# Révisions pour l'écrit

## Mardi 26 mars (1h)

### Sujet 1 (CCINP MP 2023 Exercice 2)

On définit la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + \mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Établir que l'équation $\mathrm{e}^{-x} = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que $f$ possède un unique point critique $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
3. À l'aide de la matrice hessienne, démontrer que $f$ admet un extremum local en $(x_0, y_0)$.
   Est-ce un minimum ou un maximum ?

### Sujet 2 (Centrale MP 2018 (extrait))

**Notations**

- On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et $\|.\|$ désigne la norme euclidienne.
- Si $U$ est une partie de $\mathbb{R}^n$, alors $\overline{U}$ désigne son adhérence et $\partial U$ sa frontière.
- Pour $a \in \mathbb{R}^n$ et $R > 0$, on désigne par $D(a, r)$ la boule ouverte de centre $a$ et de rayon $R$ pour la distance euclidienne. Autrement dit
$$D(a, R) = \{x \in \mathbb{R}^n / \ \|x - a\| < R\}$$
  La boule fermée de centre $a$ et de rayon $R$ est alors $\overline{D(a, R)}$.
- L'opérateur différentiel $\Delta$ (appelé laplacien) est défini pour toute fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ par
$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in U, \ \Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$
- Une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ à valeurs réelles sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ est dite harmonique sur $U$ si
$$\forall x \in U, \ \Delta f(x) = 0$$
  L'ensemble des fonctions harmoniques est noté $\mathcal{H}(U)$.

## II - Exemples de fonctions harmoniques

***II.A* -** On cherche dans cette question à déterminer les fonctions harmoniques non nulles sur $\mathbb{R}^2$ à variables séparables, c'est à dire les fonctions $f$ s'écrivant sous la forme $f(x, y) = u(x)v(y)$.
On se donne donc deux fonctions $u$ et $v$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulles, et on pose
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x, y) = u(x)v(y)$$
On suppose que $f$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer qu'il existe une constante $\lambda$ réelle telle que $u$ et $v$ soient solutions respectives des équations
$$z'' + \lambda z = 0 \quad \text{et} \quad z'' - \lambda z = 0$$
2. Donner en fonction du signe de $\lambda$ la forme des fonctions harmoniques à variables séparables.

***II.B -*** Soit $f$ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On pose, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$,

$$g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

3. Justifier que $g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$.
4. Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, exprimer $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$ en fonction de
$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$
5. Exprimer également $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta)$ en fonction des dérivées partielles premières et secondes de $f$ en $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.
6. Montrer que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ si et seulement si, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$,
$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0$$
7. Déterminer les fonctions harmoniques radiales de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, c'est à dire les fonctions $f$ appartenant à $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ telles que $(r,\theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ soit indépendante de $\theta$.
8. Soient $a, b, r_1, r_2$ quatre réels tels que $0 < r_1 < r_2$. Déterminer une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ telle que
$$\begin{cases} \Delta f = 0 \\ f(x,y) = a \ \text{ si } \ \|(x,y)\| = r_1 \\ f(x,y) = b \ \text{ si } \ \|(x,y)\| = r_2 \end{cases}$$

***II.C -*** Dans cette sous-partie II.C, on considère deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, $u : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on pose

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, \qquad f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = u(r)v(\theta)$$

La fonction $f$ est alors une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dite à variables polaires séparables.

9. Montrer que, si $f$ n'est pas identiquement nulle, alors $v$ est $2\pi$-périodique.
10. Montrer que, si $f$ est harmonique et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, alors il existe un réel $\lambda$ tel que $u$ soit solution de l'équation différentielle (II.1)
$$r^2 z''(r) + rz'(r) - \lambda z(r) = 0 \tag{II.1}$$
et $v$ soit solution de l'équation différentielle (II.2)
$$z''(\theta) + \lambda z(\theta) = 0 \tag{II.2}$$

**II.C.1)** On suppose ici que $\lambda = 0$.

11. Quelles sont les solutions $2\pi$-périodiques de (II.2) ?
12. Résoudre (II.1) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
13. En déduire, dans le cas $\lambda = 0$, les fonctions harmoniques à variables polaires séparables.

**II.C.2)** On suppose désormais $\lambda \neq 0$.

14. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que (II.2) admette des solutions $2\pi$-périodiques non nulles. Donner ces solutions.
15. Résoudre (II.1) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
*On pourra considérer, en justifiant son existence, une fonction $Z$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $r > 0$, $z(r) = Z(\ln(r))$.*
16. Quelles sont les solutions se prolongeant par continuité en 0 ?

## Mercredi 27 mars (2h)

### Sujet 3 (E3A PSI 2021 Exercice 3)

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose : $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \exp\left(-t^n\right) \mathrm{d}t$.

1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de $I_n$.
2. En citant précisément le théorème utilisé, justifier l'existence et déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En le justifiant, effectuer le changement de variable $u = t^n$ dans $I_n$.
4. Déterminer alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n$
   *On donnera le résultat en fonction d'une intégrale $J$ que l'on ne cherchera pas à calculer.*
5. En déduire un équivalent de $I_n$ au voisinage de $+\infty$ en fonction de $J$.
6. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} I_n x^n$.

   (a) Déterminer le rayon de convergence $R$ de cette série entière.

   (b) On pose pour tout $x$ réel et lorsque cela est possible $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} I_n x^n$.

   Donner l'ensemble de définition de $f$.

### Sujet 4 (E3A PC 2017 Exercice 3)

Dans tout cet exercice, $\lambda$ désignera un réel strictement positif, et $X$ une variable aléatoire réelle discrète suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda$, c'est-à-dire telle que : $\forall j \in \mathbb{N},\ P\left(X = j\right) = \dfrac{\lambda^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda}$.

1. (a) Montrer que la variable aléatoire réelle discrète $X(X-1)$ admet une espérance et la calculer.
   (b) En déduire la valeur de $\mathbb{E}\left(X^2\right)$.
2. Montrer que : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ P\left(X \geq i\right) \leq \dfrac{\lambda^2 + \lambda}{i^2}$.
   Que peut-on en déduire pour la série de terme général $P\left(X \geq i\right)$ où $i \in \mathbb{N}^*$ ?
3. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite $\left(u_{i,k}\right)_{i\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ u_{i,k} = \frac{\lambda^i}{(k+1)(k+2)\dots(k+i)}$$

   (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{i\geq 1} u_{i,k}$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ R_{n,k} = \displaystyle\sum_{i=n}^{+\infty} u_{i,k}$.

   (b) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante $K$ que l'on précisera telle que pour tout entier $k \geq K$, on a : $R_{n,k} \leq \displaystyle\sum_{i=n}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{k^i}$.

4. (a) Montrer que pour tout entier $k > \lambda$, $P\left(X \geq k\right) \leq \dfrac{k}{k-\lambda} P\left(X = k\right)$.
   Puis montrer que pour tout entier $k \geq 2\lambda$, $P\left(X > k\right) \leq P\left(X = k\right)$.

   (b) Dans cette question et uniquement cette question, on suppose que $\lambda \leq \dfrac{1}{2}$.

   Montrer à l'aide des questions précédentes que $\displaystyle\sum_{i=2}^{+\infty} P\left(X \geq i\right) \leq 1$.

(c) Dans le cas général, que vaut $\sum_{i=0}^{+\infty} P(X \geq i)$ ? Le justifier.

5. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,\ 1\}$.

Dans cette question, on considère $Y$ une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.

(a) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R},\ 1 - t \leq \mathrm{e}^{-t}$.

(b) Montrer que : $\forall k \in \{0,\ 1, \ldots,\ n\},\ \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-\alpha(n,k)}$ où $\alpha(n,k) = \frac{(k-1)k}{2n}$.

(c) Montrer que : $\forall k \in \{0,\ 1, \ldots,\ n\},\ P(Y = k) \leq \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{\beta(n,k,\lambda)}$ où $\beta(n,k,\lambda) = \frac{k(2\lambda + 1 - k)}{2n}$.

(d) Quelle majoration de $P(Y = k)$ peut-on obtenir pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2\lambda + 1$ ?

(e) En déduire que pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2\lambda + 1$ : $\sum_{j=k+1}^{n} P(Y = j) \leq \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.

**Sujet 5 (Mines-Ponts PSI 2021 Maths 1)**

## Variables aléatoires entières symétriques à forte dispersion

Dans tout le sujet, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sur lequel toutes les variables aléatoires considérées sont définies. On utilisera systèmatiquement la locution « variable aléatoire »pour parler d'une variable aléatoire discrète, et « variable aléatoire entière »pour parler d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On pourra noter

$$X(\Omega) = \{x_n, n \in I\}$$

où $I$ est un sous-ensemble fini ou dénombrable de $\mathbb{N}$ et $x_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in I$.

