$.
   Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

Exercice 184 (CCINP PSI 2021 - ❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k},\ T_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} \text{ et } H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

On admet qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H_n = \ln(n) + \gamma + \underset{n \to +\infty}{o}(1)$.

1. Dresser le tableau des variations de $x \longmapsto \frac{\ln(x)}{x}$ sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer la nature de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et de $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\frac{\ln^2(2n+1)}{2} - \frac{\ln^2(n+1)}{2} \leq S_{2n} - S_n \leq \frac{\ln^2(2n)}{2} - \frac{\ln^2(n)}{2}.$$
4. Montrer que $S_{2n} - S_n = \ln(2)\ln(n) + \frac{\ln^2(2)}{2} + \underset{n \to +\infty}{o}(1)$.
5. Exprimer $S_{2n} + T_{2n}$ en fonction de H_n.
   En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$.

Exercice 185 (Mines-Ponts PSI 2022 - ❄❄)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de R_*^+. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = \frac{u_n}{u_1 + \cdots + u_n}.$$

Comparer les natures des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Exercice 186 (CCINP PSI 2021 (Lorine B.) - ❄❄)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}}{2}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n \leq \frac{a_n}{2}$.
2. Montrer que si $\sum a_n$ converge, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
3. La réciproque est-elle vraie ? On pourra considérer $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Exercice 187 (IMT PSI 2021 - ❄❄)

On cherche les applications f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$(*) : \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n}.$$

1. Soit f vérifiant $(*)$.
   (a) En considérant des valeurs particulières de n, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f'(x+1)$.
   (b) Montrer que $\int_x^{x+1} f'(t)dt$ ne dépend pas de x, puis que f' est constante.
2. Donner toutes les solutions du problème posé.

Exercice 188 (Centrale PSI 2023 - ❄❄❄)

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ avec :

$$u_n = \sqrt{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$

Exercice 189 (Mines-Ponts PSI 2022 (Hugo V.) - ❄❄)

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction à valeurs strictement positives.

1. Donner une condition nécessiare portant sur f pour que la série $\sum \frac{(-1)^n}{f(n)}$ converge.
   Est-ce une condition suffisante ?
2. On suppose, en plus de la condition nécessaire trouvée à la question précédente, que f est croissante « à partir d'un certain rang ».
   Pour tout $n \geq 1$, justifer l'existence de $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{f(k)}$.
   Préciser le signe et la limite de u_n quand $n \to +\infty$.
3. On suppose de plus que pour tout $k \geq 1$, on a $\frac{1}{f(k)} + \frac{1}{f(k+2)} \geq \frac{2}{f(k+1)}$.
   Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 190 (Centrale PSI 2021 - ❄❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n(X) = \prod_{k=0}^{n} (X - k)$.

1. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$.
2. Montrer que P_n' admet une unique racine dans $]0, 1[$.
   On la note λ_n.
3. Simplifier $\frac{P_n'(X)}{P_n(X)}$.
4. En déduire un équivalent de λ_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 191 (IMT PSI 2022 (Raphaël D.) - ❄❄❄)

Soit $p \geq 2$ un entier. On définit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ par :

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ n'est pas un multiple de } p \\[2ex] -\dfrac{p-1}{n} & \text{si } n \text{ est pas un multiple } p \end{cases}$$

Montrer que la série $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 192 (Mines-Ponts PSI 2023 - ❄❄❄)

1. Montrer que la série $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^2 - 1}$ converge et calculer sa somme.
2. Montrer que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\lfloor \sqrt{k+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{k} \rfloor}{k}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 193 (Centrale PSI 2023 - ❄❄❄)

Soit $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_*^+$ tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_k}{x^k} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x^k}\right).$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante de $\sum f(n)$.
2. On pose $p_n = \prod_{k=0}^{n} f(k)$.
   Donner une condition nécessaire et suffisante de $\sum f(n)$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante de $\sum p_n$.

Thème 6

Intégration

Rapports de jury :

- **CCINP 2022 :** *La manipulation d'équivalents, très utile pour les convergences d'intégrales ou de séries, ne vient pas toujours à l'esprit des candidats et trahit trop souvent la mauvaise compréhension de la notion : il ne suffit pas que deux suites ou fonctions aient le même comportement vis-à-vis de la convergence de l'intégrale ou la série étudiée pour être équivalentes.*

  Les comparaisons séries intégrales, et en particulier les conditions sous lesquelles on peut les mettre en œuvre, sont rarement bien maîtrisées.

- **Mines Telecom 2022 :** *Les théorèmes importants sur les intégrales dépendantes d'un paramètre sont en général bien connus, mais des difficultés techniques restent souvent insurmontables au niveau de la vérification des hypothèses. Par exemple la convergence d'une intégrale qui résulte d'un prolongement par continuité de la fonction intégrée peut donner lieu à des complications étonnantes, on retrouve là une lacune du cours de première année, à laquelle on peut ajouter des difficultés dans l'utilisation des équivalents et des développements limités.*

- **Centrale 2022 PSI :** *La recherche de primitives usuelles ne relève pas toujours de calculs naturels pour les étudiants.*

  La formule de Taylor avec reste intégral mieux connue que les autres années pose néanmoins encore pour certains des difficultés. Il serait sage de comprendre l'efficacité de cette formule pour obtenir des résultats globaux (par exemple des inégalités).

- **Centrale 2021 PSI :** *Le théorème fondamental de l'analyse est souvent mal utilisé, quand il n'est pas complètement hors-sujet notamment dans le cadre d'une intégrale à paramètres. Rares sont les candidats qui savent dériver correctement une application de la forme* $x \longmapsto \displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$*, on a souvent droit à* $x \longmapsto f(b(x)) - f(a(x))$ *comme réponse, y compris lorsque* a *est constante !*

  Pour étudier une intégrale impropre, les étudiants ne regardent souvent que les bornes sans se demander au préalable sur quel domaine la fonction est continue ou continue par morceaux. L'étude d'une borne est souvent délicate lorsqu'elle n'est ni 0 *ni* $+\infty$.

- **Navale 2021 PSI :** *Les hypothèses d'étude de la convergence d'une série numérique ou d'une intégrale généralisée doivent être vérifiées, la condition de signe sur le terme général est trop souvent oubliée. La continuité d'une fonction que l'on souhaite intégrer est régulièrement oubliée, l'étude de l'intégrabilité ne se résume pas à une étude aux bornes !*

- **Mines-Ponts 2019 PSI :** *Il est plus judicieux de raisonner en termes de fonction intégrable et pas d'intégrale convergente lors de l'emploi de théorème de comparaison, surtout lorsque la fonction n'est pas clairement positive. Et là encore, l'utilisation de valeurs absolues n'est pas toujours naturelle lorsque les fonctions ne sont pas positives.*

  Les théorèmes de continuité et de dérivabilité pour les intégrales à paramètres sont souvent connus et appliqués au bon moment. Néanmoins les candidats mettent beaucoup trop de temps à vérifier les hypothèses de ces théorèmes, s'attardant souvent sur l'hypothèse de continuité par morceaux (sans rien démontrer d'ailleurs et avec omission des quantificateurs), semblant vouloir retarder le moment de vérifier l'hypothèse de domination. Et pour cause, c'est bien cette hypothèse qui pose le plus problème, une grande partie des candidats sont lourdement pénalisés par leur manque de maîtrise des inégalités. À noter qu'une partie d'entre eux confondent la variable d'intégration et le paramètre pour prouver l'intégrabilité de la fonction ou encore dans le calcul des dérivées partielles.

Énoncés :

Exercice 194 (ENSEA PSI 2021 et 2022 - ❄)

Soient $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))dt$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))dt$.

1. Justifier l'existence de I et de J.
2. Montrer que $I = J$.
3. Calculer $I + J$, en déduire la valeur de I.

Exercice 195 (IMT PSI 2021 - ❄❄)

Justifier l'existence puis calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - t\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$.

Exercice 196 (IMT PSI 2023 - ❄❄)

1. Déterminer un équivalent de $\dfrac{1}{t} - \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{t}\right)$ quand $t \to +\infty$.
2. Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$.

Exercice 197 (ENSEA PSI 2023 - ❄❄)

Montrer l'existence et calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}} dx$.

Ind : Poser $u = \sqrt{x/(1-x)}$.

Exercice 198 (ICNA PSI 2018, Mines-Ponts PSI 2021 - ❄)

1. Déterminer l'ensemble de définition de $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2}dt$.
2. Calculer $F(1)$.
3. En déduire l'expression de $F(x)$ pour $x > 0$.

Exercice 199 (IMT PSI 2022 - ❄)

1. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx$ et de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$.
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$a_n = \int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx \text{ et } b_n = \int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^3}dx.$$
Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n\pi} - 2b_n$.
3. Montrer la convergence de la série de terme général a_n.

Exercice 200 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^3+x^3}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer la limite et un équivalent de f en $+\infty$.
3. Déterminer la limite et un équivalent de f en 0.

Exercice 201 (CCINP PSI 2022 - ❄)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}}dt$.

1. Montrer que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $I_n = \dfrac{1}{n2^n} + \dfrac{n-1}{n}I_{n-1}$.
3. Posons $J_n = nI_n$. Donner une relation de récurrence vérifiée par $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Calculer J_1 puis établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.
5. Montrer que $I_n = \dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$ en déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 202 (CCINP 2022 (Loïc D.) - ❄❄)

1. Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.
On admet que $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
2. Déterminer la nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}\displaystyle\int_{n^2}^{+\infty} e^{-t^2}dt$.
3. En déduire la nature de $\sum v_n$ avec $v_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{n} e^{-n^2t^2}dt$.

Exercice 203 (Mines-Ponts PC 2021- ❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan}(nx)e^{-x^n}dx$.
Justifier l'existence de I_n et déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 204 (IMT 2022 (Mathilde P.) - ❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{t}} \ln\left(1 + \frac{1}{nt}\right) dt$.

1. Montrer la convergence de I_n
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 205 (CCINP PSI 2023 (Franck-A. E.) - ❄❄)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que pour tout $x \geq 1$ on a $f(x) = xf(x-1)$.
3. Pour $x \geq 1$, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x} \ln(f(u))du$.
   (a) Montrer que φ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$.
   (b) En déduire la limite de φ en $+\infty$.
   (c) Déterminer enfin la nature de $\sum \dfrac{(-1)^n}{\varphi(n)}$.

Exercice 206 (IMT PC 2021 - ❄❄)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour $f \in E$, on définit la fonction $T(f)$ par $T(f)(0) = f(0)$ et pour $x \neq 0$:
$$T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

1. Montrer que, pour $f \in E$, $T(f)$ est continue en 0.
2. Montrer que $f \in E$, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$ et que :
$$\forall x > 0, \quad xT(f)'(x) + T(f)(x) = f(x).$$
3. Montrer que T est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de T.
   (a) Montrer qu'un vecteur propre associé à λ est solution de $y' = \dfrac{1-\lambda}{\lambda x}y$ sur $\mathbb{R}_*^+$.
   (b) En déduire que le spectre de T est inclus dans $]0, 1]$.

Exercice 207 (IMT PSI 2022 et 2023 ❄)

Trouver un équivalent de $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ en utilisant :

(i) une comparaison série-intégrale,
(ii) les sommes de Riemann.

Exercice 208 (Navale PSI 2023 - ❄❄)

Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition et de continuité de f.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et en 1.

Exercice 209 (CCINP PSI 2023 - ❄❄)

Soient $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt$ et $g : x \longmapsto \displaystyle\int_{x-1}^{x} \ln(f(t))dt$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
2. Pour $x \geq 1$, trouver une relation entre $f(x)$ et $f(x-1)$.
3. Établir la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{g(n)}$.

Exercice 210 (CCINP PSI 2022 - ❄)

Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)\exp(-t^2)dt$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
3. On donne $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2)dt = \sqrt{\pi}$. . Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 211 (CCINP PC 2021, IMT PSI 2023 (Baptiste G.))

Soit $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}dt$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que F est positive et décroissante. Déterminer sa limite en $+\infty$.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer l'expression de $F(x) - F'(x)$ pour $x > 0$ et en déduire que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que, pour $x > 0$, $F(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$.

   En déduire limite et équivalent de F en 0^+.