**Définition (Dispersion d'ordre $\alpha$)**

On fixe un réel $\alpha > 0$. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On dit que $X$ **vérifie la condition** $(\mathcal{D}_\alpha)$ - dite de dispersion d'ordre $\alpha$ - lorsque, quand $n$ tend vers $+\infty$,

$$P(|X| \geq n) = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

**Définition (Variables aléatoires symétriques)**

On dit que $X$ est **symétrique** lorsque $-X$ suit la même loi que $X$, autrement dit lorsque

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = P(X = -x).$$

On admet le *principe de transfert de l'égalité en loi* :

**Théorème**

Etant donné deux variables aléatoires $X$ et $Y$ prenant leurs valeurs dans un même ensemble $E$, ainsi qu'une application $u : E \to F$, si $X$ et $Y$ suivent la même loi, alors $u(X)$ et $u(Y)$ aussi.

Dans tout le sujet, on se donne une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires entières, mutuellement indépendantes, toutes de même loi, symétriques, et vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$. On *admet* que sous ces conditions la variable $X_{n+1}$ est indépendante de $X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

appelée $n$-ième moyenne empirique des variables $X_k$. L'objectif du sujet est d'établir la convergence simple d'une suite de fonctions associées aux variables $M_n$.
Les trois premières parties du sujet sont totalement indépendantes les unes des autres.

### Questions de cours

1. Soit $X$ une variable aléatoire. Rappeler la définition de « $X$ est d'espérance finie ».
   Montrer alors que $X$ est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ est d'espérance finie.
2. Soit $X$ une variable aléatoire. Montrer que si $X$ est bornée, autrement dit s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que $P(|X| \leq M) = 1$, alors $X$ est d'espérance finie.

### Généralités sur les variables aléatoires

3. Soit $X$ une variable aléatoire entière vérifiant $(\mathcal{D}_\alpha)$. Montrer que $X$ n'est pas d'espérance finie, et que $X^2$ non plus.
4. Soit $X$ une variable aléatoire symétrique, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire. Montrer que $f(X)$ est symétrique et que si $f(X)$ est d'espérance finie alors $E(f(X)) = 0$.
5. Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires symétriques indépendantes. En comparant la loi de $(-X, -Y)$ à celle de $(X, Y)$, démontrer que $X + Y$ est symétrique.

### Deux sommes de séries

On fixe ici un nombre complexe $z$ tel que $z \neq 1$ et $|z| \leq 1$. On introduit la fonction

$$L : t \mapsto \int_0^t \frac{z}{1 - uz} du.$$

6. Montrer que, sur le segment $[0, 1]$, la fonction $L$ est convenablement définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donner une expression simple de sa dérivée $n$-ième pour tout $n \geq 1$.
7. Justifier que pour tout $t \in ]0, 1]$, on a $1 - t \leq |1 - tz|$, et plus précisément encore que $1 - t < |1 - tz|$.
8. En déduire successivement que

$$\int_0^1 \left|\frac{1-t}{1-tz}\right|^n dt \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \text{ et } \int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}} dt \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

9. En déduire, grâce à une formule de Taylor, que $L(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.
10. Montrer que la fonction suivante est continue.

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (t, u) & \mapsto |1 + ue^{it}| \end{cases}$$

    En déduire qu'il existe, pour tout $a \in ]0, \pi[$, un réel $m_a > 0$ tel que

$$\forall (t, u) \in [-a, a] \times [0, 1], \quad |1 + ue^{it}| \geq m_a.$$

11. Montrer que la fonction

$$F : t \in ]-\pi, \pi[ \mapsto \int_0^1 \frac{e^{it}}{1 + ue^{it}} du$$

    est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner une expression de sa dérivée sous la forme d'une intégrale à paramètre.

12. Montrer que
$$\forall t \in ]-\pi, \pi[, \quad F'(t) = -\frac{\tan(t/2)}{2} + \frac{i}{2},$$
et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t \in ]-\pi, \pi[$.
13. Soit $\theta \in ]0, 2\pi[$. Déduire des questions précédentes que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}.$$

**Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique**

On fixe dans cette partie une variable aléatoire symétrique $X$. On pose
$$\Phi_X : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto E(\cos(tX)), \end{cases}$$
appellée fonction caractéristique de $X$.

14. Montrer que $\Phi_X$ est bien définie, paire et que $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\Phi_X(t)| \leq 1$.
15. En utilisant le théorème de transfert, montrer que $\Phi_X$ est continue.

Dans la suite de cette partie, on suppose que $X$ est une variable aléatoire entière symétrique vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$R_n := P(|X| \geq n).$$

16. On fixe $t \in ]0, 2\pi[$. Montrer successivement que
$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1}) \cos(nt)$$
puis
$$\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \left[\cos(nt) - \cos((n-1)t)\right].$$
On pourra établir au préalable la convergence de la série $\sum_n R_n \cos(nt)$.
17. Montrer qu'il existe un nombre réel $C$ tel que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int} \underset{t\to 0^+}{\to} C,$$
et en déduire que, quand $t$ tend vers $0^+$,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = O(\ln(t)) \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \frac{\pi\alpha}{2} + o(1).$$
18. Conclure que, quand $t$ tend vers $0^+$,
$$\Phi_X(t) = 1 - \frac{\pi\alpha}{2} t + o(t).$$
La fonction $\Phi_X$ est-elle dérivable en $0$ ?

**Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des variables $M_n$**

19. Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires symétriques indépendantes. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t).$$

20. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, la variable $M_n$ est symétrique et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{M_n}(t) = \left(\Phi_{X_1}(t/n)\right)^n.$$

21. En déduire que pour tout réel $t$,

$$\Phi_{M_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\to} \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right).$$

22. La convergence établie à la question précédente est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$ ?

*A partir de là, des théorèmes d'analyse de Fourier permettraient de démontrer que la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable de Cauchy de paramètre $\frac{\pi\alpha}{2}$, ce qui signifie que pour tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$,*

$$P(a \leq M_n \leq b) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\alpha}{2}\int_a^b \frac{du}{u^2 + (\pi\alpha/2)^2}.$$

## Jeudi 28 mars (3h)

**Sujet 6 (Centrale PSI 2023 maths 2)**

### Quelques applications de la formule de Stirling

Ce problème propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling et de l'appliquer à l'étude des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$.

## I Intégrale de Gauss

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale dite de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

**Q 1** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

On étudie les fonctions $f$ et $g$ définies par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

**Q 2** Montrer que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. Calculer $f(0)$.
**Q 3** Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.
**Q 4** Montrer que $g$ est définie et de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.
**Q 5** à l'aide d'un changement de variable affine, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2g'(x)g(x).$$

**Q 6** Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)^2.$$

**Q 7** En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$, puis conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

## II Formule de Stirling

Dans cette partie, on propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling. On va prouver l'existence d'une suite $\left(q_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right).$$

***II.A*** – Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$.

**Q 8** Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
**Q 9** Donner une relation entre $I_{n+1}$ et $I_n$, et en déduire que $I_n = n!$ pour tout entier naturel $n$.

***II.B*** – Cette sous-partie est consacrée à la démonstration de la formule de Stirling classique

$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n. \tag{II.1}$$

**Q 10** Si $n$ est un entier naturel non nul, déduire de la question précédente que

$$n! = \sqrt{n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}} \mathrm{d}y.$$

On note $\mathbb{1}_{[-\sqrt{n}, +\infty[}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\sqrt{n}, +\infty[$ dont on rappelle qu'elle vaut 1 sur $[-\sqrt{n}, +\infty[$ et 0 sur $]-\infty, -\sqrt{n}[$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}$, $f_n(y) = \mathbb{1}_{[-\sqrt{n}, +\infty[}(y) \left(1 + \dfrac{y}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-y\sqrt{n}}$.

**Q 11** Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et, pour $y \in \mathbb{R}$, préciser $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(y)$.

Pour $x \in ]-1, +\infty[\setminus\{0\}$ on pose $q(x) = \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}$.

**Q 12** Justifier que $q$ est prolongeable en une fonction continue sur $]-1, +\infty[$ que l'on convient de noter également $q$.

**Q 13** Démontrer que, pour tout $x > -1$, $q(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{u}{1+ux} \mathrm{d}u$.