Exercice 212 (CCINP PSI 2022 - ❄)

Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(tx)}{t(1+t^2)}dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. Montrer que f est impaire.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Calculer f.

Exercice 213 (IMT PSI 2023 - ❄❄)

1. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ converge.
2. Montrer quee, pour $x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto \cos(xt)\dfrac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
3. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)\frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}dt$.

   Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer $f'(x)$ puis, sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}dt = \ln(2)$, calculer $f(x)$.
5. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 214 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄(❄))

En étudiant $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}dt$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$.

Exercice 215 (Centrale PSI 2023 - ❄❄)

Soit $f : [1, +\infty[$ continue telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Montrer que pour tout $\alpha > 0$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}dt$ converge.

Exercice 216 (Mines-Ponts PSI 2019 - ❄❄)

Soit $\alpha \in [0, 1[$ et $f : [0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$ continue par morceaux et telle que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \alpha.$$

Montrer que f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 217 (Centrale PSI 2023 - ❄❄❄)

Soit $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1} + t + 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de F.
2. Montrer que F est dérivable et donner une expression de sa dérivée.
3. Montrer que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(3)}{2x}$ et $F(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \dfrac{\ln(2)}{x}$.

Exercice 218 (Centrale PC 2022 - ❄❄❄)

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie ℓ en $+\infty$.

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}dx$ où a et b sont des réels strictement positifs.

Exercice 219 (Mines-Ponts PC 2023 - ❄❄)

Soit $\alpha > 1$ et $f : x \longmapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(x^2 + t^2)^\alpha}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
3. La fonction f est-elle intégrable sur D ?

Exercice 220 (Centrale PC 2021 - ❄❄❄)

Soit $\alpha > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^\alpha)^n}$.

1. Justifier l'existence de $I_n(\alpha)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir une relation entre $I_n(\alpha)$ et $I_{n+1}(\alpha)$. Exprimer $I_n(\alpha)$ en fonction de α, n et $I_1(\alpha)$.
3. Déterminer la limite de la suite $(I_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Montrer qu'il existe un réel $K(\alpha)$ strictement positif tel que :

$$I_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K(\alpha)}{n^{1/\alpha}}.$$

Exercice 221 (Centrale PSI 2021 - ❄❄❄)

1. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2}dx$.
2. Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle qu'il existe un réel $C > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f(t)| \leq \dfrac{C}{1+t^2}$.

   Justifier l'existence, pour tout $h > 0$, de $S(h) = h\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)$.
3. On fixe $h > 0$ et l'on considère $\varphi_h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\varphi_h(t) = f\left(\left\lfloor \dfrac{t}{h} \right\rfloor h\right)$. Montrer que $S(h) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_h(t)dt$.
4. Montrer que $S(h)$ tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ quand h tend vers 0.

Exercice 222 (Centrale PSI 2023 - ❄❄❄)

Soit $I = [0, 2\pi]$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |z| < 1$. .

1. Justifier que $|z - e^{it}|$ ne s'annule pas sur I et que $f : t \longmapsto \dfrac{1 - |z|^2}{|z - e^{it}|^2}$ est continue sur I.
2. (a) Montrer que $t \longmapsto 1$, $t \longmapsto e^{it}$ et $t \longmapsto e^{-it}$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes.

   (b) Montrer l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall t \in I,\ f(t) = -1 + \frac{\alpha}{1 - ze^{-it}} + \frac{\beta}{1 - \bar{z}e^{it}}.$$

   On donnera explicitement α et β.
3. Calculer $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt$.

Exercice 223 (Mines-Ponts MP 2023 - ❄❄❄)

Déterminer un équivalent quand $x \to +\infty$ de $f(x) = \displaystyle\int_1^x t^t dt$.

Thème 7

Suites et séries de fonctions

Rapports de jury :

- **CCINP 2023 PSI :** *La notion de convergence uniforme est dans l'ensemble mal maîtrisée.*

  Les théorèmes d'interversion somme et intégrale, de dérivation d'une intégrale à paramètre et d'intégration d'une série terme à terme occupent une place importante dans le programme mais ne sont pourtant pas très bien connus. De surcroit, il est souvent difficile de bien les utiliser (trouver la fonction de majoration dans le théorème de convergence dominée par exemple). L'application d'une bonne domination dans le premier cas pose parfois des difficultés. La comparaison série-intégrale est souvent mal mise en œuvre, y compris lorsque la méthode est proposée par l'énoncé.
- **CCINP 2022 PSI :** *Les raisonnements sur les suites et séries de fonctions sont sources de confusion pour beaucoup de candidats. La notion délicate de convergence uniforme est souvent retenue par la convergence vers 0 d'une norme infinie. Peu pensent à l'argument direct d'une suite ou série de fonctions continues dont la limite ne l'est pas.*
- **CCINP 2019 PSI :** *Les différents types de convergence pour les séries de fonctions ne sont pas maîtrisés. De très nombreux candidats affirment montrer la convergence uniforme d'une série de fonction en (re)démontrant la convergence simple vers* 0 *de la suite des restes. D'autres montrent la convergence uniforme sur tout intervalle* $[a, +\infty[$ *avec* $a > 0$ *et en déduisent la convergence uniforme sur* $\mathbb{R}_+^*$*. D'autres encore se lancent dans la preuve de la convergence uniforme après avoir remarqué la non continuité de la fonction somme.*
- **Centrale 2019 PSI :** *Enfin, quand il faut vérifier une hypothèse de domination, la fonction dominante doit avoir deux propriétés : l'une de convergence, l'autre d'indépendance par rapport à une variable, il faut que le candidat vérifie et énonce au moins oralement ces deux propriétés.*
- **Mines-Ponts 2021 PSI :** *le théorème de convergence dominée exige une domination sur l'intervalle tout entier, une domination sur tout segment n'a aucun sens ;*
- **Mines-Ponts 2019 PSI :** *Les théorèmes sur les suites et séries de fonctions sont en général bien sus. Dans leur application on attend l'emploi de quantificateurs et d'intervalles précis, notamment pour prouver la convergence uniforme.*

  Rappelons que le théorème de convergence dominée est applicable, quand bien même l'intervalle d'intégration est un segment (certains candidats pensent qu'il est nécessaire d'être en présence d'intégrales généralisées pour l'utiliser). Plus généralement, malgré une bonne connaissance des théorèmes d'interversion série-intégrale les candidats manquent de méthode pour savoir lequel employer.

  Trop souvent les candidats pensent que la convergence normale ou uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$*, entraîne la convergence normale ou uniforme sur* $\mathbb{R}_+^*$*.*

Énoncés :

Exercice 224 (ICNA PSI 2017 - ❆❆)

Étudier la convergence simple et uniforme sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = n\cos^n(x)\sin(x)$.

Exercice 225 (IMT PSI 2024 - ❆❆)

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \dfrac{1-x^n}{1+x^n}$.

Étudier la convergence simple puis uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 226 (Mines-Ponts PC 2021 et 2022 - ❆❆)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathbb{R}^+$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, soit $f_n(x) = a_n x^n(1-x)$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.
2. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, 1]$ si et seulement si $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge.
3. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ si et seulement si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice 227 (CCINP 2023 (Maxence B.) - ❆❆)

Soient $a \geq 0$. On définit les fonctions f_n sur $I = [0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1],\ f_n(x) = \frac{nx(x^2+a)}{nx+1}e^{-x}.$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction F à préciser.
2. Discuter, selon les valeurs de a, de la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur I.
3. Etudier la convergence uniforme sur tout intervalle $[k, 1]$ avec $k \in]0, 1[$.

Exercice 228 (Centrale PSI 2021 et 2023 - ❆❆❆)

On pose pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n n}{n^2 + |x|}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante positive.

   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq (-1)^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \leq a_n$.
3. Étudier la convergence uniforme de $\sum f_n$.

Exercice 229 (Mines-Ponts PSI 2023 - ❄❄❄)

On définit la suite de fonction $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $p_0 : x \in [0,1] \longmapsto 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - p_n^2(x)\right).$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ p_n(x) \leq p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$.
2. En déduire la convergence simple de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et trouver sa limite.
3. Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément.

Exercice 230 (ENSEA PSI 2023 - ❄)

Domaine de définition et continuité de $S : x \longmapsto \sum_{n=0} n^x e^{-nx}$.

Exercice 231 (CCINP PSI 2023 - ❄)

Soit $f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3 + x}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 232 (Centrale PSI 2023 - ❄)

Soit $F : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2 + n}$.

1. Montrer que F est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
2. Calculer $F(0)$.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
4. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

Exercice 233 (CCINP PSI 2021 (Emma H.) - ❄❄)

On s'intéresse à $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ avec $u_n(x) = \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{-nx}}{n}$.

1. Donner le domaine de définition de S.
2. Étudier la continuité de S.
3. Montrer que S est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Expliciter $S(x)$.

Exercice 234 (CCINP PSI 2023 - ❄❄(❄))

On considère $S : x \longmapsto \sum_{n=1} \frac{\ln(1 + n^2x^2)}{n^2 \ln(n+1)}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de S.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de S.

Exercice 235 (CCINP PSI 2023 (Yassine N.) - ❄❄)

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \frac{x}{\mathrm{sh}(x)}$ et pour $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}^2(nx)}.$$

1. Énoncer le théorème de dérivation terme à terme.
2. Montrer que f est bornée.
3. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $]0, +\infty[$.
4. On pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

   Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
5. Exprimer $f_n(x)$ à l'aide de $f(x)$ et en déduire un équivalent de S en 0^+.

   On admettra que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 236 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

Soit $S : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2x + n}$.

1. Déterminer le domaine de définition de S.
2. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
3. Déterminer un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 237 (IMT PSI 2023 (Lucas E.) - ❄❄)

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer la limite (et un équivalent) de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.
3. On donne $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

   Prouver que $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x}$.

Exercice 238 (Mines-Ponts PSI 2021 - ❄❄(❄))

On considère la série de fonctions $f = \sum u_n$ avec

$$u_n(x) = \ln(1 + e^{-nx}).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f et montrer que f est continue et décroissante sur D.
2. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3. En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$, déterminer un équivalent de f en 0.

Exercice 239 (CCINP PSI 2019 et 2023 (Kévin D.) - ❄❄)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{x+n}$.

1. Donner l'ensemble de définition de S en fonction de a.
2. On suppose que $|a| < 1$.
   (a) Étudier la continuité de S sur $]0, +\infty[$.
   (b) Déterminer une relation entre $S(x+1)$ et $S(x)$.
   (c) En déduire un équivalent de S en 0^+.
   (d) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$ puis un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 240 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

Soit $S : x \longmapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp(nx)}{1 + \exp(2nx)}$.

Déterminer le domaine de définition, la continuité, les limites aux bornes de S.

Exercice 241 (Centrale PSI 2023 - ❄❄❄)

On pose $\varphi : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+x)}$.

1. Montrer que φ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ et étudier sa monotonie.
2. Calculer $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$.
3. Trouver la limite de φ en $+\infty$.
4. Montrer que $\varphi(x) = \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.
5. Montrer que $\varphi(x) = \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Exercice 242 (IMT PSI 2023 - ❄❄❄)

Soit $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+xn}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la continuité de f, sa limite en $+\infty$ et sa dérivabilité.

Exercice 243 (CCINP PSI 2021 - ❄❄)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in [0,1]$.

Pour $x \in]0,1]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1-e^{-nx}}{x^a(1+x^2)}$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction que l'on précisera.
2. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles il y a convergence uniforme sur $]0,1]$?
3. Montrer que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ est convergente pour tout $a \in [0,1]$.
4. Pour $a \in [0,1[$, montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
5. Qu'en est-il pour $a = 1$?

Exercice 244 (CCINP PSI 2021 (Louis B.) - ❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^n$, et pour $t \in [O,1]$, on pose $g_n(t) = \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n e^t$.

1. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, on a $|g_n'(t)| \leq \dfrac{e^t}{n}$.
2. En déduire que : $\forall t \in [0,1]$, $\left|\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n e^t - 1\right| \leq \dfrac{te^t}{n}$.
3. Pour tout $x \in [0,1]$, on pose $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x g_n(t)dt$.
   Montrer que, sur $[0,1]$, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
4. Montrer que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 245 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

1. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n\ln(1+t^n)dt$.
   Ind. Utiliser le changement de variable $u = t^n$.
2. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 nf(t)\ln(1+t^n)dt$.