**Q 14** En déduire que $q$ est une fonction décroissante sur $]-1, +\infty[$ et démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall y \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(y) \leq (1+y)\mathrm{e}^{-y} \qquad \text{et} \qquad \forall y \in \mathbb{R}^{-*}, \quad f_n(y) \leq \mathrm{e}^{-y^2/2}.$$

**Q 15** Déduire des questions précédentes la formule de Stirling (II.1).

***II.C*** – Pour raffiner la formule de Stirling, on introduit les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = \frac{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!} \qquad v_n = \ln(u_n) \qquad w_n = v_{n+1} - v_n.$$

**Q 16** Vérifier que $w_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{12n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et en déduire la nature de la série numérique $\sum w_n$.

**II.C.1)** Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle strictement positive, telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ et la série numérique $\sum b_n$ converge.

**Q 17** Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul $n_0$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad (1-\varepsilon)b_n \leq a_n \leq (1+\varepsilon)b_n.$$

**Q 18** En déduire que la série numérique $\sum a_n$ converge et que les restes vérifient $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$.

**II.C.2)** Si $n$ est un entier naturel non nul, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

**Q 19** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir que $\dfrac{1}{(n+1)^2} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n^2}$.

**Q 20** En déduire un équivalent simple de $R_n$ lorsque $n \to +\infty$.

**II.C.3)**

**Q 21** Déduire des questions précédentes un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} w_k$ lorsque $n \to +\infty$.

**Q 22** En déduire qu'il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right).$$

## III Étude de deux séries entières et application à une marche aléatoire

Un point se déplace sur un axe gradué. Au départ, il se trouve à l'origine et à chaque étape il se déplace suivant le résultat du lancer d'une pièce de monnaie qui n'est pas supposée équilibrée.

Le déplacement du point est formalisé de la manière suivante. Dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendantes, et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = q, \quad \text{où } p \in ]0,1[ \text{ et } q = 1 - p.$$

Les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ représentent les résultats des lancers successifs de la pièce de monnaie.

L'abscisse $S_n$ du point à l'issue du $n$-ième lancer est alors définie par :

$$\begin{cases} S_0 = 0, \\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

On admet que, si $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi alors, pour tout $n \geq 2$, quel que soit l'entier $k$ compris entre 1 et $n-1$, les variables aléatoires $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-k} Y_i$ et $\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} Y_i$ suivent la même loi.

On se propose de calculer la probabilité que le point ne revienne jamais à l'origine.

On remarque que le point ne peut revenir à l'origine (i.e. $S_k = 0$ ) qu'après un nombre pair de lancers de la pièce de monnaie (i.e. $k = 2n$ ).

On introduit alors les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) \qquad \text{et} \qquad b_n = \mathbb{P}\big([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} = 0]\big)$$

et les séries entières

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} \qquad \text{et} \qquad B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{2n}.$$

***III.A*** –

**Q 23** Quelle est la loi de la variable aléatoire $\dfrac{1}{2}(X_1+1)$ ? En utilisant une loi binomiale, calculer l'espérance et la variance de la variable $S_n$.

**Q 24** écrire une fonction Python qui prend en argument le nombre $n$ de lancers et renvoie le nombre de retours au point à l'origine.

> On pourra utiliser la fonction Python `random.random()` qui renvoie un nombre flottant pseudo-aléatoire dans l'intervalle $[0, 1[$.

**Q 25** Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = \dbinom{2n}{n} p^n q^n$.

**Q 26** En déduire le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum a_n x^{2n}$.

**Q 27** Pour quelles valeurs de $p$ l'expression $A(x)$ est-elle définie en $x = 1$ ?

**Q 28** En utilisant le développement en série entière en 0 de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ déterminer une expression de $A(x)$.

***III.B*** –

**Q 29** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en décomposant l'événement $\{S_{2n} = 0\}$ selon l'indice de 1er retour du point à l'origine, établir la relation $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}$.

**Q 30** En déduire une relation entre $A(x)$ et $B(x)$ et préciser pour quelles valeurs de $x$ elle est valable.

**Q 31** Conclure que $B(x) = 1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}$ pour $x$ dans un intervalle à préciser.

**Q 32** Pour quelles valeurs de $p$ l'expression obtenue à la question précédente pour $B(x)$ est-elle définie en $x = 1$ ? Qu'en est-il de l'expression qui définit $B(x)$ comme somme d'une série entière ?

***III.C*** –

**Q 33** En déduire que la probabilité de l'évènement « le point ne revient jamais en 0 » est égale à $|p - q|$.

## IV Loi de l'arcsinus

Dans cette partie, on reprend les notations de la partie III et on se place dans le cas particulier $p = q = 1/2$.

Dans ce cas tous les «chemins » de la marche aléatoire sont équiprobables : pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 1\}^n, \quad \mathbb{P}\big([S_1 = x_1] \cap [S_2 = x_1 + x_2] \cap \cdots \cap [S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n]\big) = \frac{1}{2^n}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on s'intéresse désormais au moment de la *dernière visite* en 0 de la marche aléatoire au cours des $2n$ premiers pas, c'est-à-dire à la variable aléatoire $T_n$ définie par

$$T_n = \max\{0 \leq k \leq 2n \mid S_k = 0\}.$$

On admet dans la suite que $T_n$ est une variable aléatoire discrète, définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si $x$ est un réel, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.

***IV.A –*** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *chemin de longueur* $n$ toute ligne polygonale reliant les points $(0, S_0)$, $(1, S_1), \dots, (n, S_n)$.

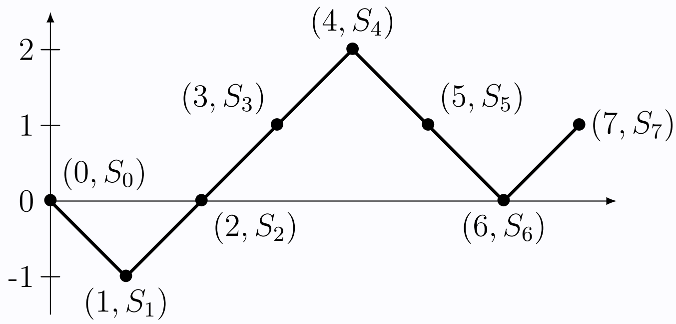



**Figure 1** Un chemin de longueur 7

Dans cette sous-partie IV.A, $n$, $x$ et $y$ sont des entiers naturels tels que $n \neq 0$, $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

**IV.A.1)** On note $N_{n,x}$ le nombre de chemins reliant le point $(0,0)$ au point $(n, x)$.

**Q 34** Vérifier que si $x \in [\![-n, n]\!]$ et $n - x$ est un entier pair alors

$$N_{n,x} = \binom{n}{a} \quad \text{où} \quad a = \frac{n+x}{2}$$

et que $N_{n,x} = 0$ dans le cas contraire.

**Q 35** En déduire $\mathbb{P}(S_n = x)$.

**Q 36** Retrouver ce résultat à l'aide d'une variable aléatoire bien choisie.

### IV.A.2) Principe de réflexion

**Q 37** Montrer que le nombre de chemins reliant $(0, x)$ à $(n, y)$, tout en passant au moins une fois par un point d'ordonnée 0 , est égal au nombre de chemins quelconques reliant $(0, -x)$ à $(n, y)$.

**IV.A.3)**

**Q 38** En utilisant le principe de réflexion, montrer que le nombre de chemins reliant $(1, 1)$ à $(n, x)$ sans jamais rencontrer l'axe des abscisses est égal à

$$N_{n-1,x-1} - N_{n-1,x+1}.$$

**Q 39** En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}\big([S_1 > 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} = 2k]\big) = \frac{1}{2}\Big(\mathbb{P}(S_{2n-1} = 2k-1) - \mathbb{P}(S_{2n-1} = 2k+1)\Big).$$

**Q 40** En remarquant que $[S_{2n} > 0] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [S_{2n} = 2k]$, démontrer que

$$\mathbb{P}\big([S_1 > 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} > 0]\big) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$$

puis que

$$\mathbb{P}\big([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} \neq 0]\big) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0).$$

***IV.B –*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

**Q 41** Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = \mathbb{P}(S_{2k} = 0) \times \mathbb{P}\big([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-2k} \neq 0]\big).$$

**Q 42** En déduire que pour $k \in [\![0, n]\!]$

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{4^n}.$$

***IV.C –*** Dans cette sous-partie IV.C $\alpha$ et $\beta$ sont deux réels tels que $0 < \alpha < \beta < 1$.

**Q 43** On définit la fonction $f$ par $f(t) = \begin{cases} f(\alpha) & \text{si } t \in [0, \alpha[ \\ \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}} & \text{si } t \in [\alpha, \beta] \\ f(\beta) & \text{si } t \in ]\beta, 1]. \end{cases}$

En utilisant des sommes de Riemann adaptées à $f$, montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \mathrm{d}t.$$

**Q 44** Á l'aide de la partie II justifier qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers 1 telle que

$$\binom{2n}{n} = \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}\left(1 - \frac{\varepsilon_n}{8n}\right).$$

**Q 45** En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} \left( \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{4^n} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \right) = 0.$$

**Q 46** Montrer alors que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) = \frac{2}{\pi}\left(\arcsin(\sqrt{\beta}) - \arcsin(\sqrt{\alpha})\right).$$

*Ce résultat a des conséquences assez surprenantes au premier abord. Par exemple* $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{T_{2n}}{2n} \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ *s'interprète ainsi : si deux personnes parient chacune un euro chaque jour de l'année à un jeu de hasard équilibré, alors avec la probabilité 1/2, un des deux joueurs sera en tête du premier juillet au 31 décembre.*

## Vendredi 29 mars (2h + 2h)

**DS8 de 8h à 10h en salle Descartes.**

Programme : Toute l'analyse.