Exercice 246 (Mines-Ponts PSI 2022 - ❄❄❄)

Soient $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n)dt$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 247 (IMT PSI 2023 - ❄❄)

Soit $a_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin^{2n}(t)dt$.

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, a_n est bien défini et déterminer la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $a_n = \dfrac{4n^2-2n}{4n^2+1}a_{n-1}$.
3. On pose $b_n = \sqrt{n}a_n$. Montrer la convergence de $\sum \ln\left(\dfrac{b_n}{b_{n-1}}\right)$.
4. Conclure quant à la convergence de $\sum a_n$.

Exercice 248 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t/n)}{t+t^3}dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifier l'existence de I_n.
2. Déterminer la limite de I_n, puis un équivalent de I_n.

Exercice 249 (Mines-Ponts PC 2019 - ❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$.

1. Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f_n(t)dt$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}\int_0^x f_n(t)dt$.

Exercice 250 (Mines-Ponts PSI 2021 - ❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(nt)}{(1+n^4t^2)^2}dt$.

1. Justifier l'existence de I_n.
2. Déterminer la limite de I_n, puis un équivalent de I_n.

Exercice 251 (Centrale PSI 2023 - ❄(❄))

Pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on pose $f_n(x) = \cos^n(x)$.

1. Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la convergence simple et uniforme de $\sum f_n$.
3. Convergence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{\pi/2} f_n(t)dt$.

Exercice 252 (CCINP PSI 2023 - ❄❄)

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)dt$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.
2. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}du$.
3. On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{12n}$.

Exercice 253 (CCINP PC 2021 - ❄)

1. Montrer que pour tout $t > 0$ on a $\dfrac{1}{e^t+1} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}e^{-nt}$.
2. Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t+1}dt$ et l'exprimer sous forme d'une série.

Exercice 254 (CCINP PSI 2019 et 2023 (Gabriel L.) - ❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4}\tan^n(t)dt$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
2. Calculer $I_n + I_{n+2}$.
3. À l'aide du changement de variable $t = \tan(x)$, déterminer une autre expression de I_n.
4. Montrer la convergence de $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ et calculer sa somme.
5. Démontrer que $\sum(-1)^n I_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 255 (IMT PSI 2022 (Célia D.) - ❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^{2n+1}\ln(x)}{x^2-1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $]0,1[$.
2. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
3. Calculer $I_k - I_{k+1}$. En déduire que $I_n = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2}$.

Exercice 256 (CCINP PSI 2018 et 2021 (Aubin G.) - ❄❄)

Justifier la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos(t)}{1+e^t}dt$ et montrer que

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(-1)^{n-1}}{1+n^2}.$$

Exercice 257 (CCINP 2022 (Flavien L.) - ❄❄)

Démontrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{\mathrm{sh}(x)}dx$ est bien définie et que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{\mathrm{sh}(x)}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{2}{(2n+1)^2}$.

Exercice 258 (CCINP PSI 2023 - ❄❄)

1. Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{t\ln^2(t)}{(1-t)^2}dt$.
2. Montrer que $I = 2\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Exercice 259 (ENSEA PSI 2023 - ❄❄)

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos\left(\sqrt{x}\right)e^{-x}dx = \sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^k k!}{(2k)!}$.

Exercice 260 (CCINP PSI 2022 (Elias AB.) - ❄❄)

Démontrer que l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{x^2}{e^x-1}dx$ est bien définie et que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{x^2}{e^x-1}dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2}{n^3}$.

Exercice 261 (Mines-Ponts PC 2019 - ❄❄)

Pour $s > 1$, justifier l'égalité :

$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}t^{s-1}\right)\mathrm{d}t = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{s-1}\mathrm{d}t\right).$$

Exercice 262 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n^x\ln(n)}$.

La fonction f est-elle intégrable sur son domaine de définition ?

Exercice 263 (Centrale PSI 2022 - ❄❄)

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)^n dt$.

1. Montrer l'existence de I_n pour tout entier $n \geq 2$.
2. Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\geq 2}$.
3. Montrer que $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{kn}\int_0^{\pi}\left(\dfrac{\sin(u)}{u+k\pi}\right)^n du$.
   En déduire que $I_n > 0$.

Exercice 264 (Mines-Ponts PC 2022 - ❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n : x \longmapsto \dfrac{1}{n+n^2x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n+n^2x^2}$, et étudier la parité de f
2. Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur le domaine de définition de f.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est bien définie, et l'exprimer comme la somme d'une série numérique.
4. Déterminer la limite puis un équivalent de f en $+\infty$.
5. Déterminer la limite puis un équivalent de f en 0.

Exercice 265 (Mines-Ponts PSI 2022 - ❄❄)

Soit, pour $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, $u_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{\alpha}(t)\cos^n(t)dt$.

1. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$ selon les valeurs de α.
2. Calculer les sommes des séries de terme général $u_n(2)$ et $u_n(3)$.

Exercice 266 (Mines-pont PC 2019 - ❄❄❄)

Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{1+n^2x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 267 (Mines-Ponts MP 2022 - ❄❄❄)

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ décroissante et intégrable.

Pour $x > 0$, on pose $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(nx)$.

1. Montrer que g est bien définie.
2. Déterminer un équivalent simple de g en 0 ?

Thème 8

Séries entières

Rapports de jury :

- **CCINP 2023 PSI :** *Concernant les séries entières, les candidats semblent avoir très peu de recul sur la définition de rayon de convergence et les moyens pour le déterminer autre que la règle de d'Alembert (comparaison par inégalité, équivalence etc...). Pour déterminer le rayon d'une série entière, les candidats ont bien retenu le critère de d'Alembert, certes pratique dans beaucoup de cas, mais pas toujours. En particulier il ne permet pas de conclure lorsque l'on connaît seulement une inégalité sur le terme général, alors que cette inégalité permet souvent une majoration ou une minoration du rayon.*
- **CCINP 2022 PSI :** *Sur les fonctions développables en série entière, les techniques sont souvent connues (notamment la règle de d'Alembert), en revanche la nécessité de prouver qu'un rayon est non nul pour garantir qu'une fonction est développable en série entière n'est pas toujours comprise.*
- **Mines-Télécom 2022 PSI :** *On rencontre toujours de très nombreux étudiants qui sont incapables de trouver un rayon de convergence d'une série entière lorsque la règle de d'Alembert ne s'applique pas.*
- **Centrale 2022 PSI :** *Les séries entières posent encore de grosses difficultés. Le jury rappelle aux candidats que la règle de d'Alembert (déduite de celle pour les séries numériques) n'est pas le seul outil pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière. Très peu d'étudiants ont par exemple le réflexe de dire : $(a_n)_{n\geq 0}$ est borné donc le rayon est supérieur ou égal à 1.*
- **Centrale 2021 PSI :** *. La recherche d'une solution développable en série entière d'une équation différentielle est un exercice généralement bien connu des candidats. Cependant, les calculs sont souvent nettement plus longs qu'ils ne le devraient et occupent de ce fait la quasi-totalité de la présentation des candidats.*
- **Mines-Ponts 2021 PSI :** *Le mode de convergence d'une série entière sur l'intervalle $]-r,r[$ (où r est le rayon de convergence) est rarement une convergence uniforme, et encore plus rarement une convergence normale.*
- **Mines-Ponts 2019 PSI :** *Lors de l'introduction d'une série entière, il faut systématiquement préciser son rayon de convergence avant de se lancer dans un calcul. Les produits de Cauchy ne sont pas toujours reconnus, avec des difficultés techniques de calcul si les séries ne sont pas indicées à partir de $n=0$.*

Énoncés :

Exercice 268 (Mines-Ponts PC 2021 - ❆)

Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n x^{2n}}{n!}$.

Exercice 269 (Mines Télécom PSI 2021 (Lorine B.) - ❆)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et P un polynôme non nul. Montrer que $\sum a_n z^n$ et $\sum P(n) a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Exercice 270 (Mines-Ponts PC 2021 - ❆❆)

1. Montrer que pour tout $x \in [0,\pi/2]$, on a $|\sin(x)| \geq \left|\frac{2x}{\pi}\right|$.
2. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{\sin(\pi\sqrt{3}/n)}$.

Exercice 271 (Mines-Ponts PC 2023 - ❆❆❆)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes tous non nuls. On note R et R' les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n z^n$ et $\sum \frac{1}{a_n} z^n$.

1. Montrer que sir R et R' sont finis alors $RR' \leq 1$.
2. Trouver un exemple avec $0 < RR' < 1$.

Exercice 272 (ENSEA PSI 2023 - ❆)

Rayon de convergence et somme de $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+n+1)x^n$.

Exercice 273 (Mines-Ponts PC 2021 - ❆)

Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-5n+1}{n!} x^n$.

Exercice 274 (CCINP PC 2022 - ❆)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Rayon de convergence et somme de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin^2(n\theta)}{n!} x^n$.

Exercice 275 (Mines-Ponts PSI 2023 - ❆)

1. Calculer le rayon de convergence et la somme de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{\sum_{k=1}^{+\infty} k^2}$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^{+\infty} k^2}$.

Exercice 276 (IMT PSI 2022 - ❁)

Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\sum \dfrac{x^n}{2n+1}$.

Exercice 277 (Mines-Ponts PC 2021 - ❁❁)

Soit $f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(na)}{n} x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de f.
2. Exprimer $f(x)$.

Exercice 278 (St Cyr PSI 2023 (Lucas E.) - ❁❁❁)

Pour $(p, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, on définit :

$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \cos^p(n\theta) x^n.$$

Déterminer son rayon de convergence et calculer sa somme.

Exercice 279 (CCINP PSI 2021 (Andy D.) - ❁)

On note $I = [0, 1]$.

1. Montrer que pour tout $x \in I$, on a $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$.
2. Montrer que la série $\sum \left(\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} - \dfrac{x^{n+1}}{2n+2} \right)$ converge simplement sur I. Calculer sa somme.
3. La série converge-t-elle uniformément sur I ?

Exercice 280 (CCINP PSI 2021 - ❁)

Développer en série entière la fonction f défie par $f(s) = \dfrac{s}{2-s^2}$.

Exercice 281 (Mines-Ponts PC 2021 - ❁❁)

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = v_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - v_n \text{ et } v_{n+1} = u_n - 2v_n.$$

Déterminer les rayons de convergence et les somme de $\sum u_n x^n$ et de $\sum v_n x^n$.

Exercice 282 (CCINP PC 2022 - ❁❁)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

1. Déterminer la limite de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Calculer le rayon de convergence R et la somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} H_n x^n$.

Exercice 283 (Mines-Ponts PC 2021 - ❁❁)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{1+k^2}$.

1. Justifier l'existence de a_n.
2. Montrer que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
3. Déterminer le domaine de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

Exercice 284 (CCINP PSI 2016, 2021 (Antoine D.) et 2023 - ❁

1. Déterminer la limite de la suite de terme général :
$$a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^n dt.$$
2. Montre que $\sum (-1)^n a_n$ converge.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \geq \dfrac{1}{2n+1}$.
4. En déduire le rayon de convergence R et le domaine de définition de $f = \sum a_n x^n$.
5. Montrer que $(2n+3)a_{n+1} = 1 + (n+1)a_n$.
Trouver une équation différentielle vérifiée par f.

Exercice 285 (CCINP PSI 2022 - ❁❁)

Soient, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}^n(x)}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$.

1. Justifier que chaque fonction f_n est intégrable sur R^+.
2. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Nature des séries $\sum I_n$ et $\sum (-1)^n I_n$?
Ind. Majorer $\mathrm{ch}(x)$ *par* e^x.
4. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum I_n x^n$.

Exercice 286 (CCINP PSI 2022 - ❁❁)

1. Soit $x \in [0, 1[$. Trouver a, b et $c \in \mathbb{R}$ (dépendant de x) tels que, pour tout $t \in [0, 1]$, $\dfrac{1}{(1+t^2)(1+tx)} = \dfrac{at+b}{1+t^2} + \dfrac{c}{1+tx}$.
2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n x^n$ avec $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$.
3. Calculer la somme $S(x)$ de cette série entière pour $x \in]-R, R[$.
4. Étudier la limite de S en $-R$.