**Sujet 7 (CCP PC 2016)**

Le but de ce problème est de donner, dans les parties I et II, quatre expressions différentes du réel $\ln(2)$ sous la forme d'une somme de série puis d'étudier, dans la partie III, la vitesse de convergence de ces quatre séries.

On rappelle que pour une série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} u_k$, le reste d'indice $n$, pour $n \in \mathbb{N}$ est le réel défini par $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

**Partie I.**

1. Rappeler, en précisant le rayon de convergence, le développement en série entière de la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $x \longmapsto \ln(1+x)$.
2. Montrer alors que $\displaystyle\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$.
3. (a) Donner le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}$.

   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$.
4. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente et que sa somme est $\ln(2)$.

**Partie II.** On considère dans la suite de ce problème, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{1\times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{n2^{n+1}n!} = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{n2^{n+1}n!}.$$

1. (a) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $a_n$ à l'aide de factorielles (sans $\prod$).

   (b) Rappeler la formule de Stirling.

   (c) Montrer que la série de terme général $a_n$ est convergente.
2. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\displaystyle I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\,dx$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad \displaystyle I_n - I_{n+1} = \frac{I_{n+1}}{2n+1}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \displaystyle I_n = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{2^n n!}\frac{\pi}{2}$, puis donner une relation liant $I_n$ et $a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n$ la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $\displaystyle f_n(x) = \frac{\sin^{2n}(x)}{n}$.

   Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ vers une fonction $f$ que l'on déterminera.

   (b) Montrer que $f$ est intégrable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\cos(x)\right)\,dx$.

4. On note $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\, dx$.
   (a) En utilisant un changement de variable, montrer que $J$ est convergente et que $I = J$.
   (b) En calculant $I + J$, trouver la valeur de $I$.
5. Donner, en le justifiant , la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

**Partie III.**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}, \quad S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \quad T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$$

$R_n$, $S_n$, $T_n$ et $V_n$ sont donc les restes d'ordre $n$ des séries vues en première et deuxième partie.

Le but de cette partie est de déterminer des équivalents des quatre suites $(R_n)$, $(S_n)$, $(T_n)$ et $(V_n)$.

On rappelle que la notation $u_n \sim v_n$ signifie que la suite $(u_n)$ est équivalente à la suite $(v_n)$ et $u_n = o(v_n)$ signifie que la suite $(u_n)$ est négligeable devant la suite $(v_n)$.

1. On note dans cette question $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $U_n = \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i}$.
   (a) Calculer $U_n$. Ecrire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2^k}$ en fonction de deux termes de la suite $(U_n)_{n\geq 0}$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad R_n = \frac{U_n}{n+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)}$.
   (c) Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)} = o(R_n)$.
   (d) Conclure que $R_n \sim \frac{1}{n2^n}$.
2. (a) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1], \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$$
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad S_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt$.
   (c) Montrer que l'on a
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\, dt.$$
   (d) Conclure que $S_n \sim \frac{(-1)^n}{2n}$.
3. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall k \geq N, \quad (1-\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{\frac{3}{2}}} \leq a_k \leq (1+\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{\frac{3}{2}}}.$$
   (b) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\quad \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}$.

(c) Déduire des questions précédentes que :

$$\forall n \geq N, \quad (1-\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{n+1}^{+\infty}\frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} \leq T_n \leq (1+\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{n}^{+\infty}\frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

(d) Conclure que $T_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

4. Montrer que $V_n \sim \dfrac{1}{n^2 2^n}$.
5. Parmi les quatre séries étudiées dans ce problème, laquelle converge le plus rapidement ? Laquelle converge le moins rapidement ? Justifiez vos réponses.

**Sujet 8 (Centrale MP 2021 Maths 2)**

# I. Inégalité polynomiale de Bernstein et applications

Dans cette partie, si $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{C}_n[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à $n$ ; si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{S}_n$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vérifiant

$$\exists\,(a_0,\ldots,a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}, \quad \exists\,(b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\right)$$

On remarque que les éléments de $\mathcal{S}_n$ sont des fonctions bornées ; si $I$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et si $f$ est une fonction bornée de $I$ dans $\mathbb{C}$, on note

$$\|f\|_{L^\infty(I)} = \sup_{x\in I}|f(x)|$$

On admet que $f \mapsto \|f\|_{L^\infty(I)}$ définit une norme sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions bornées de $I$ dans $\mathbb{C}$.

### I.A - Polynômes de Tchebychev

On définit la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $T_0 = 1, T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

1. Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, déterminer le degré de $T_n$, puis montrer que $(T_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
3. En déduire que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{C}_n[X]$, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}, \theta \mapsto P(\cos\theta)$ est dans $\mathcal{S}_n$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\|T_n\|_{L^\infty([-1,1])}$.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, \|T_n'\|_{L^\infty([-1,1])} = n^2$
   *On pourra commencer par établir que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}, |\sin(n\theta)| \leqslant n|\sin\theta|$.*

### I.B - Inégalité de Bernstein

Soit $n$ un entier naturel non nul.

6. Soit $A \in \mathbb{C}_{2n}[X]$, scindé à racines simples, et $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{2n})$ ses racines. Montrer que

$$\forall B \in \mathbb{C}_{2n-1}[X], \quad B(X) = \sum_{k=1}^{2n} B\left(\alpha_k\right)\frac{A(X)}{\left(X-\alpha_k\right)A'\left(\alpha_k\right)} \tag{I.1}$$

Soit $P$ dans $\mathbb{C}_{2n}[X]$, et, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}, P_\lambda(X) = P(\lambda X) - P(\lambda)$.

7. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, vérifier que $X-1$ divise $P_\lambda$.

Pour tout $\lambda$ dans $\mathbb{C}$, on note $Q_\lambda$ le quotient de $P_\lambda$ par $X-1$ :

$$Q_\lambda(X)=\frac{P(\lambda X)-P(\lambda)}{X-1}\in\mathbb{C}_{2n-1}[X]$$

8. Montrer que, pour tout $\lambda$ dans $\mathbb{C}, Q_\lambda(1)=\lambda P'(\lambda)$.

On considère le polynôme $R(X)=X^{2n}+1$. Pour $k$ dans $[\![1,2n]\!]$, on note $\varphi_k=\dfrac{\pi}{2n}+\dfrac{k\pi}{n}$ et $\omega_k=\mathrm{e}^{i\varphi_k}$.

9. Montrer que $R(X)=\displaystyle\prod_{k=1}^{2n}\left(X-\omega_k\right)$.
10. À l'aide de la formule (I.1), montrer que

$$\forall\lambda\in\mathbb{C},\quad Q_\lambda(X)=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{P\left(\lambda\omega_k\right)-P(\lambda)}{\omega_k-1}\frac{X^{2n}+1}{X-\omega_k}\omega_k$$

puis en déduire que

$$\forall\lambda\in\mathbb{C},\quad \lambda P'(\lambda)=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}P\left(\lambda\omega_k\right)\frac{2\omega_k}{\left(1-\omega_k\right)^2}-\frac{P(\lambda)}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{2\omega_k}{\left(1-\omega_k\right)^2}\tag{I.2}$$

11. Montrer que

$$\forall\lambda\in\mathbb{C},\quad \lambda P'(\lambda)=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}P\left(\lambda\omega_k\right)\frac{2\omega_k}{\left(1-\omega_k\right)^2}+nP(\lambda).$$

*On pourra appliquer l'égalité (I.2) au polynôme $X^{2n}$.*

Soit maintenant $f$ dans $\mathcal{S}_n$.

12. Montrer qu'il existe $U\in\mathbb{C}_{2n}[X]$ tel que, pour tout $\theta\in\mathbb{R}, f(\theta)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}U\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)$.
13. Vérifier que, pour tout $k\in[\![1,2n]\!]$, $\dfrac{2\omega_k}{\left(1-\omega_k\right)^2}=\dfrac{-1}{2\sin\left(\varphi_k/2\right)^2}$ et déduire des questions 11 et 12 que

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad f'(\theta)=\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}f\left(\theta+\varphi_k\right)\frac{(-1)^k}{2\sin\left(\varphi_k/2\right)^2}\tag{I.3}$$

14. En déduire que

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad |f'(\theta)|\leqslant n\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\tag{I.4}$$

**I.C - Quelques conséquences de l'inégalité (I.4)**

Soit $n$ un entier naturel non nul.

15. Déduire des questions 3 et 14 que

$$\forall P\in\mathbb{C}_n[X],\quad \forall x\in[-1,1],\quad \left|P'(x)\sqrt{1-x^2}\right|\leqslant n\|P\|_{L^\infty((-1,1))}$$

16. Montrer que

$$\forall Q\in\mathbb{C}_{n-1}[X],\quad |Q(1)|\leqslant n\sup_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left|Q(x)\sqrt{1-x^2}\right|$$

*On pourra considérer $f:\theta\mapsto Q(\cos\theta)\sin\theta$ et vérifier que $f\in\mathcal{S}_n$.*

17. Soit $R\in\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $t\in[-1,1]$. Montrer que

$$|R(t)|\leqslant n\sup_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left|R(x)\sqrt{1-x^2}\right|.$$

*On pourra considérer le polynôme $S_t(X)=R(tX)$.*

18. En déduire que, pour tout $P$ dans $\mathbb{C}_n[X]$, on a $|P'\|_{L^\infty([-1,1])}\leq n^2\|P\|_{L^\infty([-1,1])}$.
19. Peut-il y a voir égalité dans l'inégalité précédente ?

# Mardi 02 avril (2h+1h)

## Sujet 9 (Compilation autour des matrices stochastiques)

Dans ce problème, $n$ désigne un entier supérieur ou égal à 2, et $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
• $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices à $n$ lignes et $m$ colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$. $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est plus simplement noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On identifie un élément de $x \in \mathbb{K}^n$ à une matrice colonne et si $x = (x_1, \ldots, x_n)$, on note

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

Soit $A = [a_{i,j}]_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que $A$ est **stochastique** si elle vérifie les propriétés suivantes.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de $A$ et on note

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$$

Cette quantité s'appelle le rayon spectral de $A$.

Si $X$ est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, on identifie la loi $P_X$ de $X$ au vecteur colonne $\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X = x_1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X = x_n) \end{pmatrix}$.

(1) $\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \quad a_{i,j} \in \mathbb{R}^+$

(2) $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On « rappelle » qu'une suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ converge vers $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si chacune des $n^2$ suites complexes définies par les coefficients de $A_p$ converge vers les coefficients respectifs de $B$.

On montrerait aussi que si $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(A'_p)_{p \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de matrices convergeant respectivement vers $B$ et $B'$ alors les suites $(A_p + A'_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(A_p A'_p)_{p \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $B + B'$ et $BB'$.

### Préliminaire :

Soit $A = [a_{i,j}]_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ le vecteur colonne dont tous les coefficients valent 1.

1. Démontrer l'équivalence suivante.

$$AX = X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

2. En déduire que si $A \in \mathcal{S}_n$ alors 1 est valeur propre de $A$.
3. Déduire aussi de la première question que $\mathcal{S}_n$ est stable par le produit matriciel.
4. Montrer aussi que si $A_1, A_2 \in \mathcal{S}_n$ et si $\lambda_1, \lambda_2$ sont des réels positifs vérifiant $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, alors $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ est dans $\mathcal{S}_n$.

## Partie I : exemples en dimensions 2 et 3

1. Cas où $n = 2$ : Soit $A \in \mathcal{S}_2$.

   (a) Justifier qu'il existe des réels $a, b \in [0,1]$ tels que $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$.

   (b) Calculer $A^p$ dans le cas où $(a,b) = (1,1)$, puis dans le cas où $(a,b) = (0,0)$.

   (c) On suppose désormais que $(a,b) \neq (1,1)$ et que $(a,b) \neq (0,0)$.

      i. On pose $P(X) = (X-1)(X-(a+b-1))$. Calculer $P(A)$.

      ii. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^p$ par $P$.

      iii. En déduire l'expression de $A^p$ en fonction de $a, b$ et $p$.

      iv. Montrer que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice que l'on précisera.

2. Un exemple où $n = 3$ : Soit $\alpha \in [0,1[$. On définit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}$.

   (a) Vérifier que $M$ est une matrice stochastique.

   (b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $M$.
   La matrice $M$ est-elle diagonalisable ?

   (c) Démontrer que $\mathrm{Ker}(M - I_3)$ et $\mathrm{Im}(M - I_3)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^3$.

   (d) On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$. Déterminer la matrice dans cette base, de la projection sur $\mathrm{Ker}(M - I_3)$ dans la direction de $\mathrm{Im}(M - I_3)$.

   (e) Déterminer une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP = T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

   (f) Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer $T^p$ et montrer que la suite $(T^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge.

   (g) En déduire que la suite $(M^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice que l'on précisera.

## Partie II : exemples de matrices stochastiques symétriques

1. Un exemple où $n = 3$ : On considère $E$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ de la forme

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \qquad (a,b) \in \mathbb{C}^2$$

   On définit également $U = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = I_3 - U$.

   (a) Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont on précisera une base et la dimension.

   (b) Démontrer que $(U, V)$ est une base de $E$ et déterminer les coordonnées de $M(a,b)$ dans cette base.

   (c) Calculer $U^2$, $V^2$, $UV$ et $VU$.

   (d) En déduire l'expression de $M(a,b)^p$ en fonction de $p, U$ et $V$.

   (e) A quelles conditions portant sur $a$ et $b$ la matrice $M(a,b)$ appartient-elle à $\mathcal{S}_3$ ?

   (f) On suppose cette condition vérifiée.
   Montrer que la suite $(M(a,b)^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice que l'on précisera.

2. Soit $n \geq 3$ un entier.

On considère ici la matrice de $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & 0 & \frac{1}{n-1} & & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{n-1} & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer un réel $a_n$ différent de 1 tel que $N - a_n I_n$ ne soit pas inversible.
Quelle est alors la dimension de $\mathrm{Ker}(N - a_n I_n)$ ?

(b) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(N - I_n)$.

(c) Déduire des questions précédentes les valeurs propres et les sous-espaces propres de $N$.
La matrice $N$ est-elle diagonalisable ?

(d) Démontrer que $\mathrm{Im}(N - I_n) = \mathrm{Ker}(N - a_n I_n)$ et en préciser une équation cartésienne.

(e) On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Déterminer la matrice $J$ dans cette base, de la projection sur $\mathrm{Ker}(N - I_n)$ dans la direction de $\mathrm{Im}(N - I_n)$, puis la matrice $K$ dans cette base, de la projection sur $\mathrm{Im}(N - I_n)$ dans la direction de $\mathrm{Ker}(N - I_n)$.

(f) Exprimer $N$ en fonction de $n, J$ et $K$, en déduire $N^p$ en fonction de $p, n, J$ et $K$.

(g) Montrer que la suite $(N^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice que l'on précisera.

## Partie III : étude du cas général

Dans cette partie, on munit $\mathbb{C}^n$ de la norme suivante.

$$\forall X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n, \qquad \|X\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}.$$

**Dans tout la suite du problème, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne une matrice stochastique.**

1. Etude des éléments propres de $A$ :

(a) Montrer que pour tout $X \in \mathbb{C}^n$, on a $\|AX\| \leq \|X\|$.
En déduire que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $A$, alors $|\lambda| \leq 1$.

(b) Soit $Y$ un élément de $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ pour lequel il existe $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $Y = AX - X$.

i. Pour $p \in \mathbb{N}$, exprimer $A^p X$ en fonction de $p, X$ et $Y$.

ii. Montrer alors que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $p\|Y\| \leq 2\|X\|$ et en déduire que $Y$ est nul.