Exercice 287 (CCINP PSI 2021 - ❁❁)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2u_n}{n+2}.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer $1 \leq u_n \leq n^2$.
Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$.
2. On note $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.
Exprimer S à l'aide des fonctions usuelles.
3. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 288 (CCINP PSI 2023 - ❁❁)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k u_{n-k}.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 4^{n+1} n!$.
2. On pose $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u_n}{n!} x^n$.
Montrer que f est solution de $y' = y^2$ sur $\left] -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4} \right[$.
3. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 289 (IMT PSI 2022 - ❄❄)

Justifier l'existence de $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$ et de $I = \displaystyle\int_0^1 x^x dx$.

Montrer que $I = S$.

Exercice 290 (CCINP PSI 2023 (Baptiste G.) - ❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction définie par :

$$f_n(x) = \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - 1}{x}.$$

1. Justifier l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k.k!}$.

Exercice 291 (CCINP PSI 2022 - ❄❄)

Soit $f : t \longmapsto e^t \ln(t)$.

1. Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n.n!}$.

Exercice 292 (CCINP PSI 2023 - ❄❄)

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente.

1. Quel est le rayon de convergence de $\displaystyle\sum \frac{a_n}{n!} x^n$? On note $f(x)$ sa somme.
2. Existence et calcul de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Exercice 293 (CCINP PSI 2021 - ❄❄)

Soit $F : x \longmapsto -\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.
3. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a :

$$F(x) + F(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(1-x)\ln(x).$$

Exercice 294 (Mines-Ponts PSI 2021 - ❄❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t^2} dt$.

1. Justifier la convergence de I_n. Exprimer I_n sous forme de somme.
2. Déterminer un équivalent de I_n.

Exercice 295 (Mines-Ponts PSI 2018 - ❄❄)

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.

1. Calculer rayon de convergence R de cette série entière et étudier la convergence en ± 1.
2. Déterminer la limite en 1 de $(1-x)f(x)$.

Exercice 296 (Centrale PSI 2021 - ❄❄(❄))

1. Montrer la convergence de la suite de terme $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
2. On pose $a_1 = -1$ et pour $n \geq 2$, $a_n = -\dfrac{1}{n} - \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

   Déterminer les rayons de convergence de $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$ et $g : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.
3. Que peut-on dire de g en 1 ? En déduire un équivalent simple de f en 1.

Exercice 297 (Centrale PSI 2017, Mines-Ponts PC 2022 - ❄❄❄)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels tels que $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

1. Montrer que $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to 1^-}{=} o(\ln(1-x))$.

Exercice 298 (Mines-Ponts PSI 2018 - ❄❄❄)

1. Précisez le rayon de convergence de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2^n}$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ et déterminer un équivalent de f en 1.

Exercice 299 (Mines-Ponts PSI 2023 - ❄❄)

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sqrt{n} \leq u_n \leq 2\sqrt{n+1}$.
2. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$ et déterminer la limite de $(u_n - \sqrt{n})$.
3. Donner le rayon de convergence R de $\sum u_n x^n$.
4. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

Exercice 300 (Mines-Ponts PSI 2021 (Corentin G.) - ❄❄❄)

Soit $a \in]0,1[$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppoqe que :

$$\forall x \in \qquad f'(x) = f(ax)$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer sa dérivée n-ième.
2. Montrer que f est égale à sa série de Taylor en 0.
3. Chercher les $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables, solutions de $f'(x) = f(ax)$

Exercice 301 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄❄)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels convergente. On note ℓ sa limite.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

2. Déterminer la limite de $x \longmapsto e^{-x} f(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 302 (IMT PC 2018 - ❄❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Minorer le rayon de convergence de convergence de $\sum \operatorname{tr}(A^k)x^k$.
2. Exprimer $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{tr}(A^k)x^k$ en fonction de χ_A.
   On pourra considérer $\dfrac{\chi_A'}{\chi_A}$.

Exercice 303 (Centrale PSI 2022 - ❄❄❄)

Soit $A > 0$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-A, A[$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$.

1. Montrer que f est développable en série entière.
2. Montrer que $\exp \circ f$ est développable en série entière.

Exercice 304 (Centrale PSI 2023 - ❄❄❄)

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à $x \neq 0$ associe $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ et telle que $\varphi(0) = 0$.
   Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $\varphi^{(n)}(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. On note E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge.
   Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel stable par produit.
3. Soit T l'application définie sur E par :
   $$\forall f \in E,\ T(f) : x \longmapsto f(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$
   Montrer que T est un projecteur sur E, différent de l'identité et de 0.

Exercice 305 (Centrale PSI 2023 - ❄❄❄)

Soit $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n^2 x)e^{-n}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f^{(4p)}(0)$ sous forme de somme.
2. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$\int_0^{8p} t^{8p}e^{-t}dt \leq \sum_{n=0}^{8p} n^{8p}e^{-n} \text{ et } \int_{8p}^{+\infty} t^{8p}e^{-t}dt \leq \sum_{n=8p}^{+\infty} n^{8p}e^{-n}.$$
3. Montrer que pour tout $r > 0$ la série $\sum \dfrac{f^{(4p)}(0)}{(4p)!}r^{4p}$ diverge.
4. Montrer que f n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice 306 (Mines-Ponts PSI 2017 - ❄❄❄)

On note p_n le nombre de partition de $\{1, \ldots, n\}$ et $p_0 = 1$.

1. Montrer que $p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k$.
2. Vérifier que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{p_n}{n!}x^n$ est définie au voisnage de 0 et expliciter $f(x)$.

Thème 9

Espaces vectoriels normés

Rapports de jury :

- **Mines-Ponts 2019 PSI :** *Concernant les espaces vectoriels normés, chapitre plus délicat pour les candidats, il est important de maîtriser les concepts d'ouvert, de fermés et de continuité des applications linéaires en dimension finie, équivalent au caractère lipschitzien des applications linéaires continues.*

Énoncés :

Exercice 307 (Centrale PSI 2019 - ❄❄)

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose $\varphi(A) = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

1. Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i \in [\![1, n]\!], |a_{i,i}| > \sum\limits_{j\neq i} |a_{i,j}|$.
   (matrice à diagonale strictement dominante).
   Montrer que pour tout $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'équation $AX = b$ admet une unique solution dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Exercice 308 (CCINP PSI 2023 - ❄❄)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{E}$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \|f(x)\| \leq \|x\|.$$

1. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) \cap \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$.
   Montrer qu'il existe $y \in E$ tel que $x = f(y) - y$.
2. Exprimer $f^n(y)$ en fonction de x, y et n.
3. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$.

Exercice 309 (Mines-Ponts PC 2023 - ❄❄)

On note E l'espace des suites réelles bornées. Pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, on pose :

$$N_1(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n} \quad \text{et} \quad N_2(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{n!}.$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont bien définies et que ce sont des normes sur E.
2. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que $N_2 \leq CN_1$.
3. Montrer que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

Exercice 310 (CCINP PSI 2021 - ❄❄)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N_a(P) = |P(a)| + \displaystyle\int_0^1 |P'(t)|dt$.

1. Montrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que, si E est un espace vectoriel réel muni d'une norme N, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $x \in E$, alors $N(x_n) \longrightarrow N(x)$.
3. Pour quelles valeurs de a la suite des $P_n = \left(\dfrac{X}{2}\right)^n$ est-elle convergente pour N_a ?

Exercice 311 (Mines-Ponts PSI 2022 - ❄❄)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N_a(P) = |P(a)| + \displaystyle\int_0^1 |P'(t)|dt$.

1. Soient E un espace vectoriel muni de deux normes équivalentes N_1 et N_2. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour N_1 alors elle converge pour N_2.
2. Soit $E = \mathbb{R}[X]$.
   Soit, pour $a \in \mathbb{R}$, $N_a : P \in E \longmapsto |P(a)| + \|P'\|_{\infty,[0,1]}$
   (a) Si $a \in \mathbb{R}$, montrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Soient $a, b \in [0, 1]$. Montrer que N_a et N_b sont des normes équivalentes.
   (c) Pour quelles valeurs de a la suite des $P_n = \left(\dfrac{X}{2}\right)^n$ est-elle convergente pour N_a ?

Exercice 312 (CCINP PSI 2021 - ❄❄)

On note $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1]),\ f(0) = 0\}$ et pour $f \in E$:

$$N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N'(f) = \|f + f'\|_\infty.$$

1. Montrer que N et N' sont des normes sur E.
2. Établir, pour tout $x \in [0, 1]$: $e^x f(x) = \displaystyle\int_0^x e^t(f(t) + f'(t))dt$.
3. Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$\forall f \in E,\ \alpha N'(f) \leq N(f) \leq \beta N'(f).$$

Exercice 313 (Centrale PC 2022 - ❄❄❄)

On note $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1]),\ f(0) = f'(0) = 0\}$ et pour $f \in E$:

$$N(f) = \|f + f''\|_\infty \quad \text{et} \quad N'(f) = \|f\|_\infty + \|f''\|_\infty.$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Soit $g \in \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{R})$. Montrer que le système $(y'' + y = g,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0)$ possède une unique solution qui est $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \sin(x - t)g(t)dt$.
3. On admet que N' est une norme sur E. Montrer qu'il existe deux réels strictement positifs a et b tels que :

$$\forall f \in E,\ aN'(f) \leq N(f) \leq bN'(f).$$

Exercice 314 (Mines-Ponts PSI 2022 - ❄❄❄)

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $N(A) = \mathrm{tr}(A^T A)$.
Montrer que, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

Exercice 315 (Centrale PC 2022 - ❄❄❄)

Soit $a \in]0,1[$.
On note F le sous-espace vectoriel de $E = \mathcal{C}([-a,a],\mathbb{R})$ constitué des fonctions polynomiales.

1. On pose $f_n : x \longmapsto 1 + x + \cdots + x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément de E au sens de la norme $\| \ \|_\infty$.
2. Le sous-espace F est-il fermé pour $\| \ \|_\infty$?
3. Soit $f : [-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que la suite $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée pour $\| \ \|_\infty$.
   Montrer que f appartient à l'adhérence de F.

Exercice 316 (Centrale PSI 2023 - ❄❄❄)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
Soit $K \in \mathbb{R}^n$ un convexe fermé non vide et soit $x \notin K$.
On pose $f : z \in K \longmapsto \|z - x\|$.

1. Montrer que si $a, b \in K$, alors :
$$\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\|^2 + \frac{1}{4}\|a-b\|^2 = \frac{1}{2}\Big(\|x-a\|^2 + \|x-b\|^2\Big).$$
2. Montrer que f est continue.
3. Soient $z_0 \in K$ et B_0 la boule fermée de centre z_0 et de rayon $\|x - z_0\|$. On pose $K_0 = K \cap B_0$.
   Montrer que f admet un minimum sur K_0. On note $\tilde{z}$ un élément de K_0 tel que $f(\tilde{z}) = \min\limits_{z\in K_0} f(z)$.
4. Montrer que pour tout $z \in K$, on a $\|z - x\| \geq \|\tilde{z} - x\|$.
5. En déduire que f admet un minimum sur K atteint en un unique point.

Exercice 317 (Mines-Ponts PC 2022 - ❄❄❄)

On munit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\| \ \|_\infty$.
Soit φ une forme linéaire sur E telle que :
$$\forall f \in E, \quad (f \geq 0) \implies (\varphi(f)) \geq 0).$$
Montrer que φ est continue.

Exercice 318 (CCINP PC 2019 - ❄❄)

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout (i,j), $a_{i,j} > 0$ et, pour tout i, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. On admet que $\mathrm{rg}(A - I_n) = n - 1$.
Si $X = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $\|X\| = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(A - I_n)$.
2. Montrer que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\|AX\| \leq \|X\|$.
3. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $|\lambda| \leq 1$.
4. On pose $B = A + I_n = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.
   Montrer que, pour tout i, $b_{i,i} > \sum\limits_{j\neq i} b_{i,j}$.
5. Montrer que B est inversible.
6. Montrer que $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice R, et que R est semblable à $\mathrm{diag}(1,0,\ldots,0)$.