(c) Déduire des questions précédentes que $\mathrm{Ker}(A - I_n) \oplus \mathrm{Im}(A - I_n) = \mathbb{C}^n$.

(d) Etablir que tout sous-espace propre associé à une valeur propre différente de 1 est inclus dans $\mathrm{Im}(A - I_n)$.

2. Etude de la convergence de la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ :

(a) On suppose, dans cette question, que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $B$.

i. Démontrer que $B^2 = B$.

ii. Démontrer que $A$ n'admet pas de valeur propre de module 1 autre que 1.

(b) On suppose désormais que $A$ est diagonalisable.

i. Montrer que la somme directe des sous-espaces propres associés au valeurs propres distinctes de 1 est égale à $\mathrm{Im}(A - I_n)$.

ii. Montrer que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si 1 est la seule valeur propre de $A$ dont le module est égal à 1.

iii. On suppose que cette condition est vérifiée et on note $B$ la limite de la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$.
Donner la nature géométrique de $B$ et déterminer ses éléments caractéristiques.

La suite est un extrait de CCINP PSI. Certaines questions ont déjà été posées, parfois sous une forme différente. Plusieurs questions apparaissent dans des sujets Centrale.

## IV - Spectre des matrices stochastiques

Dans cette partie, les matrices considérées sont carrées d'ordre $n \geq 2$. On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique (respectivement strictement stochastique) si et seulement si elle est à coefficients positifs (respectivement strictement positifs) et

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

**Coefficients**

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique (respectivement strictement stochastique). Montrer que pours tous $i, j$ compris entre 1 et $n$ on a

$$0 \leq a_{i,j} \leq 1 \ \ \text{(respectivement } 0 < a_{i,j} < 1\text{)}$$

2. Montrer qu'une matrice $A$ à coefficients réels positifs est stochastique si et seulement si 1 est valeur propre de $A$ et le vecteur $e$ de coordonnées $(1, \ldots, 1)$ est un vecteur propre associé.
3. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques (respectivement strictement stochastiques) est une matrice stochastique (respectivement strictement stochastique).

**Valeurs propres**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.

1. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{C}^n,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \|A^p x\|_\infty \leq \|x\|_\infty$$

2. Montrer que $\rho(A) = 1$.

**Diagonale strictement dominante**

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite à diagonale strictement dominante si et seulement si

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ quelconque et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A$. Montrer qu'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que

$$|\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

2. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante est inversible.

**Valeur propre de module maximal**

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique.

1. On désigne par $A_1 = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ la matrice extraite de $A$ en supprimant sa dernière ligne et sa dernière colonne. Montrer que la matrice $A_1 - I_{n-1}$ est à diagonale strictement dominante. Que peut-on en déduire quant au rang de $A - I_n$ ?
2. Montrer que $\ker(A - I_n)$ est de dimension 1.
3. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{1\}$. Montrer que $|\lambda| < 1$.

## V - Probabilité invariante

On considère quatre points dans le plan numérotés de 1 à 4. Une particule se déplace chaque seconde sur l'ensemble de ces points de lafaçon suivante : si elle se trouve au point $i$, elle y reste avec une probabilité égale à $1/10$ ou passe en un point $j \neq i$ de façon équiprobable.

**Une suite de variables aléatoires**

On note $X_0$ une variable aléatoire de loi $P_0$ donnant la position $X_0$ en l'instant $n = 0$, $X_n$ la position du point à l'instant $n$ et $P_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = 4) \end{pmatrix}$ la loi de $X_n$.

1. Montrer qu'il existe une matrice $Q$, que l'on déterminera, telle que

$$P_1 = QP_0$$

   calculer $P_n$ en fonction de $Q$ et $P_0$.
2. Montrer qu'il existe un unique vecteur $\Pi = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$, que l'on déterminera, tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, 4\},\ p_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{4} p_i = 1,\ \Pi = Q\Pi$$

**Rapidité de convergence**

1. Montrer sans calcul que $Q$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $Q$.
3. En déduire que $(Q_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $R$ que l'on précisera en fonction de $\Pi$ et qu'il existe $r \in ]0, 1[$ tel que

$$\|Q^p - R\| = O(r^p)$$

   où $\|.\|$ est une norme quelconque sur $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
   En déduire que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite indépendante de la loi de $X_0$ et interpréter le résultat obtenu.

## VI - Puissances d'une matrice stochastique

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique. On note

$$m = \min_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}$$

Pour tout entier naturel non nul $p$, on note $a_{i,j}^{(p)}$ le coefficient d'indice $(i, j)$ de $A^p$ :

$$A^p = (a_{i,j}^{(p)})_{1\leq i,j\leq p}$$

Enfin, pour tout entier $j$ compris entre 1 et $n$, on note

$$m_j^{(p)} = \min_{1\leq k\leq n} a_{k,j}^{(p)},\ M_j^{(p)} = \max_{1\leq k\leq n} a_{k,j}^{(p)}$$

1. **Encadrement**
   Montrer que, pour tout entier naturel non nul $p$ et tout entier $j$ compris entre 1 et $n$, on a :

$$0 < m_j^{(p)} \leq m_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p)}$$

2. **Minoration**
   Montrer que, pour tout entier naturel non nul $p$ et tout entier $j$ compris entre 1 et $n$, on a :

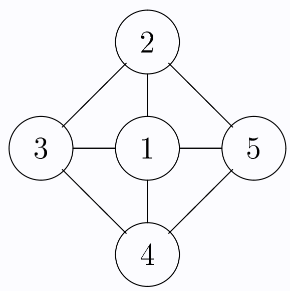
$$m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} \geq m(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}) \ \text{ et }\ M_j^{(p)} - M_j^{(p+1)} \geq m(M_j^{(p)} - m_j^{(p)})$$

3. **Majoration**
   Montrer que, pour tout entier naturel non nul $p$ et tout entier $j$ compris entre 1 et $n$, on a :
$$M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} \leq (1-2m)(M_j^{(p)} - m_j^{(p)})$$
4. **Convergence de ces suites**
   En déduire que, pour tout $j$ entre 1 et $n$, les suites $(m_j^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(M_j^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
5. **Conclusion**
   En déduire que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $L$ stochatique dont toutes les lignes sont identiques.

## Mercredi 3 avril (2h)

### Sujet 10 (Mines-Ponts PC 2017 maths 1)

Un labyrinthe est constitué de cinq salles, numérotées de 1 à 5, qui communiquent par des tubes selon le schéma ci-dessous :




Un rat se déplace dans ce labyrinthe, et on relève sa position en des instants numérotés $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ ($k \in \mathbb{N}$). On admet que, si le rat se trouve à l'instant $k$ ($k \in \mathbb{N}$) dans la salle numéro $i$ ($1 \leqslant i \leqslant 5$), alors il empruntera aléatoirement l'un des tubes de la salle $i$ et se trouvera donc, à l'instant $k+1$, avec équiprobabilité, dans l'une quelconque des salles communiquant avec la salle $i$. On admet que l'on peut introduire, pour tout $k$ entier naturel, une variable aléatoire $S_k$ donnant le numéro de la salle où se trouve le rat à l'instant $k$. À titre d'exemple, on aura donc

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(S_{k+1} = 1 | S_k = 2) = \mathbb{P}(S_{k+1} = 3 | S_k = 2) = \mathbb{P}(S_{k+1} = 5 | S_k = 2) = \frac{1}{3}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on introduit la matrice-colonne

$$X_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(S_k = 1) \\ \mathbb{P}(S_k = 2) \\ \mathbb{P}(S_k = 3) \\ \mathbb{P}(S_k = 4) \\ \mathbb{P}(S_k = 5) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R}).$$

Pour une matrice $B$, $B^T$ représente sa matrice transposée.

## 1 - Premiers pas

1. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $\mathbb{P}(S_{k+1} = 1)$ s'écrit comme une combinaison linéaire des $(\mathbb{P}(S_k = i),\ i = 1, \ldots, 5)$.
2. Expliciter la matrice carrée $B \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $X_{k+1} = BX_k$ pour tout $k$ entier naturel.
3. En observant les colonnes de la matrice $B$, montrer que le réel 1 est valeur propre de $B^T$ et expliciter un vecteur propre associé.

On suppose que la loi de la variable $S_0$ est donnée par

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

4. Montrer qu'alors les variables aléatoires $S_k$ ont toutes la même loi.
5. Est-ce que $S_0$ et $S_1$ sont indépendantes ?

## 2 - Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $u$ un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme $\|.\|$ sur $E$ telle que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Pour tout entier naturel $k$ non nul, on considère l'endomorphisme

$$r_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} u^l = \frac{1}{k}(I_E + u + u^2 + \cdots + u^{k-1}),$$

où $I_E$ représente l'endomorphisme identité de $E$.

6. Soit $x \in \ker(u - I_E)$. Déterminer $\lim_{k\to+\infty} r_k(x)$.
7. Soit $x \in \operatorname{Im}(u - I_E)$. Montrer que $\lim_{k\to+\infty} r_k(x) = 0_E$.
8. En déduire que $E = \ker(u - I_E) \oplus \operatorname{Im}(u - I_E)$.
9. Soit $x \in E$, un vecteur quelconque. Montrer que la suite $(r_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un vecteur de $E$, que l'on notera $p(x)$. Interpréter géométriquement l'application $p : E \to E$ ainsi définie.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre $n$ à coefficients réels. On suppose qu'il existe une norme, aussi notée $\|\cdot\|$, sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^n$, telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on ait $\|AX\| \leqslant \|X\|$. Pour tout $k$ entier naturel non nul, on considère la matrice

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l = \frac{1}{k}(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}), \tag{2}$$

où $I_n$ est la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

10. Montrer que la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice $P$, telle que $P^2 = P$.

## 3 - Matrices stochastiques

On fixe dans cette partie un entier $n \geqslant 2$.

**Définition 1** *On notera $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.*

**Définition 2** *Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite* **stochastique** *si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \geqslant 0\ ; \tag{3}$$

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1. \tag{4}$$

*Nous dirons aussi qu'une matrice-ligne $L = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients $\lambda_i$ sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à 1.*

11. Vérifier que la condition (4) équivaut à la condition $AU = U$.
12. En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices stochastiques (carrées d'ordre $n$) est stable pour le produit matriciel.
13. Montrer que cet ensemble $\mathcal{E}$ est une partie fermée et convexe de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|X\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$ si $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

14. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique, alors on a $\|AX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Dans les questions 15 à 22, on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique, et on suppose qu'il existe un entier naturel non nul $p$ tel que la matrice $A^p$ ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout $k$ entier naturel non nul, on posera

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l.$$

15. Montrer que $\ker(A^p - I_n)$ est de dimension 1.
*Indication : soit $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \ker(A^p - I_n)$, soit $s \in [\![1, n]\!]$ un indice tel que $x_s = \max_{1\leqslant j\leqslant n} x_j$, on montrera que $x_j = x_s$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.*
16. En déduire que $\ker(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$.
17. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice $R_k$ est stochastique.
18. Montrer que la suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice $P$, stochastique, de rang 1.
19. En déduire que l'on peut écrire $P = UL$, où $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une matrice-ligne stochastique.
20. Montrer que $PA = P$. En déduire que $L$ est la seule matrice-ligne stochastique vérifiant $LA = L$.
21. Montrer que les coefficients de la matrice ligne $L$ sont tous strictement positifs.
22. Montrer que le réel 1 est valeur propre simple de $A$. *On pourra utiliser le résultat de la question 8.*

## 4 - Application au labyrinthe

On approfondit l'étude commencée dans la partie I en exploitant les résultats de la partie III.

On pose $A = B^T$ où $B$ est la matrice construite dans la partie I.

Un calcul, qui n'est pas demandé, montre que les coefficients de la matrice $A^2$ sont tous strictement positifs.

23. Expliciter la limite $P$ de la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie en (2).
24. Montrer qu'il existe une unique loi de probabilité sur l'ensemble $[\![1, 5]\!]$ telle que, si la variable aléatoire $S_0$ suit cette loi, alors les variables $S_k$ suivent toutes la même loi (autrement dit, telle que la probabilité de présence du rat dans une salle soit la même à tous les instants $k$, $k \in \mathbb{N}$).

# Jeudi 4 avril (3h)

## Sujet 11 (CCP PC 2004)

### Notations

Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \cdots, n\}$. Si $n$ et $p$ sont des entiers supérieurs ou égaux à 1, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ ayant $n$ lignes et $p$ colonnes. Lorsque $p = n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et est muni de sa structure d'algèbre, $I_n$ représentant la matrice identité. $GL_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $A^T$ désigne la matrice transposée de $A$ : c'est un élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $\ker(A)$ est le noyau de $A$ défini par : $\ker(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \quad AX = 0\}$ et $\mathrm{Im}(A)$ est l'image de $A$ définie par : $\mathrm{Im}(A) = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), Y = AX\}$.

$\mathbb{R}$ est muni de son produit scalaire canonique noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la norme associée notée $\|\cdot\|$ et on identifiera selon l'usage $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$.
Une matrice $S$ de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T S X \geq 0$$

et définie positive si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, X^T S X > 0.$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles positives d'ordre $n$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives d'ordre $n$.

## PARTIE I

1. (a) Soit $M$ la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

i. Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels $\ker(M)$ et $\ker\left(M^T\right)$. Existe-t-il une relation d'inclusion entre les noyaux $\ker(M)$ et $\ker\left(M^T\right)$ ?

ii. Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(M)$ et $\mathrm{Im}\left(M^T\right)$. Existe-t-il une relation d'inclusion entre les images $\mathrm{Im}(M)$ et $\mathrm{Im}\left(M^T\right)$ ?

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

i. Montrer que $\ker\left(A^T A\right) = \ker(A)$ et $\ker\left(AA^T\right) = \ker(A^T)$.

ii. Montrer que $\mathrm{rg}\left(A^T A\right) = \mathrm{rg}\left(AA^T\right) = \mathrm{rg}(A)$.

iii. Montrer que $\mathrm{Im}\left(A^T A\right) = \mathrm{Im}(A^T)$ et $\mathrm{Im}\left(AA^T\right) = \mathrm{Im}(A)$.

(c) Soit $q$ un entier naturel non nul et $\mathcal{S} = (x_1, x_2, \cdots, x_q)$ un système de $q$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
On note $F$ le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{S}$, $r = \dim F$ et $G = (g_{i,j})$ la matrice de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ définie par $g_{i,j} = \langle x_i, x_j\rangle$ pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}_q^2$. Le déterminant de $G$ est appelé déterminant de *Gram* du système $\mathcal{S}$ et sera noté $\gamma(x_1, x_2, \cdots, x_q)$. Soit $(e_1, e_2, \cdots, e_r)$ une base orthonormale de $F$, on note pour tout $j$ de $\mathbb{N}_q$, $x_j = \sum_{i=1}^{r} b_{i,j} e_i$ et $B$ la matrice de $\mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{R})$ de terme général $b_{i,j}$.

i. Montrer que $G = B^T B$ et en déduire $\mathrm{rg}(G) = \mathrm{rg}(\mathcal{S})$.

ii. Montrer que $G$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes positives.

iii. En déduire que $\gamma(x_1, x_2, \cdots, x_q) \geq 0$ et que $\gamma(x_1, x_2, \cdots, x_q) = 0$ si et seulement si la famille $(x_1, x_2, \cdots, x_q)$ est liée.

iv. Montrer que l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec sa condition nécessaire et suffisante d'égalité est un cas particulier de ce résultat.

(d) Montrer que $\gamma(x_1, x_2, \cdots, x_q)$ reste invariant si l'on ajoute à l'un des vecteurs $x_i$ une combinaison linéaire des autres.

(e) Dans cette question $q$ est supérieur ou égal à 2.

i. On note $L$ le sous-espace vectoriel engendré par $(x_2, x_3, \cdots, x_q)$ et $p_L(x_1)$ la projection orthogonale de $x_1$ sur $L$, puis on pose $h_1 = x_1 - p_L(x_1)$. Montrer que :

$$\gamma(x_1, x_2, \cdots, x_q) = \|h_1\|^2 \gamma(x_2, \cdots, x_q).$$

ii. En déduire successivement :

A. $\gamma(x_1, x_2, \cdots, x_q) \leq \gamma(x_1)\gamma(x_2, x_3, \cdots, x_q)$ avec égalité si et seulement si $x_1$ est orthogonal à $L$.

B. $\gamma(x_1, x_2, \cdots, x_q) \leq \gamma(x_1)\gamma(x_2)\cdots\gamma(x_q)$ avec égalité si et seulement si les vecteurs $x_1$, $x_2$, ..., $x_q$ sont deux à deux orthogonaux.