Exercice 319 (Centrale PC 2019 et 2022 - ❄❄❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que A est limite d'une suite de matrices diagonalisables.
2. Montrer que $\chi_A(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

Exercice 320 (Mines-Ponts PC 2022 - ❄❄❄)

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{C})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. A-t-on aussi $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 321 (Mines-Ponts PC 2019 - ❄❄❄)

Soit $n \geq 2$ un entier. Soient $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, convergeant respectivement vers A et B. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A_k est semblable à B_k.

Est-il vrai que A est semblable à B ?

Exercice 322 (IMT MP 2023 - ❄❄❄)

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{a}{n}\right) & \sin\left(\frac{b}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{b}{n}\right) & \cos\left(\frac{a}{n}\right) \end{pmatrix}^n$.

Exercice 323 (Centrale PSI 2022 - ❄❄❄)

1. Soient $P \in \mathbb{C}[X]$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   Montrer que, si A est semblable à B, alors $P(A)$ est semblable à $P(B)$.
2. Soit $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui converge vers $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, B_k est semblable à une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrer que B est semblable à A.
3. Est-ce encore vrai si A n'est pas diagonalisable ?

Exercice 324 (Centrale PSI 2021 - ❄❄❄)

1. La matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Est-elle limite d'une suite de matrices diagonalisables ?
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe $c > 0$ tel que, pour tout $z \in C$, $|P(z)| \geq c|\mathrm{Im}(z)|^n$.
3. Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$ convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 325 (Mines-Ponts PC 2022 - ❄❄❄)

Soient $A_1, \ldots, A_r$ des parties denses et ouvertes d'un espace vectoriel normé E. On rappelle qu'une partie est dense si son adhérence est égale à E.
Montrer que $A_1 \cap \cdots \cap A_r$ est ouverte et dense.

Thème 10

Probabilités, Variables aléatoires

Rapports de jury :

- **CCINP 2023 PSI :** *Les exercices sur les probabilités peuvent difficilement se traiter par automatisme. En probabilité, la modélisation des expériences pose problème aux candidats, ils rencontrent souvent des difficultés à décrire l'ensemble des évènements élémentaires de celles-ci. Les candidats ont des difficultés sur la compréhension d'une situation pour déterminer une loi d'une variable aléatoire. La "modélisation" de la situation probabiliste afin de reconnaître une loi (usuelle ou non) met davantage les candidats en difficulté.*

  Peu de candidats connaissent la définition d'une variable aléatoire, ils ne savent pas que c'est une fonction.
- **CCINP 2022 PSI :** *La maîtrise globale de ce sujet progresse avec les années. Les conditions pour qu'une famille de réels puisse définir une loi de probabilité sont plus ou moins bien connues et beaucoup de candidats ne voient pas que lorsqu'une somme (finie ou infinie) de nombres positifs est égale à 1, prouver que chaque nombre est lui-même inférieur ou égal à 1 est superflu. On voit souvent des confusions entre l'évènement ≪ A inter B ≫ et l'évènement ≪ A sachant B ≫. Les propriétés de l'espérance sont le plus souvent bien connues, c'est moins le cas pour la variance : variance de $aX + B$, condition pour que la variance soit additive.*
- **CCINP 2019 PSI :** *On assiste à des confusions entre variable aléatoire et nombre et il n'est pas rare de voir écrit $E(X) = \sum XP(X = k)$.*

  Les probabilités conditionnelles ne sont pas maîtrisées. Au-delà des problèmes de nature d'objet fréquemment rencontrés, beaucoup tentent d'exprimer $P(X = k)$ en fonction de $P(X = k|Y = n)$ en utilisant la définition d'une probabilité conditionnelle, mais ne pensent pas à utiliser la formule des probabilités totales.
- **Centrale 2022 PSI :** *Le chapitre des probabilités semble avoir un statut particulier pour les candidats qui oublient trop souvent les hypothèses des théorèmes employés : ainsi il est difficile d'avoir celles de l'inégalité de Markov ou la définition d'un système complet d'événements. Il va sans dire que nous attendons une bonne connaissance des lois usuelles (notamment de leur interprétation pour la binomiale et la géométrique).*

  La définition et les propriétés de la covariance n'étaient pas connues de beaucoup d'étudiants, dont certains d'un bon niveau par ailleurs. Les étudiants doivent savoir comparer pour une variable aléatoire X et une application croissante f les ensembles $(X \geq a)$ et $(f(X) \geq f(a))$.

  Il est préférable de ne pas commencer par une égalité de probabilités mais par une égalité entre événements. Ceci permet d'éviter les fréquentes confusions entre les différents objets en probabilités De nombreuses inversions des inégalités dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev montrent que des étudiants n'ont pas réfléchi sur le sens de cette formule, pourtant cruciale.
- **Centrale 2021 PSI :** *Pour les questions théoriques, la principale difficulté reste l'utilisation de la formule des probabilités totales. La quasi-totalité des candidats n'a pas le réflexe de citer un système complet d'évènements. Lorsque la précision est demandée, il est très souvent incomplet. Pour finir, les probabilités conditionnelles intervenant dans cette formule sont le plus souvent parachutées.*
- **Navale 2019 et 2021 PSI :** *Si le jury souligne une légère amélioration dans les exercices portant sur les probabilités, la reconnaissance des lois usuelles fait partie des attentes.*

  Les exercices portant sur les probabilités ont souvent posé des soucis aux candidats, même dans des cas basiques d'utilisation, avec des confusions sur les lois usuelles.
- **Mines Telecom 2022 :** *Le cours de probabilités, surtout celui de deuxième année, avec une mention particulière pour la formule des probabilités totales et les systèmes complets d'événements, a parfois fait l'objet d'une impasse pure et simple*
- **Mines-Ponts 2021 PSI :** *En probabilités, savoir utiliser les fonctions indicatrices (qui sont de simples variables aléatoires de Bernoulli) peut s'avérer pratique, par exemple pour des exercices utilisant des compteurs.*
- **Mines-Ponts 2019 PSI :** *La modélisation des situations en probabilités en probabilité pose problème pour une bonne moitié des candidats, l'autre parvenant en général à représenter la situation. Penser à introduire de nouvelles variables aléatoires pour modéliser. Trop théoriser le contexte probabiliste sans réfléchir à l'interpréter mène souvent à écrire des inepties.*

  Certains candidats confondent encore indépendance et incompatibilité, ainsi qu'union et intersection pour décrire de manière ensembliste les évènements avec des difficultés pour justifier les étapes de calcul, notamment l'emploi de la formule des probabilités totales souvent mal utilisée. Les liens entre les quantificateurs existentiel et universel, d'une part, et les symboles réunion et intersection d'autre part, ne sont pas toujours clairs.

  La connaissance précise des espérances et variances des lois usuelles permet de ne pas perdre du temps à refaire le calcul. Concernant les inégalités de Markov, Bienaymé-Tchebytchev, la loi faible des grands nombres, les hypo- thèses sont souvent oubliées.

  Pour calculer l'espérance d'une somme, il peut être plus judicieux de faire appel à la linéarité de l'espérance.

Énoncés :

Exercice 326 (IMT PSI 2021 - ❄)

On estime qu'il y a une chance sur 10^6 pour qu'un élève soit un génie. On dispose d'un échantillon de 500000 élèves. Soit X le nombre d'élèves qui sont des génies.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Par quelle autre loi peut-on approcher X ?

Exercice 327 (CCINP PSI 2019, 2023 (Franck-Arthur E.) - ❄❄)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

1. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.
2. Calculer $P(X = k|Z = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Reconnaître la loi.
3. X et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 328 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui tend vers 0 en décroissant strictement.
Trouver un réel λ pour lequel il existe une probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P([\![n, +\infty[\![) = \lambda a_n.$$

Exercice 329 (Mines-Ponts PSI 2021 - ❄❄)

Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Déterminer la probabilité que toutes les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + (A - 1)y' + By = 0$$

tendent vers 0 en $+\infty$..

Exercice 330 (CCP PSI 2017, Mines-Ponts PSI 2023 - ❄❄)

Soit X une variable suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a :
$$P(X \leq n) = \frac{1}{n!}\int_\lambda^{+\infty} e^{-t}t^n \mathrm{d}t.$$
2. En déduire un équivalent de $\displaystyle\int_\lambda^{+\infty} e^{-t}t^n \mathrm{d}t$ quand n tend vers $+\infty$.
3. Grâce à la fonction génératrice G_X de X, calculer la probabilité que X soit paire.
4. Pour Y une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{1, 2\}$, calculer $P(XY$ est paire$)$.

Exercice 331 (Mines-Ponts PSI 2023 - ❄❄)

1. Dans une urne, on trouve n boules noires et n boules blanches. On tire sans remise jusqu'à ce qu'il ne reste de plus de boules des deux couleurs. Soit X_n la variable aléatoire qui représente le nombre de boules restantes à la fin des tirages.
Déterminer la loi de X_n.
2. On dispose maintenant de deux urnes contenant n boules chacune.
On tire sans remise de manière équiprobable soit dans l'urne 1, soit dans l'urne 2, jusqu'à ce qu'une des deux urnes soit vide. Soit Y_n la variable aléatoire qui représente le nombre de boules restantes dans l'urne non vidée à la fin des tirages.
Déterminer la loi de Y_n.

Exercice 332 (CCINP PC 2022 - ❄❄)

Soient a un réel et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $\forall k \in \mathbb{N}$, on ait :

$$P(X = k) = \frac{a}{2^k k!}.$$

Déterminer a puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 333 (CCINP PSI 2023 - ❄❄)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, a un réel et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ telle que, pour tout $\forall k \in [\![0, n]\!]$, on ait :

$$P(X = k) = \frac{a}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Déterminer a puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 334 (CCINP PSI 2021 - ❄)

Soit $p \in]0, 1[$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_k = p^2k(1-p)^{k-1}$.

1. Montrer que $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
2. Soit X une variable aléatoire telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = p_k$. Justifier l'existence et déterminer la valeur de $E(X - 1)$ puis de $E((X - 1)(X - 2))$.
3. En déduire l'existence et la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.

Exercice 335 (IMT PSI 2022 - ❄❄)

On lance une pièce donnant pile avec probabilité $\frac{2}{3}$. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux piles consécutifs. On pose $a_n = P(X = n)$.

1. Calculer a_1 et a_2.
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer : $a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{2}{9}a_{n-2}$.
3. Montrer que le jeu se termine presque sûrement.
4. L'espérance de X est-elle finie ? Si oui, la calculer.

Exercice 336 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = a\binom{n+k}{k}p^k$.

1. Déterminer a.
2. Existence et valeur de $E(X)$ et $V(X)$?

Exercice 337 (CCINP PSI 2023 - ❄)

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Y = X^2 + 1$.

1. Calculer $E(Y)$.
2. Calculer la probabilité de l'événement $(2X < Y)$.

Exercice 338 (IMT PC 2022 - ❄❄)

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre p.
Montrer que $Y = \dfrac{1}{2X+1}$ possède une espérance et calculer $E(Y)$.

Exercice 339 (IMT PSI 2023, CCINP PC 2021 - ❄❄)

Soit X et Y deux variables aléatoires telles que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $y \sim \mathcal{U}([\![1,n]\!])$. On suppose X et Y indépendantes.
Soit Z la variable aléatoire définie par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) \neq 0, \\ Y(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) = 0. \end{cases}$$

Trouver la loi de Z, puis son espérance (et sa variance ?).

Exercice 340 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Donner la loi, l'espérance et la variance de $X - Y$.

Exercice 341 (CCINP PSI 2022 (Franck-Arthur E.) - ❄❄)

Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ on ait :

$$\mathbb{P}(X = k, Y = n) = \begin{cases} \binom{n}{k}\dfrac{1}{2^n}p(1-p)^n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Quelle est la loi de Y. Donner rapidement son espérance et sa variance.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$.
   Démontrer que : $\forall x \in]-1,1[, \ \dfrac{1}{(1-x)^{k+1}} = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$.
3. En déduire la loi de X.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 342 (CCINP PC 2023 - ❄❄)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en tire une au hasard, et on retire de l'urne toutes celles dont le numéro est strictement supérieur à celui de la boule tirée. Puis on remet la boule tirée dans l'urne.
On note X_p la variable aléatoire donnant le numéro de la boule piochée au rang p.

1. Donner la loi de X_1.
2. Donner $X_p(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}(X_p = n)$.
3. Montrer que $\mathbb{P}(X_{p+1} = k) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j}\mathbb{P}(X_p = j)$.
4. Montrer que $\mathbb{E}(X_{p+1}) = \dfrac{1}{2}\mathbb{E}(X_p) + \dfrac{1}{2}$.
5. Exprimer $\mathbb{E}(X_p)$ en fonction de p.
6. Montrer que $\mathbb{E}(X_{p+1}^2) = \dfrac{1}{3}\mathbb{E}(X_p^2) + \dfrac{1}{2}\mathbb{E}(X_p) + \dfrac{1}{6}$.
7. Trouver une relation entre $\mathbb{V}(X_{p+1})$ et $\mathbb{V}(X_p)$.

Exercice 343 (CCINP PC 2021 - ❄)

On lance indéfiniment une pièce faisant *Pile* avec la probabilité $p \in]0,1[$. On note X (resp. Y) le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du premier (resp. du deuxième) *Pile*. Déterminer les lois et les séries génératrices de X et Y.

Exercice 344 (CCINP PSI 2021 - ❄)

Soit $f : t \longmapsto \dfrac{t}{2-t^2}$.

1. Développer f en série entière, préciser le rayon de convergence.
2. Donner la loi d'une variable aléatoire X dont la fonction génératrice est f.
3. Calculer l'espérance de X.
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \dfrac{X}{2}$.

Exercice 345 (CCINP PSI 2021 - ❄❄)

Soit $p \in]0,1[$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_k = p^2k(1-p)^{k-1}$.

1. Pour $r \in \mathbb{N}^*$, donner le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ et de $x \longmapsto \dfrac{1}{(1-x)^r}$, ainsi que le rayon de convergence.
2. Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.
   Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_k = \dbinom{k+r-1}{k} p^r q^k$.
   Montrer que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.
3. Soit X une variable aléatoire telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ P(X = k) = a_k$.
   Déterminer la fonction génératrice de X.
4. En déduire l'existence et la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.

Exercice 346 (IMT PSI 2023 - ❄❄)

Soit $n \geq 2$ un entier et $(X_1, \ldots, X_n)$ une famille de variables i.i.d. suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.
On note $X = \text{Card}\{i \leq n, \ X_i = 1\}$ et $Z = \text{Card}\{i \leq n, \ X_i = X_1\}$.

1. Préciser la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?
3. Calculer la fonction génératrice de Z puis son espérance.

Exercice 347 (IMT PSI 2023 (Pierre D.) - ❄❄)

Une urne contient des boules blanches avec une proportion $p \in]0,1[$ et des boules noires avec une proportion $q = 1-p$.
On effectue des tirages successifs avec remise.
On note X la longueur de la 1ère séquence d'une même couleur et Y la longueur de la deuxième séquence.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y).
2. Déterminer la loi de X, sa fonction génératrice, son espérance et sa variance.
3. Mêmes questions pour Y.
4. Montrer que $E(X) \geq 2$.
   Pour quelle valeur de p a-t-on $E(X) = 2$?

Exercice 348 (CCINP PSI 2021, 2023 (Thibault H.) - ❄❄)

1. Donner le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-x)^r}$ pour $r \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose :
   $$p_k = \binom{k+r-1}{k} p^r q^k.$$
   Montrer que $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.
3. On se donne une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et :
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = p_k.$$
   Donner la fonction génératrice de X.
   Quel est son rayon de convergence ?
4. X admet-elle une espérance finie ? Si oui, quelle est-elle ? Même questions pour la variance.

Exercice 349 (CCINP PC 2021 - ❄)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Donner la loi de la variable $\min(X,Y)$ et calculer son espérance.
2. Donner la loi de la variable $\max(X,Y)$ et calculer son espérance.

Exercice 350 (ENSEA PSI 2021 (Andy D.) -❄❄)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant des lois géométriques de même paramètre $p \in]0,1[$.
On pose $Y = \min(X_1, \dots, X_n)$.

1. Déterminer $P(Y \geq k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$
2. Trouver la loi de Y.

Exercice 351 (Centrale PSI 2022 - ❄❄)

1. Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance. Montrer que $E(U) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(U \geq n)$.
2. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $F_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} P(X_1 = i)$, et, pour $\in \mathbb{N}^*$, $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Exprimer $P(M_n \leq k)$ en fonction de F_k et de n.
3. On lance trois dés équilibrés à 6 faces. Quelle est la probabilité que le plus grand résultat soit égal à 4 ?
4. Trois joueurs jouent à pile ou face jusqu'à obtenir pile. Soit X le nombre de lancers du dernier joueur à obtenir pile. Calculer $P(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 352 (Mines-Ponts PSI 2023 (Yassine N.) - ❄❄)

On note N le nombre d'étudiants dans une classe de PSI, et n le nombre de ceux qui proviennent de PCSI.
On envoie les étudiants au tableau successivement, et de manières indépendantes. Un même étudiant peut donc passer plusieurs fois.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité que k anciens de PCSI soient appelés pour les k premiers passages ?
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité que k anciens de PCSI soient appelés pour les $k + i$ premiers passages ?
3. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On note X_i le nombre d'appels nécessaires pour que i anciens PCSI soient appelés.
   Déterminer la loi de X_i.

Exercice 353 (CCINP PC 2021 - ❄❄)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On définit les événements A : « X est pair » et B : « X est un multiple de 3 ».

1. Calculer $P(A)$ et $P(B)$.
2. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 354 (IMT PSI 2023 - ❄❄)

On considère une urne comportant une proportion p de boules blanches et une proportion $q = 1 - p$ de boules noires. On effectue des tirages dans cette urne avec remise. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules successives de la même couleur lors d'une première série de lancers et Y la variable aléatoire qui compte le nombre de boules successives de la même couleur lors de la deuxième série de lancers. Si l'on obtient indéfiniment la même couleur, on notera $X = +\infty$.
Exemple : $BBBNNNNNB$... donne $X = 3$ et $Y = 5$.

1. Énoncer le théorème de continuité décroissante.
2. En déduire que les événement $(X = +\infty)$ et $(Y = 0)$ sont négligeables.
3. Déterminer la loi du couple (X, Y).

Exercice 355 (Centrale PC 2021 - ❄❄❄)

On lance indéfiniment une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$.
On s'intéresse au temps d'apparition du motif *Face-Pile*, modélisé par une variable aléatoire X (on a $X = n$ lorsque on a obtenu Face au $(n-1)$-ème lancer et Pile au n-ème, et que le motif *Face-Pile* n'est pas apparu avant).
De même, on modélise le temps d'apparition du motif *Pile-Pile* par une variable aléatoire Y. Déterminer la loi de X et celle de Y.

Exercice 356 (CCINP PC 2022 - ❄❄)

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables indépendantes deux-à-deux de lois de Bernoulli de paramètre p. On pose $Y_n = X_n X_{n+1}$.

1. Préciser la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer la covariance de Y_n et Y_{n+k}.

Exercice 357 (Centrale PSI 2022 - ❄❄)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$. On pose $S_n = \max\limits_{1\leq k\leq n}(X_k)$ et $T_n = \min\limits_{1\leq k\leq n}(X_k)$.

1. Les variables S_n et T_n sont-elles indépendantes ?
2. Exprimer $E(T_n)$ à l'aide d'une somme que l'on ne calculera pas.
3. En déduire sa limite quand $n \to +\infty$.

Exercice 358 (CCINP PSI 2021 - ❄❄)

Soient a et n deux entiers naturels. On considère an clients qui choisissent chacun un fournisseur. Il y a n fournisseurs et ils sont choisis au hasard. Soit X_i la variable aléatoire associée au nombre de clients du fournisseur i. Soit Y la variable associée au nombre de fournisseurs qui n'ont pas de clients.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de X_i.
2. Calculer $\mathrm{Cov}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n, X_i)$.
   En déduire $E(X_j X_i)$ et $\mathrm{Cov}(X_j, X_i)$.
   Calculer le coefficient de corrélation de X_j et X_i pour $i \neq j$.
3. Calculer l'espérance et la variance de Y .

Exercice 359 (CCINP PSI 2021 (Léa D.) - ❄❄)

Soit $n \geq 2$ un entier. On tire simultanément deux boules au hasard dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au plus petit (resp. au plus grand) des numéros des deux boules tirées.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y). En déduire les lois marginales de X et de Y.
2. Calculer $E(Y)$ puis $E(Y(Y-2))$. En déduire $V(Y)$.
3. Calculer $E(X)$ puis $E(X(X-2))$. En déduire $V(Y)$.
4. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exercice 360 (CCINP PSI 2021 - ❄❄)

On dispose d'une urne qui contient trois jetons numérotés 1, 2, 3, et dans laquelle on effectue des tirages avec remise. Soient Y la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois un chiffre différent du premier chiffre obtenu et Z la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois un troisième chiffre.

1. Déterminer la loi de Y. Quelle est la loi de $Y - 1$?
2. En déduire l'espérance et la variance de Y .
3. Déterminer la loi de (Y, Z).
4. En déduire la loi de Z.

Exercice 361 (Mines-Ponts PSI 2018 - ❄❄)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ A_n l'événement $(X_n = \cdots = X_{2n-1} = 1)$ et I l'événement « une infinité de A_n sont réalisés ». Montrez que $P(I) = 0$.

Exercice 362 (Centrale PC 2021 - ❄❄)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi géométrique de paramètre p. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Rappeler la valeur de $P(X_1 = k)$.
2. Montrer par récurrence que :

$$P(S_n = k) = \begin{cases} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} & \text{si } k \geq n \\ 0 \quad \text{si } k < n \end{cases}$$

Exercice 363 (Centrale PSI 2023 - ❄❄❄)

Soient a et b deux entiers naturels non nuls et N leur somme. Un urne contient initialemnt a boules vertes et b boules rouges. On effectue une suite de tirages selon le protocole suivant : si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ; si la boule tirée est verte, elle remplacée par une boule rouge prise dans une réserve annexe.

On définit deux variables aléatoires : T_k vaut 1 si on tire une boule verte au $k-$ième tirage et 0 sinon.
X_k est le nombre de boules vertes tirées lors des k premiers tirages.

1. Déterminer la loi de T_1 et celle de T_2.
2. Montrer que $\mathbb{P}(T_{n+1} = 1) = \dfrac{a - \mathbb{E}(X_n)}{N}$.

   En déduire que $\mathbb{P}(T_n = 1) = a\dfrac{(N-1)^{n-1}}{N^n}$.
3. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ puis déterminer sa limite quand $n \to +\infty$.

Exercice 364 (CCINP PSI 2021 - ❄❄❄)

Une urne contient N boules, r blanches et $N - r$ noires. On effectue des tirages successifs sans remise, jusqu'à épuisement des boules blanches. Soit X le nombre de tirages nécessaires.

1. Identifier la loi de X et donner son espérance pour $r = 1$ et pour $r = N$.
2. Dans la suite, r est quelconque, compris entre 1 et N.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
   (b) Montrer que, pour de telles valeurs de k, on a :
   $$P(X = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}.$$
3. Soient p et q deux entiers naturels non nuls tels que $q \leq p$.
   (a) Trouver une relation liant $\binom{p}{q}$ et $\binom{p-1}{q-1}$.
   (b) En déduire que $E(X) = \dfrac{r(N+1)}{r+1}$.

Exercice 365 (CCINP PSI 2023 - ❄❄)

Soit X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Expliciter la série génératrice $G_X(t)$.
2. Montrer que pour tout $t \geq 1$, $\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \dfrac{G_X(t)}{t^{2\lambda}}$.
3. Montrer que pour tout $t \geq 1$, $\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \left(\dfrac{e}{4}\right)^{\lambda}$.
4. Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 366 (Centrale PSI 2021 - ❄❄)

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1,1\}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, justifier que $\exp(tX_n)$ admet une espérance et la calculer. Montrer que $E(\exp(tX_n)) \leq e^{t^2/2}$ pour tout $(n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$.
2. Justifier que $\exp(tS_n)$ admet une espérance et la calculer.
   Déterminer la limite de $E(\exp(tS_n/\sqrt{n}))$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 367 (Mines-Ponts PC 2023 - ❄❄❄)

Soit $\alpha > 0$.