(f) Soit $A = (a_{i,j}) \in GL_n(\mathbb{R})$ et $c_1$, $c_2$, …, $c_n$ ses vecteurs colonnes.

i. Montrer que :

$$|\det A| \leq \prod_{k=1}^{n} \|c_k\|$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs $c_1$, …, $c_n$ sont deux à deux orthogonaux.

ii. On suppose de plus : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, |a_{i,j}| \leq 1$. Montrer que :

$$|\det A| \leq n^{\frac{n}{2}}$$

avec égalité si et seulement si $A$ est une matrice à coefficients dans $\{-1,+1\}$ et dont les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux.

## PARTIE II

2. On note :

— $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients dans $\{-1,+1\}$ dont les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux.

— $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre $n$ à coefficients diagonaux dans $\{-1,+1\}$.

— $E$ l'ensemble des entiers naturels $n$ pour lesquels $\mathcal{H}_n$ est non vide.

(a) Déterminer explicitement toutes les matrices éléments de $\mathcal{H}_2$.

(b) i. Montrer que toute matrice $A$ de $\mathcal{H}_n$ vérifie $A^T A = nI_n$.

ii. Réciproquement toute matrice carrée $A$ vérifiant $A^T A = nI_n$ est-elle dans $\mathcal{H}_n$ ?

iii. Montrer que si $A$ est à coefficients dans $\{-1,+1\}$ et vérifie $A^T A = nI_n$, alors $A$ est dans $\mathcal{H}_n$.

(c) On appelle permutation $\sigma$ de $\mathbb{N}_n$ toute bijection de $\mathbb{N}_n$ sur lui-même et matrice de permutation $P^{(\sigma)}$ associée à la permutation $\sigma$, la matrice d'éléments $P_{i,j}^{(\sigma)}$ donnés par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, P_{i,j}^{(\sigma)} = \delta_{i,\sigma(j)}$$

où $\delta_{k,l}$ désigne le symbole de Kronecker : $\delta_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = l \\ 0 & \text{si} \quad k \neq l \end{cases}$

Soit $\sigma$ une permutation de $\mathbb{N}_n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

i. Donner le terme général de la matrice ${P^{(\sigma)}}^T A$. Comment obtient-on cette matrice ${P^{(\sigma)}}^T A$ à partir de $A$ ?

ii. Donner le terme général de la matrice $AP^{(\sigma)}$. Comment obtient-on cette matrice $AP^{(\sigma)}$ à partir de $A$ ?

iii. Montrer que si $A$ appartient à $\mathcal{H}_n$, il en est de même de $A^T$, des matrices ${P^{(\sigma)}}^T A$ et $AP^{(\sigma)}$ pour toute permutation $\sigma$ ainsi que des matrices $A\Delta$ et $\Delta A$ pour toute matrice $\Delta$ de $\mathcal{D}_n$.

(d) Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit le produit direct de $A$ et $B$ par :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

i. Montrer que si $A \in \mathcal{H}_2$ et $B \in \mathcal{H}_n$, alors $A \otimes B \in \mathcal{H}_{2n}$.

ii. En déduire que $E$ contient toutes les puissances de 2.

iii. Montrer que l'ensemble $\{A \otimes B \quad (A,B) \in \mathcal{H}_2 \times \mathcal{H}_2\}$ est strictement inclus dans $\mathcal{H}_4$.

(e) Soit $n \in E$, $n > 2$.

i. Montrer qu'il existe un élément de $\mathcal{H}_n$ dont tous les coefficients de la première colonne valent 1. Déduire alors de l'orthogonalité des vecteurs colonnes 1 et 2 d'une telle matrice que $n$ est pair. On pose $n = 2m$.

ii. Montrer qu'il existe un élément de $\mathcal{H}_n$ dont tous les coefficients de la première colonne valent 1 et dont la deuxième colonne est constituée de $m$ coefficients égaux à 1 suivis de $m$ coefficients égaux à $-1$. Déduire alors de l'orthogonalité du troisième vecteur colonne avec les vecteurs colonnes 1 et 2 que $n$ est un multiple de 4.

## PARTIE III

3. (a) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

   (b) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. On souhaite montrer l'existence de $R$ orthogonale et $S$ symétrique définie positive telle que $M = RS$.

   i. Montrer que la matrice $M^T M$ est symétrique définie positive.

   ii. En déduire qu'il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M^T M = S^2$.

   iii. Montrer que $S$ est inversible et que $MS^{-1}$ est orthogonale.

   iv. Conclure. Dans toute la suite du problème on admettra l'unicité d'une telle factorisation.

   (c) Soit $\Sigma \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres non nécessairement distinctes, $D$ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

   i. Montrer que $\operatorname{tr}(\Sigma) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

   ii. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $Q_1$ telle que $\operatorname{tr}(Q\Sigma) = \operatorname{tr}(Q_1 D)$ et en déduire :
   $$\operatorname{tr}(Q\Sigma) \leq \operatorname{tr}(\Sigma).$$

   iii. Montrer que $\sup_{Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} |\operatorname{tr}(Q\Sigma)| = \operatorname{tr}(\Sigma)$.

   (d) Soit $n \in E$. Pour toute matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{H}_n$, on pose :
   $$f(A) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=i}^{n} a_{i,j} \right).$$

   i. Montrer que l'application $f$ ainsi définie de $\mathcal{H}_n$ dans $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure que l'on notera $\alpha_n$.

   ii. Soit $T = (t_{i,j})$ la matrice triangulaire inférieure d'ordre $n$ définie par $t_{i,j} = 1$ si $i \geq j$ et $t_{i,j} = 0$ si $i < j$. Montrer que $f(A) = \operatorname{tr}(AT)$.

   iii. D'après la question **III.2**, on sait que $T = RS$ avec $R$ orthogonale et $S$ symétrique définie positive. Montrer alors que $f(A) \leq \sqrt{n}\operatorname{tr}(S)$, puis que $\alpha_n \leq \sqrt{n}\operatorname{tr}(S)$.

   iv. Lorsque $n = 2$, évaluer $\alpha_2$ et $\sqrt{2}\operatorname{tr}(S)$.

## Vendredi 5 avril (2h)

### Sujet 12 (CCINP PSI 2023 Problème 1)

On considère une particule se déplaçant sur une droite graduée par les entiers relatifs. Sa position à l'instant initial $t = 0$ est $k = 0$. Á chaque instant $t \in \mathbb{N}^*$, elle se déplace aléatoirement de sa position $k \in \mathbb{Z}$ à la position $k+1$ ou $k-1$.

Soit $p \in ]0,1[$. On définit sur un espace probabilisé $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ u $(X_t)_{t\in\mathbb{N}^*}$ et identiquement distribuées dont la loi est définie par :
$$\forall t \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X_t = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_t = -1) = 1 - p.$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{t=1}^{n} X_t$.

Pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $X_t$ modélise le déplacement de la particule à l'instant $t$.

Si $X_t = 1$, la particule se déplace vers la droite. Si $X_t = -1$, la particule se déplace vers la gauche. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n$ modélise la position de la particule après $n$ déplacements.

On rappelle la formule de Stirling : $n! \sim_{n\to+\infty} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

## Partie I - Un développement en série entière

**Q9 -** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \notin \mathbb{N}$. Donner sans démonstration un développement en série entière de la fonction réelle $x \mapsto (1+x)^\alpha$ au voisinage de 0 en précisant son rayon de convergence.

**Q10 -** En déduire que pour tout $x \in ]-1;1[$ :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n.$$

## Partie II - Probabilité de retour à l'origine

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \mathbb{P}(S_n = 0).$$

**Q11 -** Pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X_t+1}{2}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

**Q12 -** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$u_n = \begin{cases} \dbinom{n}{\frac{n}{2}} \big(p(1-p)\big)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Q13 -** Déterminer la limite de la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ selon les valeurs de $p$ et interpréter le résultat.

## Partie III - Nombre de passages par l'origine

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note $O_{2j}$ la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = 2j$, 0 sinon. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} O_{2j}$. On note $\mathbb{E}(T_n)$ l'espérance de la variable aléatoire $T_n$.

Dans cette partie, on souhaite déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

**Q14 -** Soit $n \in \mathbb{N}$. Que modélise la variable aléatoire $T_n$ ?

**Q15 -** Soit $j \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $O_{2j}$. En déduire que :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j} \big(p(1-p)\big)^j.$$

**Q16 -** On suppose dans cette question que $p \neq \dfrac{1}{2}$. En utilisant le résultat de la **Q10**, calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n)$ et interpréter le résultat.

**Q17 -** On suppose dans cette question que $p = \dfrac{1}{2}$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

et en déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n)$.