1. Montrer l'existence d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice $G_X(t) = \dfrac{1}{(2-t)^{\alpha}}$.
2. Déterminer un équivalent de $\mathbb{P}(X = n)$ quand $n \to +\infty$.
3. Pour $\lambda > 0$, montrer que $\mathbb{P}(X \geq \lambda + \alpha) \leq \dfrac{2\alpha}{\lambda^2}$.

Exercice 368 (Mines-Ponts PC 2022 - ❄)

Soit X la variable aléatoire égale aux nombres de **Faces** obtenus lors de n lancers d'une pièce équilibrée.
Trouver n tel que $\left(\left|\dfrac{X}{n} - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{100}\right)$ ait au moins 99% de chance de se produire.

Exercice 369 (CCINP PSI 2021 - ❄❄❄)

Soient $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $[0,1]$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre p_n.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{p_n} = \dfrac{p_1 + \cdots + p_n}{n}$. Soit $\varepsilon > 0$.

1. Montrer que $P\left(\left|\dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \overline{p_n}\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. On suppose que $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} p$.

   Montrer que $P\left(\left|\dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 370 (Centrale PSI 2018 - ❄❄❄)

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Donnez la loi de S_n. Précisez son espérance et sa variance.
2. Soit $\lambda > 0$.
   Calculez l'espérance de la variable $\exp\left(\lambda\left(X_1 - \dfrac{1}{2}\right)\right)$.
3. Soit $\lambda > 0$.
   Déterminez l'espérance de la variable $\exp(\lambda(S_n - E(S_n)))$.
4. Soit $t, \lambda > 0$. Trouvez une fonction f_t telle que :
   $$P\Big((S_n - E(S_n)) > nt\Big) \leq e^{nf_t(\lambda)}.$$
5. Soit $\lambda > 0$. Déterminez le maximum de $f_t(\lambda)$ pour $|t| \leq \dfrac{1}{2}$. .

Exercice 371 (IMT 2022 (Aubin G.) - ❄)

Deux variables indépendantes X et Y suivent une géométrique de paramètres p et q respectivement.
Quelle est la probabilité que $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$ soit inversible ?

Exercice 372 (CCINP PSI 2021 et 2023 (Yassine N.) - ❄)

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes et suivant toutes deux la loi binomiale de paramètres n et $1/2$.

Pour $\omega \in \Omega$, on pose $M(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) & 1 \\ 0 & X_2(\omega) \end{pmatrix}$.

1. En développant de deux manières le polynôme $(1+X)^{2n}$, montrer l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
2. En déduire la probabilité que $M(\omega)$ soit diagonalisable.

Exercice 373 (Mines-Ponts PC 2017 et 2021 - ❄)

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes de lois géométriques de paramètres p et q respectivement.

Déterminer la probabilité pour que la matrice $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 374 (Centrale PSI 2021, IMT PSI 2023 - ❄❄)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre p. Soit $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$. Soient I, S avec $I \leq S$ les valeurs propres de M.

1. Déterminer les expressions de I et S en fonction de X et Y.
2. Quelle est la probabilité que la matrice M soit inversible ?
3. Calculer la covariance de I et S. Ces variables sont-elles indépendantes ?
4. Montrer que, pour tout $k \geq 2$, $P(S = k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}$.

Exercice 375 (ENSEA PSI 2023 - ❄❄)

Soit A une matrice 2×2 dont les quatres coefficients sont des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$.
Calculer la probabilité que A soit inversible, puis que A soit de rang 1.

Exercice 376 (Mines-Ponts PC 2023 - ❄❄)

Soit $M = [X_{i,j}]$ une matrice de variables aléatoires telles que les $1 + X_{i,j}$ sont i.i.d. et suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. Calculer la probabilité que M soit symétrique.
2. Calculer la probabilité que M soit orthogonale.

Exercice 377 (CCINP PSI 2023 - ❄❄)

On considère une urne avec deux boules rouges et deux boules blanches. À chaque instant, si on pioche une boule rouge, on la remet et si on pioche une boule blanche, on ne la remet pas.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de boules blanches dans l'urne à l'étape n et :

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}.$$

1. Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et exprimer M^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer une matrice A telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = AU_n$.
   En déduire la loi de X_n.
3. On note T_1 la variable aléatoire qui donne le numéro de tirage où l'on pioche une boule blanche pour la première fois. Donner la loi de T_1.
4. On note T_2 la variable aléatoire qui donne le numérao de tirage où l'on pioche la deuxième boule blanche. Donner la loi de T_2.

Exercice 378 (Mines-Ponts PSI 2022 (Justin A.) - ❄❄)

Une puce saut sur les sommets d'un triangle ABC. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :
A_n : « la puce se trouve en A après n sauts »,
B_n : « la puce se trouve en B après n sauts »,
C_n : « la puce se trouve en C après n sauts ».
Si la puce se trouve en A ou en B, alors la probabilité qu'elle saute sur un sommet à l'étape suivante est la même pour tous les sommets. Si la puce se trouve au sommet C, alors elle y reste.
À l'instant initial, la puce est en A.

On note $a_n = P(A_n), b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$ et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = MX_n$.
2. M est-elle diagonalisable. Si oui, la diagonaliser.
3. Donner une expression de X_n.
4. Soit $G = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Calculer $P(G)$.

Exercice 379 (IMT PSI 2023 - ❄❄)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un graphe aléatoire non orienté à n sommets notés $A_1, \dots, A_n$. La probabilité que les sommets A_i et A_j, pour $i \neq j$, soient reliés est égale à $p_n \in]0, 1[$, et cela de façon indépendante.
On note X_i la variable aléatoire égale à 1 si le sommet A_i est isolé, c'est-à-dire s'il n'est relié à aucun autre sommet. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Donner la loi de X_1 et en déduire $\mathbb{E}(S_n)$.
2. Donner une minoration de la probabilté d'avoir au moins un sommet isolé.
3. On suppose qu'il existe $C > 0$ telque pour $n \geq 2$, $p_n = C\dfrac{\ln(n)}{n}$.
   Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = 0$.

Exercice 380 (Centrale PSI 2021 - ❄❄❄)

Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. (*identiquement distribuées et indépendantes*) de variables aléatoires de Rademacher c'est-à-dire telle que $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \dfrac{1}{2}$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $N = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{(S_n = 0)}$.

1. Donner la signification des événements $(S_n = 0)$, $(N < +\infty)$, $(N = +\infty)$. Exprimer $(N < +\infty)$ et $(N = +\infty)$ à partir des événements $(S_k = 0)$.
2. Montrer que $P(N < +\infty) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(S_n = 0)P(\forall k \in \mathbb{N}^*, S_k \neq 0)$.
3. On admet que la série $\sum P(S_n = 0)$ diverge.
   En déduire $P(N = +\infty)$.
4. Montrer que la série $\sum P(S_n = 0)$ diverge.
   Ind. Se ramener à des variables de Bernoulli.

Exercice 381 (Mines-Ponts PSI 2023 - ❄❄❄❄)

Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $[\![1, r]\!]$.
On note A_n l'événement : on retrouve n fois chaque entier de $[\![1, r]\!]$ dans le nr-uplet $(X_1, \dots, X_{nr})$.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.
2. Déterminer la probabilité qu'une infinité de A_n se réalise.

Thème 11

Fonctions vectorielles, Équations différentielles, Calcul différentiel

Rapports de jury :

- **CCINP 2023 PSI :** *La partie du programme sur les fonctions de plusieurs variables n'est pas bien assimilée. La compréhension de la continuité en un point pose problème. La définition de la dérivée partielle en un point est rarement connue. Il ne faut pas oublier que les fonctions de plusieurs variables sont au programme. La notion de limite ou de continuité en une valeur (a, b) n'est qu'exceptionnellement bien connue : la plupart des candidats pensent qu'il suffit de faire tendre x vers a et y vers b en fixant l'autre variable.*

  Le constat est similaire pour les équations différentielles : même sur des exemples plutôt simples, beaucoup sont en difficulté. Il n'est pas acceptable de ne pas connaître la méthode de la variation de la constante.
- **CCINP 2022 PSI :** *Les équations différentielles restent un sujet qui pose des difficultés à beaucoup de candidats. En particulier, la structure de l'ensemble des solutions est souvent mal connue, et la technique du changement de variable, toujours guidée, n'est pas toujours bien menée : certains candidats n'introduisent pas de bonnes notations et ne voient pas qu'il y a lieu de dériver des fonctions composées. Les fonctions à plusieurs variables inspirent peu les candidats.*
- **CCINP 2020 PSI :** *Le principe de recherche d'une solution développable en série entière d'une équation différentielle et en miroir le principe de détermination d'une équation différentielle vérifiée par une fonction somme d'une série entière sont compris. En revanche les calculs ne sont que rarement terminés et justes, le plus souvent à cause d'une mauvaise manipulation des indices des sommes.*

  Les exercices concernant les fonctions de deux variables ont eu peu de succès. Si nombre de candidats n'hésitent pas à se lancer dans de long calculs de dérivées partielles, les notions de régularité ne sont pas acquises. À titre d'exemple, beaucoup pensent prouver la continuité de f en $(0, 0)$ en prouvant la continuité des fonctions partielles $f(., 0)$ et $f(0, .)$.
- **Centrale 2022 PSI :** *Pour les équations différentielles on déplore l'utilisation inappropriée de l'équation caractéristique dans la résolution de l'équation différentielle $y'' = \pm y$, ce qui reste toutefois moins grave que son utilisation dans le cas d'une équation à coefficients non constants. La méthode dite de « variation de la constante », utile (entre autre) à la résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre avec second membre, s'apparente pour les candidats fort souvent à une recette, présentée sans rigueur, et sans que l'on sache si l'on procède par condition nécessaire ou suffisante. Rappelons que l'oxymore cache un simple changement de fonction inconnue qui permet de donner par équivalence la solution générale l'équation avec second membre. Les étudiants ne sont pas familiers avec les techniques de recollement des solutions d'une équation différentielle. La structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire est parfois ignorée.*

  Le calcul différentiel et la géométrie différentielle élémentaires sont souvent très mal connus au point que des questions aussi simples que le calcul des dérivées partielles en coordonnées polaires ou le lien entre le vecteur gradient et les ensembles de niveau d'une fonction font chuter des candidats.
- **Centrale 2021 PSI :** *Le chapitre qui a le moins de succès auprès des candidats est, cette année encore, celui sur les fonctions de plusieurs variables. La règle de la chaine, formule assez incontournable non seulement des mathématiques, mais encore des sciences physiques ou de l'ingénieur est ignorée des candidats. Montrer qu'une application f de deux variables x et y est de classe $\mathcal{C}^1$, au moyen des théorèmes de composition, s'avère être une tâche insurmontable pour certains candidats, qui en particulier ne semblent pas comprendre que la décomposition de f utilisée doit commencer par une application du couple (x, y).*
- **Mines-Télécom 2022 PSI :** *Le programme contient moins de calcul différentiel que par le passé, mais ce qui reste est souvent mal connu, les questions sur les fonctions de plusieurs variables sont très mal traitées, notamment la règle de la chaîne.*
- **Mines-Ponts 2021 PSI :** *la recherche de points critiques afin de déterminer des extrema n'a de sens que sur un ouvert ;*
- **Mines-Ponts 2019 PSI :** *Concernant les fonctions de plusieurs variables, l'étude des extremums locaux est mieux menée cette année, mais il faut prendre soin de préciser que l'on se place sur des ouverts et que la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$. L'existence de bornes sur un fermé borné pour une fonction continue devrait être systématiquement mentionnée. Les méthodes pour prouver la continuité d'une fonction à deux variables, ou celle de ses dérivées partielles dans le but de prouver que celle-ci est de classe $\mathcal{C}^1$ ne sont pas maîtrisées par les candidats. La notion de gradient reste confuse. Concernant les équations aux dérivées partielles, les calculs sont en général bien menés, on regrette néanmoins le manque de justification du caractère $\mathcal{C}^1$ du changement de variable proposé.*

Énoncés :

Exercice 382 (CCINP PSI 2017 et 2018 - ❄❄)

1. Trouver des réels a, b, c tels que $\dfrac{1}{t(t^2-1)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t+1} + \dfrac{c}{t-1}$.
2. Résoudre $(\mathcal{E})$: $t(t^2-1)x' + 2x = t^2$.

Exercice 383 (IMT 2019 - ❄❄)

Résoudre $\mathcal{E}$: $|x|y' + (x-1)y = x^2$

Exercice 384 (IMT PSI 2022 (Mathilde P.) - ❄)

Résoudre $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} x' &= x+y \\ y' &= x+2y-z \\ z' &= x+z \end{cases}$

Exercice 385 (IMT PSI 2023 - ❄)

Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
2. Montrer qu'il existe une matrice B telle que $B^3 = A$.
3. Résoudre $X'(t) = AX(t)$.

Exercice 386 (CCINP PSI 2021 (Ilyana D.) - ❄❄)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.
   Trouver une base $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ telle que $T = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ soit triangulaire. Préciser T.
3. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' &= 2x+y \\ y' &= -x+4y \end{cases}$

Exercice 387 (Mines-Ponts PSI 2023 - ❄❄)

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $A : t \in \mathbb{R} \longmapsto A(t)$ une fonction continue et à valeurs dans $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
On se donne une solution X_0 sur $\mathbb{R}$ du système différentiel $X'(t) = A(t)X(t)$.
Démontrer que l'ensemble $\{X_0(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ est contenu dans une sphère.

Exercice 388 (Mines-Ponts PC 2023 - ❄❄)

Résoudre $(\mathcal{E})$: $f''(x) + f(-x) = x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 389 (Navale PSI 2021 (Louis-Victor G.) - ❄)

Résoudre
$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = e^{-t}\cos(t).$$

Exercice 390 (CCINP PSI 2022 (Célia D.) - ❄❄)

On considère $(\mathcal{E})$: $t^2y''(t) + 3ty'(t) + y(t) = t + \dfrac{1}{t}$.

1. Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.
2. Si f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, on pose $g(x) = f(e^x)$. Montrer que f est solution de $(\mathcal{E})$ sur $]0, +\infty[$ si et seulemnt si g est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle d'ordre 2 à déterminer.
3. En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 391 (CCINP PC 2022 - ❄❄)

On étudie sur $]0, +\infty]$ l'équation différentielle
$$(\mathcal{E}) : \ x^2y'' + 4xy' + 2y = \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

1. Donner les solutions de l'équation homogène de la forme $x \longmapsto x^\alpha$. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation homogène.
2. Chercher les solutions de $(\mathcal{E})$ sous la forme $x \longmapsto \dfrac{z(x)}{x^2}$ et résoudre $(\mathcal{E})$.

Exercice 392 (CCINP PSI 2022 (Aubin G.) - ❄❄)

On veut résudre $(*) : (x^2-1)y'' + 2xy' - 2y = 0$ sur $]-1, 1[$.

1. Déterminer les solutions polynomiales de $(*)$.
2. Déterminer une équation différentielle vérifiée par z en posant $y(x) = xz(x)$.
3. Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0, 1, -1\}$ on ait
$$\frac{2(2x^2-1)}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}.$$
4. Résoudre l'équation différentielle vérifiée par z.
5. Résoudre $(*)$.

Exercice 393 (IMT PSI 2023 - ❄)

On considère $(\mathcal{E})$: $4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 1$.
On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Donner la structure algébrique de $\mathcal{S}$.
2. Trouver la (ou les) solution(s) de $(\mathcal{E})$ développables en série entière au voisinage de 0.

Exercice 394 (ENSEA PSI 2021 - ❄❄)

Déterminer les solutions de $(\mathcal{E})$: $xy'' - (x+1)y' + y = 0$ développables en série entière.

Exercice 395 (CCINP PSI 2018, 2022 (Mathilde P.) - ❄❄)

Soit $f : x \longmapsto \arcsin(x)\sqrt{1-x^2}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en précisant son intervalle de définition.
2. Trouver des solutions polynomiales $a(x), b(x)$ et $c(x)$ telles que f soit solution de l'équation différentielle du premier ordre $(\mathcal{E}) : a(x)y' + b(x)y = c(x)$.
3. Montrer qu'il existe une unique solution impaire développable en série entière au voisinage de 0 qui soit solution de $(\mathcal{E})$.
   Montrer que f est cette solution.
4. En déduire un développement en série entière au voisinage de 0 de f.

Exercice 396 (Centrale PSI 2023 - ❄❄)

Soit $(\mathcal{E}) : y' = 2xy + 1$ et $y(0) = 0$.

1. Justifier que $(\mathcal{E})$ admet une unique solution f définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est impaire.
2. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.
3. Donner une expression de f.

Exercice 397 (Centrale PC 2018 - ❄❄)

On pose $a_n = \dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

1. Donner une relation entre a_n et a_{n+1} et trouver le rayon de convergence R de la série entière f.
2. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par f.
3. La résoudre et en déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 398 (Cent. PSI 2018, 2021 (Alban, Clément G.) -

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ tel que $f(0) = 0$ et telle que pour tout $x \geq 0$ on ait $0 \leq f'(x) \leq 1$.
Montrer que pour tout $x \geq 0$:

$$\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 \geq \int_0^x f^3(t)dt.$$

Exercice 399 (CCINP PSI 2019 - ❄❄)

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$ on définit $\varphi(f) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(f)(0) = f(0)$ et :

$$\forall x \in]0,1], \quad \varphi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que 0 n'est pas une valeur propre de φ.
3. Montrer que 1 est une valeur propre de φ et trouver l'espace propre associé.
4. Trouver les autres valeurs propres de φ.

Exercice 400 (Centrale PC 2021 - ❄❄❄)

1. Soit $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $g'' \leq 0$.
   Montrer que, pour tout $(t_0, t) \in \mathbb{R}^2$, $g(t) \leq g(t_0) + (t - t_0)g'(t_0)$.
2. Soit $a > 0$. Soit q une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall t \in R, q(t) \geq a$.
   Soit f une solution de l'équation différentielle $y'' + qy = 0$. Montrer que l'ensemble des zéros de f n'est pas majoré.

Exercice 401 (Mines-Ponts PSI 2023 - ❄❄)

Soit $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f'' + (1+u)f = 0$.
Soit $g : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto f(x) + \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)f(t)u(t)dt$.

1. Trouver une équation différentielle vérifiée par g.
2. En déduire qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ |f(x)| \leq c + \int_0^x |f(t)u(t)|dt.$$

3. Montrer que f est bornée.

Exercice 402 (CCINP PSI 2022 - ❄)

Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie une équation différentielle du premier ordre.
3. On donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$.
   Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 403 (Centrale PSI 2021 - ❄❄❄)

Soit $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Supposons, dans cette question, qu'il existe $S : \mathbb{R} \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $S^{-1}(t)A(t)S(t) = A(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A'(t) = B(t)A(t) - A(t)B(t)$.
2. Supposons, dans cette question, qu'il existe $B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ A'(t) = B(t)A(t) - A(t)B(t).$$

   Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ est semblable à $A(0)$.

Exercice 404 (Mines-Ponts PSI 2019 - ❄❄❄)

Soient $n \in N^*$ et $M : \mathbb{R} \longmapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application dérivable.

1. Démontrer que l'application $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(x) = {}^tM(x).M(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.
2. Soient $A : \mathbb{R} \longmapsto \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ continue et $M : \mathbb{R} \longmapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ solution de l'équation différentielle

$$M'(x) = A(x)M(x).$$

   On suppose que $M(0) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $M(x) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 405 (Mines-Ponts PC 2023 - ❄❄)

Déterminer l'image de l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x+y, xy)$.

Exercice 406 (CCINP PSI 2023 - ❄❄)

Soit $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x + y = 0\}$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x+y}$ si $(x,y) \notin F$ et $f(x,y) = 0$ si $(x,y) \in F$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus F$ et que $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3f$ sur cet ensemble.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et les calculer.
3. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 407 (CCINP PC 2019, Mines-Ponts PC 2022 - ❄❄)

Soit $f : \ \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

1. Montrer que f se prolonge par continuité en $(0,0)$.
2. La fonction ainsi prolongée est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
3. Que valent $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$?

Exercice 408 (CCINP PSI 2021 et 2023 - ❄❄)

On pose $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. Montrer que f est continue.
2. Exprimer les dérivées partielles de f.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
4. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 409 (IMT PC 2021 - ❄)

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
On pose pour $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $\quad F(x, y) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.
Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et calculer son laplacien $\Delta F = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

Exercice 410 (CCINP PSI 2021 - ❄❄)

On cherche les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant la condition :

$$(\mathcal{E}): \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)dt.$$

1. Résoudre, selon la valeur du réel c, l'équation différentielle $y'' - cy = 0$.
2. Soit $F : (x, y) \longmapsto \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(t)dt$.
   Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.
3. Soit f une solution de $(\mathcal{E})$.
   Calculer $f(0)$ et $f''(x)f(y) - f(x)f''(y)$. En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.

Exercice 411 (Mines-Ponts PC 2022 - ❄❄)

Déterminer les fonctions $f : (]0, +\infty[)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de $\dfrac{\partial f}{\partial x} - xy\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.
Ind. Utiliser le changement de variable $(u, v) = (x, xe^{y^2/2})$.

Exercice 412 (TPE PSI 2016 - ❄)

Trouver les plans tangents à la surface d'équation $z^2 = xy$ et contenant la droite d'équations : $x = 2$ et $y + z = 1$.

Exercice 413 (CCINP MP 2018 - ❄)

1. Déterminer les points critiques de $f(x, y) = x\Big(\ln^2(x) + y^2\Big)$ sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$.
2. Admet-elle une extremum global sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$?
3. Si (a, b) est un point crique de f, quelle est l'équation du plan tangent à $(\mathcal{S}) : z = f(x, y)$ en le point $(a, b, f(a, b))$?
4. Quelle est l'équation du plan tangent à $(\mathcal{S})$ en $(1, 1, 1)$?
5. Exprimer la différentielle de f en $(1, 1)$.

Exercice 414 (CCINP PC 2022 - ❄❄)

Soit $f : [0, 2] \times [-1, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $(x, y) \longmapsto x^2 - 2x + xy + y^2$.
Trouver les extrémums globaux de f.

Exercice 415 (Mines-Ponts PSI 2021 - ❄❄)

Déterminer les extrema de $f : (x, y) \longmapsto x\Big(\ln^2(x) + y^2\Big)$ sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$.

Exercice 416 (IMT PSI 2023 - ❄❄)

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ et g la fonction définie sur D par :

$$g(x, y) = \begin{cases} xy\ln(x^2 + y^2) & \text{si} \quad 0 < x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overset{o}{D}$.
2. Montrer que g admet des extremums globaux sur D.
3. A-t-on extremum local en $(0, 0)$?
   Étudier les extremums locaux ou globaux sur le bord de D.
4. Déterminer les extremums de f sur D.

Exercice 417 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄❄)

Soir $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et r l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $\mathbb{R}$.
Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on note $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
Montrer l'équivalence entre :

(i) $\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \ \Delta(f \circ r) = (\Delta f) \circ r$,
(ii) $R \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 418 (Centrale PSI 2021 - ❄❄❄)

1. Déterminer le nombre de solutions de $xe^{-x} = \lambda$ en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Trouver les extrema de $f : (x, y) \longmapsto xye^{-x-y}$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer les λ tels que l'ensemble
   $$\{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \ f(x, y) = \lambda\}$$
   est non vide.

Exercice 419 (Centrale PSI 2023 - ❄❄❄)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^{\cdot}$ la matrice Hessienne $H_f(x)$ a toutes ses valeurs propres dans $[1, +\infty[$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on note $\varphi : t \longmapsto f(tx)$.
   Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et exprimer φ'' à l'aide de la matrice Hessienne de f.
2. En considérant $\psi : t \longmapsto f(tx) - \langle \nabla f(0), tx \rangle - \dfrac{t^2}{2}x^T x$, montrer l'inégalité :
   $$f(x) \geq f(0) + \langle \nabla f(0), x \rangle + \frac{1}{2}x^T x.$$
3. En déduire que $\displaystyle\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum.