PSI 2023-2024
Lycée Châtelet

Exercices de Mathématiques

PSI

Volume 3

S. Dion

Table des matières

Feuille 16

Espaces préhilbertiens réels

Extraits de rapports de jury :

- **Oral CCP PSI 2019 :** Les exercices d'algèbre euclidienne posent de grosses difficultés à une majorité de candidats. Ils parviennent dans l'ensemble à démontrer que la forme bilinéaire fournie est un produit scalaire mais les calculs de distance à un sous-espace vectoriel ne sont que très rarement traités. Les candidats semblent également éprouver des difficultés à développer une vision géométrique de ce type de question.
- **Oral CCINP MP 2021 :** Confusion entre $A^\perp = B$ et $A \perp B$.
  $A \perp B$ implique juste que $B \subset A^\perp$ (et que $A \subset B^\perp$).
- **Oral CCINP PSI 2022 :** Le procédé de Gram Schmidt est souvent méconnu bien que classiquement attendu. En revanche, les questions relevant d'une distance à un sous-espace ou d'une projection orthogonale posent problème à une majorité de candidats. Les notions de projeté orthogonal et de distance à un sous-espace vectoriel sont méconnues.

  Peu de candidats utilisent une approche géométrique comme support à leur intuition, alors que c'est souvent éclairant, en particulier en dimension 2 ou 3. Le conseil parfois donné d'illustrer la situation par une figure est trop souvent source de confusion alors qu'il a pour but d'aider.

- **Oral Mines-Telecom PSI 2022 :** En algèbre bilinéaire, le calcul d'une distance à un sous-espace vectoriel s'avère très difficile (voir infaisable) à mettre en œuvre lorsque l'on est déjà incapable de reconnaître que l'on est en présence d'un problème de ce type !

  La géométrie a quasiment disparu des programmes de MP, PC et PSI et pour les candidats de ces séries elle a complètement disparu, au point que certains sont incapables de déterminer une équation de droite.
- **Oral Mines-Ponts PSI 2018 :** En algèbre bilinéaire, il peut être intéressant de calculer la norme d'un vecteur pour montrer qu'il est nul.
- **Oral Mines-Ponts PSI 2019 :** En algèbre bilinéaire, les candidats reconnaissent en général les situations de calcul d'un minimum à l'aide d'une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie (notamment les hyperplans). Néanmoins lorsqu'il ne s'agit pas d'hyperplans pour le calcul effectif de la distance, les candidats privilégient plutôt l'utilisation de l'orthonormalisation de Schmidt plutôt que l'écriture du système caractérisant le projeté orthogonal, ce qui se révèle souvent plus lourd.
- **Oral Mines-Ponts PSI 2021 :** dans le cas d'un calcul de distance $d(x, F)$ où F est un hyperplan, il est souvent bien plus aisé que déterminer $\|P_{\mathcal{F}^\perp}(x)\|$ que $\|x - P_{\mathcal{F}}(x)\|$. À noter que les questions de minimisation font trop peu souvent penser à une distance à un sous-espace vectoriel pour une norme euclidienne et que, dans ce cadre, le recours à une projection orthogonale est judicieux.
- **Oral Centrale PSI 2018 :** L'algorithme de Gram-Schmidt est souvent mal maitrisé que ce soit pour en expliquer les différentes étapes ou pour l'implémenter. Voici un point sur lequel les candidats devraient plus s'entrainer d'autant plus que cet algorithme figure dans le programme de mathématiques de la filière.
- **Oral Centrale PSI 2022 :** Dans le chapitre sur les espaces euclidiens, il faut avoir compris l'efficacité des bases orthonormées, en particulier pour écrire des coordonnées ou des matrices. Il faut savoir écrire les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée.

Exercice 1 (❄)

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1])$. Pour tout f, g dans E, on pose

$$\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

Exercice 2 (❄)

A quelle condition portant sur $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, l'application φ est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$?

$$\varphi : \Big((x,y),(x',y')\Big) \longmapsto axx' + bxy' + cx'y + dyy'.$$

Exercice 3 (❄)

Montrer que l'application φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

$$\varphi : \ (P,Q) \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} P(n)Q(n)e^{-n}.$$

On justifiera l'existence de la somme.

Exercice 4 (❄)

Démontrer que pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ on a

$$|x_1 + 2x_2 + \cdots + 2^{n-1}x_n| \leq \frac{2^n}{\sqrt{3}}\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Exercice 5 (❄)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ on a

$$|a_1| + \cdots + |a_n| \leq \sqrt{n}\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}.$$

Dans quel cas y a-t-il égalité ?

Exercice 6 (Mines-Ponts PC 2018 - ❄)

Soient $x_1,\dots,x_n$ des réels strictement positifs tels que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1.$$

Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$.

Préciser le cas d'égalité.

Exercice 7 (❄)

Soit E est un espace préhilbertien réel, montrer que

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad ||x|| + ||y|| \leq \sqrt{2}\sup\Big(||x+y||, ||x-y||\Big).$$

Quand a-t-on égalité ?

Exercice 8 (CCP PSI 2014 - ❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $N(A) = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tA.A)}$.

Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{tr}(A) \leq \sqrt{n}N(A).$$

Exercice 9 (❄)

Démontrer que pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1])$, on a

$$\left|\int_0^1 f(t)dt\right| \leq \sqrt{\int_0^1 f^2(t)dt}.$$

Préciser le cas d'égalité.

Exercice 10 (❄)

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel $(.,.)$.

1. Rappeler la définition de ce produit scalaire.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Montrer que $(\mathrm{Ker}(A))^\perp = \mathrm{Im}(A^T)$.

Exercice 11 (Centrale PSI 2018 - ❄❄)

Soit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $X \in E$, $\|AX\| \leq \|X\|$.
   (a) Soit $X \in E$ et $Y = \ A^T X$.
   Montrer que $\langle A^T X|Y\rangle = \|Y\|^2$ et $\|Y\| \leq \|X\|$.
   (b) On suppose qu'il existe $X \in E$ tel que $AX = X$. Montrez que $A^T X = X$.

Exercice 12 (❄)

Soit E un espace euclidien et F, G des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

1. $F \subset G \implies G^\perp \subset F^\perp$
2. $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
3. $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$
4. $E = F \oplus G \iff E = G^\perp \oplus F^\perp$

Exercice 13 (❄❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que Ker(A) =Ker$(A^T.A)$.
2. En déduire que Im(A) =Im$(A.A^T)$.

Exercice 14 (❄❄)

On note $E = \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ et on pose

$$\forall (f,g) \in E^2, \ \langle f,g\rangle = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))dt.$$

1. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
2. Montrer que les sous-espaces vectoriels suivants sont supplémentaires et orthogonaux dans E.

$$F = \{f \in E, \ f(0) = f(1) = 0\} \ \text{ et } \ G = \{f \in E, \ f = f''\}.$$

Exercice 15 (Centrale PSI 2022 - ❄❄)

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que la série $\sum u_n^2$ converge. Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans E, on pose :

$$\langle u,v\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n.$$

1. Montrer que $\langle \ , \ \rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. Montrer que, si $u \in E$ ne s'annule pas, $\frac{1}{u}$ n'appartient pas à E.
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \in E$.
4. On note F l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E de dimension infinie.
5. Que dire de $F + F^\perp$ et de $(F^\perp)^\perp$?

Exercice 16 (❄❄)

1. Rappeler la définition du produit scalaire usuel sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
2. On note $H = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$. Justifier que H est un hyperplan de E.
3. Soit $g \in H^{\perp}$. En considérant l'application $t \longmapsto tg(t)$, montrer que $g = 0$. En déduire $H^{\perp}$.
4. A-t-on $\left(H^{\perp}\right)^{\perp} = H$? A-t-on $E = H \oplus H^{\perp}$?

Exercice 17 (❄❄)

Pour $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n(P)} a_k X^K$ et $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n(Q)} b_k X^K$ dans $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{\min(n(P),n(Q))} a_k b_k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k$$

avec $a_k = 0$ si $k > n(P)$ et $b_k = 0$ si $k > n(Q)$.

1. Démontrer qu'on munit ainsi $E = \mathbb{R}[X]$ d'une structure d'espace préhilbertien réel.
2. On dit qu'une famille infinie de vecteurs est libre, si toute sous-famille finie est libre.
   Démontrer que la famille $\mathcal{F} = \{1 + X^k,\ k \in \mathbb{N}^*\}$ est une famille libre de E puis que $E =$Vect$\{1\}\oplus$Vect$(\mathcal{F})$.
3. Déterminer l'orthogonal de H =Vect$(\mathcal{F})$. A-t-on $E = H \oplus H^{\perp}$?

Exercice 18 (CCINP PSI 2022 - ❄)

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Pour $P, Q \in E$, on pose :

$$f(P,Q) = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1).$$

1. Montrer que f est un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormée de E.
3. Exprimer les coordonnées d'un polynôme $P \in E$ dans cette base. Que remarque-t-on ?

Exercice 19 (❄)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace euclidien E et u un endomorphisme de E.
Démontrer l'égalité suivante :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \Big[\langle e_i, u(e_j)\rangle\Big]_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}.$$

Exercice 20 (TPE - EIVP PSI 2016 - ❄❄)

Soit E un espace euclidien de dimension n, on note F et G les sous-espaces vectoriels engendrés respectivement par $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\{y_1, \ldots, y_n\}$ avec :

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \quad (x_i, x_j) = (y_i, y_j).$$

1. Montrer que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est libre si et seulement si $\{y_1, \ldots, y_n\}$ est libre.
2. Montrer que $\dim(F) = \dim(G)$.

Exercice 21 (❄❄)

Soit E un espace préhilbertien réel et $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs de E tels que :

$$\forall x \in E, \qquad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle^2.$$

1. On suppose que E est de dimension finie n. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.
2. On suppose que $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 22 (❄❄❄)

Soit E un espace préhilbertien réel de dimension finie et $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs de E tels que :

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle^2.$$

Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 23 (❄❄)

Dans cet exercice, $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire usuel. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On assimile la matrice A à l'endomorphisme $X \longmapsto AX$.

1. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ et P le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ d'équation $ax + by + cz = 0$.
   Démontrer que P est stable par A si et seulement si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A^T.
2. Démontrer que Sp(A) =Sp(A^T).
3. Application : Déterminer tous les sous-espaces stables par la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 24 (CCINP PSI 2022 (Flavien L.) - ❄❄)

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et A la matrice de u dans la base canonique de E.
On désigne par v, l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est A^T.

1. Démontrer que $\forall x, y \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, v(y)\rangle$.
2. Soit F un s.e.v de $\mathbb{R}^n$ stable par u.
   Montrer que $F^{\perp}$ est stable par v.
3. On suppose que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer le polynôme caractéristique de A.
   Les matrices A et A^T sont-elles diagonalisables ?
   (b) Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ stables par u.

Exercice 25 (Centrale PSI 2022 (Raphaël D.) - ❄❄)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad (P|Q) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx.$$

1. Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur E.
2. On pose pour $k \in [\![0,n]\!]$, $B_k(X) = \dfrac{X^k}{k!}$. La famille $(B_0, B_1, \dots, B_n)$ est-elle une base orthonormée de E ?
3. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, et $t \in \mathbb{R}$, on pose $f_k(t) = t^k e^{-t}$ et $L_k \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $\forall t \in \mathbb{R},\ L_k(t) = \dfrac{(-1)^k}{k!} e^t f_k^{(k)}(t)$.
   Justifier l'existence et l'unicité de L_k, donner son degré et son coefficient dominant.
   La famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est-elle une base orthonormée de E ?

Exercice 26 (CCP PC - ❄)

1. Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$.
   Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que si a est racine d'ordre r de P alors, elle l'est d'ordre $r-1$ de P'.
3. Montrer que si $P(0) = P(1) = 0$ alors $(P'|Q) = -(P|Q')$, puis que $(P^{(n)}|Q) = (-1)^n (P|Q^{(n)})$ si 0 et 1 sont racines d'ordre au moins n de P.
4. On pose $L_n[X] = \Big(X^n(1-X)^n\Big)^{(n)}$.
   Montrer que L_n est de degré n et que son coefficient dominant est $(-1)^n \dfrac{(2n)!}{n!}$.
5. Montrer que $L_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$.
6. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. Est-elle orthonormée ?

Exercice 27 (ENSAM PT - ❄❄)

1. Montrer que $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $U \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P(0) = \displaystyle\int_{-1}^1 P(t)U(t)dt$.
3. Calculer U pour $n = 2$.

Exercice 28 (❄❄)

On note $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. On note $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $(X,Y) \in E^2 \longmapsto X^T A^T AY$ est un produit scalaire si et seulement si A est inversible.
2. Soit $\langle\ ,\ \rangle$ un produit scalaire sur E. Démontrer qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (X,Y) \in E^2, \qquad \langle X, Y\rangle = X^T CY.$$

   Démontrer que C est inversible et que $C^T = C$.

Exercice 29 (Navale PSI 2017 - ❄)

Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E tel que $\langle u(x), x\rangle = 0$ pour tout $x \in E$. Montrer que $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)$.

Exercice 30 (❄❄)

Soit E un espace préhilbertien réel et u une application de E dans E vérifiant :

$$u(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall (x,y) \in E^2, \quad \|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|.$$

Montrer que u est linéaire. On pourra montrer que u conserve le produit scalaire.

Exercice 31 (Mines-Ponts PC 2017 - ❄❄)

Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $f : E \longrightarrow E$. On suppose que, pour tous $x, y \in E$ on a $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
Montrer que f est linéaire.

Exercice 32 (IMT MP 2018 - ❄)

On pose $f(x) = (a|x)b$ où a et b sont deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$.
Dire si $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires.

Exercice 33 (CCP PC 2015 - ❄)

Montrer que f définie sur E euclidien par $f(x) = x - (a|x)b$ où a et b sont deux vecteurs non nuls de E, est un endomorphisme de E et qu'il est bijectif si et seulement si $(a|b) \neq 1$.

Exercice 34 (TPE PC 2017 - ❄❄)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ disposant de n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

1. Montrer que M^T est diagonalisable, avec les mêmes valeurs propres que M.
2. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, soit $V_k \in \mathrm{Ker}(M - \lambda_k I_n)$ et $W_k \in \mathrm{Ker}(M^T - \lambda_k I_n)$ des vecteurs non nuls.
   Montrer que pour $i \neq j$, on a $V_i^T W_j = 0$.
3. En déduire que, pour tout pour $i \in [\![1,n]\!]$, on a $V_i^T W_i \neq 0$.
4. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, soit $B_k = \dfrac{1}{V_k^T W_k} W_k\ V_k^T$. Calculer $B_k V_i$.
   En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^n B_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^n \lambda_k B_k$.

Exercice 35 (CCP PSI 2017 - ❄)

Écrire la matrice de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x - 2y + z = 0$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 36 (❄)

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + 2z = 0\}$.

Exercice 37 (❄)

On munit $E = \mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel et on note $\mathcal{B} = (i, j, k)$ sa base canonique. Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur $F = \text{Vect}\{(1,0,1),(2,1,0)\}$.

Exercice 38 (IMT PC 2018 - ❄)

Dans $\mathbb{R}^4$ espace euclidien usuel, déterminer la matrice (dans la base canonique) de la symétrie orthogonale par rapport à :

$$P : \left\{ \begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{array} \right.$$

Exercice 39 (IMT PSI 2022 - ❄)

1. Montrer que la matrice d'une projection orthogonale dans une base orthonormée est une matrice symétrique.
2. Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = A$ et $A^T = A$ est la matrice d'une projection orthogonale dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
3. Que dire de la matrice $M = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$?

Exercice 40 (CCP PC 2018 - ❄)

Montrer que $A = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ représente la matrice d'une projection orthogonale.

Exercice 41 (CCP PSI 2018 - ❄❄)

Soit E un espace euclidien et u, v des vecteurs non nuls de E.

1. Montrer que s'il existe une réflexion r telle que $r(u) = v$ alors $\|u\| = \|v\|$.
2. Réciproquement, montrer que si $\|u\| = \|v\|$, alors il existe une unique réflexion r telle que $r(u) = v$.
3. Application : Dans $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, trouver la matrice dans la base canonique de la réflexion qui échange $u = (1,-1,1,0)$ et $v = (0,-1,1,1)$.

Exercice 42 (❄❄)

Soit E un espace euclidien dont on se donne une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. On considère une s.e.v. F de E muni lui aussi d'une base orthonormée $(u_1, \ldots, u_p)$. On note p_F la projection orthogonale sur F.
Démontrer que la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de p_F est

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p_F) = \sum_{k=1}^{p} U_k \; U_k^T,$$

où U_k est le vecteur colonne des coordonnées de u_k dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 43 (CCP MP 2013 - ❄)

1. Montrer que $\varphi(A,B) = \text{tr}(A^T B)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Trouver une base de $F^\perp$ et déterminer le projeté orthogonal de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.

Exercice 44 (CCP PSI 2018 et 2021 (Emma H.) - ❄)

On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k$, où les a_k et b_k sont les coefficients de P et Q respectivement. Déterminer la projection orthogonale de 1 sur l'espace vectoriel $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(1) = 0\}$.

Exercice 45 (CCP PSI 2018 - ❄)

1. Montrer que $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Calculer la projection orthogonale de $P(X) = 1 + X + X^2$ sur $F = \{Q \in \mathbb{R}^2[X],\ Q'(0) = 0\}$.

Exercice 46 (Mines Telecom PSI 2019 (Davy L.) - ❄❄)

On note E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $(f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E.
2. On note $F = \text{Vect}\{f : x \longmapsto \cos(x),\ g : x \longmapsto \cos(2x)\}$. Déterminer la dimension de F.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $u : x \longmapsto \sin^2(x)$ sur F.

Exercice 47 (ENSEA PSI 2019 (Oxana M.) - ❄❄)

Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E.

1. Montrer que si p est un projecteur orthogonal, alors :

$$\forall x \in E, ||p(x)|| \leq ||x||$$

2. Réciproquement, on suppose que $\forall x \in E, ||p(x)|| \leq ||x||$.
   (a) Soit $u \in \text{Im}(p)$ et $v \in \text{Ker}(p)$.
   Montrer que u et v sont orthogonaux.
   (b) En déduire que p est un projecteur orthogonal.

Exercice 48 (❄❄)

Soit E un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer l'équivalence suivante.

$$p \text{ projection orthogonale} \iff \left\{ \begin{array}{l} p \circ p = p \\ \forall x \in E, ||p(x)|| \leq ||x|| \end{array} \right.$$

Exercice 49 (CCEM MP 2015 - ❄❄)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien muni d'une base orthonormale $\mathcal{B}$. On note $[a]$ la colonne des coordonnées d'un vecteur a dans la base $\mathcal{B}$.. Soit $a \in E$, différent du vecteur nul.

1. Montrer que $M = \dfrac{1}{[a]^T.[a]}[a].[a]^T$ est la matrice du projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(a)$.
2. Écrire en fonction de M la matrice de :
   (a) la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}(a)$;
   (b) la symétrie orthogonale par rapport à l'orthogonal de $\text{Vect}(a)$;
   (c) le projecteur orthogonal par rapport à l'orthogonal de $\text{Vect}(a)$.

Exercice 50 (Mines - Ponts PSI 2016 - ❄❄❄)

Soit E un espace euclidien de dimension n de norme associée notée.Soient p, q deux projecteurs de E.

1. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si : $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$.
2. On suppose que p et q sont des projecteurs orthogonaux de E. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   i) $p \circ q = q \circ p$,
   ii) p et q possèdent une base de diagonalisation commune,
   iii) $p \circ q$ est un projecteur.

Exercice 51 (Mines-Télécom PSI 2017 - ❄❄)

Soit E un espace euclidien.

1. Soit u un vecteur non nul de E, p le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}\{u\}$ et s la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}\{u\}^{\perp}$.
   Pour tout vecteur $x \in E$, exprimer $p(x)$ et $s(x)$.
2. Soient a, b deux vecteurs distincts et de même norme.
   Montrer qu'il existe une unique réflexion s telle que $s(a) = b$ et $s(b) = a$.

Exercice 52 (Mines - Ponts PC 2017 - ❄❄)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien.

1. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si, pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$..
2. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux de E.
   Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E si et seulement si $p \circ q = q \circ p$.

Exercice 53 (Centrale - Supélec PC 2016 - ❄❄❄)

Pour $(P; Q) \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P; Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t}}\text{d}t$.

1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2. Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ non nul.
   Montrer que R_A qui à un polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par A est un projecteur.
3. À quelle condition R_A est-il un projecteur orthogonal.

Exercice 54 (Mines - Ponts PSI 2016 - ❄❄)

1. Donner la définition de projecteur orthogonal d'un espace euclidien E.
2. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux de E. Montrer que le polynôme caractéristique de $u = p + q$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que toutes les valeurs propres de u sont dans $[0, 2]$.
4. Déterminer $\text{Ker}(u)$ et $\text{Ker}(u - 2\text{Id}_E)$ (en fonction des noyaux et images de p et q).

Exercice 55 (❄)

Dans $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, on considère

$$F = \{(x, y, z, t) \in E, \quad 2x - y + z = 0 \quad \text{et} \quad y + z + t = 0\}.$$

1. Déterminer la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale sur F.
2. Soit $u = (1, 1, 0, 0)$. Déterminer $d(u, F)$.

Exercice 56 (CCINP PSI 2022 - ❄)

1. Montrer que $\varphi(A, B) = \text{tr}(A^T B)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{E} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Trouver une base orthonormée de $\mathcal{E}^{\perp}$.
4. Déterminer la distance de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à $\mathcal{E}^{\perp}$.

Exercice 57 (❄)

1. Montrer que $\varphi(A, B) = \text{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que la base canonique est orthonormée pour ce produit scalaire.
3. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :
$$|\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n\text{tr}(A^T A)}.$$
4. On note $S_n(\mathbb{R})$ (resp. $A_n(\mathbb{R})$) le sous-espace vectoriel des matrices symétriques (resp. antisymétriques). Montrer qu'ils sont supplémentaires orthogonaux.
5. Montrer que $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{tr}(M) = 0\}$ est un s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on donnera la dimension.
   Puis calculer la distance de I_n à H.
6. Trouver $\displaystyle\inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{i,j=1}^{n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2$ pour $A = [a_{i,j}]_{i,j=1,\ldots,n}$ donnée.

Exercice 58 (Mines-Ponts PSI 2018 - ❄)

Montrer que la fonction f suivante admet un minimum sur $\mathbb{R}^n$.

$$f : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}(1 + x_1 t + \cdots + x_n t^n)^2 dt.$$

Exercice 59 (❄)

À deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, on associe :

$$< P,Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

1. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer une base orthonormale de $F = \mathbb{R}_2[X]$.
3. Calculer $\inf\limits_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x^3 - ax^2 - bx - c)^2 dx$.

Exercice 60 (❄)

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.
2. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $(P,Q) \in E^2$, on définit

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx.$$

   Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur E.
3. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$. On orthonormalisera la base $(X^2, X, 1)$.
   En déduire $\gamma = \inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left(\int_0^{+\infty} (1 - ax - bx^2)^2 e^{-x} dx \right)$.

Exercice 61 (Mines-Ponts PC 2017 - ❄❄)

Calculer $\inf (a,b) \in \mathbb{R}^2 \int_0^1 t^2(\ln(t) - at - b)^2 \mathrm{d}t$.

Exercice 62 (❄)

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire qui rend la base canonique orthonormée (c'est-à-dire du produit scalaire usuel). On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 et on se donne une matrice M dont la somme de tous les coefficients est nulle.

1. Déterminer le projeté orthogonal de M sur $F =$Vect$\{I_n, J\}$.
2. En déduire la valeur de $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} ||M - aI_n - bJ||$.

Exercice 63 (CCP PSI 2016/2017 - ❄)

Pour $(P;Q) \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\langle P;Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$.

1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2. Montrer que $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X]; P(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et donner sa dimension.
3. Calculer $d(1,E)$.

Exercice 64 (CCP PSI 2017 - ❄❄)

Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels deux-à-deux distincts.

1. Montrer que $(P|Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(a_0) + \cdots + P(a_n) = 0\}$.
   Montrer que F est un espace vectoriel, déterminer sa dimension et son orthogonal.
3. Déterminer la distance de X^n à F.

Exercice 65 (CCINP PSI 2023 (Kevin D.) ❄❄)

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$, et on définit $(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$.

1. Montrer que $(.,.)$ est un produit scalaire et donner une base orthonormée $(L_0, L_1, \dots, L_n)$.
2. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P'(0) = (P,Q)$.
   Exprimer ce polynôme Q dans la base $(L_0, L_1, \dots, L_n)$.
   Déterminer explicitement Q lorsque $n = 2$.
3. On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(0) + P(1) + \cdots + P(n) = 0\}$.

   Justifier que F est un sous-espace vectoriel de E et donner sa dimension.

   Déterminer l'orthogonal de F, puis la distance de X^n à F.

Exercice 66 (d'après CCP PSI 2016 - ❄❄)

On note E l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, $V = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E,\ f'' = f\}$.

1. Montrer que $(f|g) = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))dt$ définit un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base de W.
3. Les sous-espaces vectoriels V et W sont-ils orthogonaux ? supplémentaires orthogonaux ?
4. Soit $H = \{f \in E,\ f(0) = \mathrm{ch}(1),\ f(1) = 1\}$. Soit $f \in H$, déterminer le projeté orthogonal de f sur W.
5. Calculer $\inf\limits_{f\in H} \int_0^1 (f^2(t) + f'^2(t))dt$.

Feuille 17

Isométries vectorielles et endomorphismes autoadjoints

Extraits de rapports de jury :

- **Oral CCP PSI 2016 :** Si le théorème spectral semble bien connu, les diverses caractérisations d'une matrice orthogonale ne le sont pas. La vision géométrique est notamment très limitée. Les questions liées à la distance à un sous-espace sont rarement bien traitées. En particulier, L'étude d'endomorphismes orthogonaux en dimension 3 n'est bien menée que par une minorité des candidats interrogés sur ce sujet.
- **Oral Mines-Ponts PSI 2019 :** On note des difficultés à reconnaitre une matrice de rotation du plan d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
- **Oral Centrale PSI 2021 :** Si l'énoncé du théorème spectral, fréquemment demandé, est le plus souvent bien cité sous sa forme matricielle, il est bien difficile d'obtenir une formulation correcte pour les endomorphismes. Beaucoup d'étudiants parlent d'endomorphismes réels, expression dépourvue de sens et ne voient pas qu'il faut se placer dans le cadre des espaces euclidiens. La même difficulté existe pour les notions de matrices symétriques et d'endomorphismes symétriques. Il faut connaitre les théorèmes de réduction et savoir que le lien entre matrice symétrique et endomorphisme symétrique se fait uniquement à travers la représentation de ce dernier dans une base orthonormée.

  Reconnaitre une transformation géométrique en petite dimension dans un espace euclidien est un sujet qui permet d'évaluer de nombreuses compétences. Enfin, la résolution d'un système linéaire n'est pas utile pour déterminer l'inverse d'une matrice orthogonale.
- **Oral Centrale PSI 2022 :** La définition géométrique d'une projection ou d'une symétrie, liée à la donnée de deux espaces supplémentaires, pose des problèmes à beaucoup de candidats. Le cas particulier des projections orthogonales et des symétries orthogonales n'est pas non plus toujours maitrisé.

  Dans le même ordre d'idée les propriétés des matrices orthogonales et la définition des isométries vectorielles ne sont pas bien connues de certains candidats. Précisons que contrairement à ce que nous avons entendu fréquemment lors de cette session, $\mathcal{SO}_2$ et $\mathcal{SO}_3$ ne sont pas des ensembles des matrices symétriques orthogonales !

Exercice 67 (E1 - ❆)

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Démontrer que si λ et μ sont des valeurs propres distinctes de f alors les sous-espaces propres $E_\lambda(f)$ et $E_\mu(F)$ sont orthogonaux.

Exercice 68 (❆)

Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E. Montrer que les sous-espaces $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont supplémentaires et orthogonaux.

Exercice 69 (❆)

Diagonaliser les matrices suivantes à l'aide d'une matrice de passage orthogonale.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 70 (❆)

Diagonaliser les matrices suivantes à l'aide d'une matrice de passage orthogonale.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 71 (CCINP PSI 2022 (Justin A.) - ❆)

Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit $M_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de M_a. Combien de valeurs propres possède-t-elle ? Les donner.
2. M_a est-elle diagonalisable ? Si oui, trouver P et D telles que $PDP^{-1} = M_a$.
3. M_a est-elle inversible ? Dans le cas où elle ne l'est pas, donner $\mathrm{Ker}(M_a)$ et $\mathrm{Im}(M_a)$.

Exercice 72 (Mines-Ponts PC 2017 - ❄❄)

Trouver les $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & -3 & 3 \\ 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 73 (ENSAM PSI 2018 - ❄)

1. Donner le rang de $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, déterminer son noyau, son image, une base orthonormée de chacun d'eux, puis montrer qu'ils sont orthogonaux.
2. Diagonaliser M. De quel endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, M est-elle la matrice dans la base canonique ?
3. Montrer que $A = I_4 + M$ est inversible et que la suite $(A^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice que l'on déterminera.

Exercice 74 (IMT MP 2018 - ❄❄❄)

1. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible vérifie $A^3 = A^T A$, alors A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer par un contre-exemple, que A n'est pas toujours diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 75 (CCP PSI - ❄)

Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ symétriques telles que :

$$\operatorname{tr}(A) = 6,\ \operatorname{tr}(A^2) = 12 \text{ et } \det(A) = 8.$$

Exercice 76 (❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $A + A^T$ est nilpotente alors A est antisymétrique.

Exercice 77 (Mines - Ponts PC 2013 - ❄)

Trouver les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles qu'il existe un entier p vérifiant $(A + A^T)^p = 0$.

Exercice 78 (❄)

Trouver les matrices A symétriques réelles telles que

$$A^3 + A = 0.$$

Exercice 79 (CCP PSI 2017 - ❄❄)

1. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :
$$M^2 + 4I_2 = 0_2 \text{ et } S = M^T M = M M^T.$$
Trouver un polynôme annulateur de degré 2 de S.
En déduire que $\dfrac{1}{2}M$ est orthogonale.
2. Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant :
$$M^2 + 4I_2 = 0_2 \text{ et } M^T M = M M^T.$$

Exercice 80 (❄)

Trois enfants A, B, C jouent à la balle.
• Lorsque A a la balle, la probabilité qu'il la lance à B est $0,75$, la probabilité qu'il la lance à C est $0,25$.
• Lorsque B a la balle, la probabilité qu'il la lance à A est $0,75$, la probabilité qu'il la lance à C est $0,25$.
• Lorsque C a la balle, la probabilité qu'il la lance à A est $0,25$, la probabilité qu'il la lance à B est $0,25$, il la garde avec la probabilité $0,5$.

On suppose que les trois enfants A, B, C occupent des positions numérotées $1, 2$ et 3 respectivement.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$ donnant la position de la balle à l'issue du n-ième lancer et $P_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ la loi de X_n.

Avant le début du jeu, la balle est lancée à l'un des trois enfants selon une loi donnée par X_0. C'est par convention le lancer numéro 0. On notera

$$P_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_0 = 1) \\ \mathbb{P}(X_0 = 2) \\ \mathbb{P}(X_0 = 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une matrice M telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $P_{n+1} = M P_n$.
2. Déterminer une matrice orthogonale Q telle que $Q^{-1} M Q$ soit diagonale.
3. En déduire la limite de P_n lorsque n tend vers $+\infty$. Comment peut-on l'interpréter ?

Exercice 81 (❄)

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel. Caractériser les endomorphismes f, g de E définis par leurs matrices dans la base $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 82 (❄)

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel. Caractériser les endomorphismes f, g de E définis par leurs matrices dans la base $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 83 (❄)

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel. Caractériser l'endomorphisme h de E défini par sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 84 (❄)

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $E=\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Caractériser les endomorphismes f,g de E définis par leurs matrices dans la base $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\qquad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\-2&2&-1\end{pmatrix}.$$

Exercice 85 (❄)

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $E=\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Caractériser les endomorphismes f,g de E définis par leurs matrices dans la base $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}\quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g)=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&8&4\\8&1&-4\\4&-4&7\end{pmatrix}.$$

Exercice 86 (❄)

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $E=\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Caractériser les endomorphismes f,g de E définis par leurs matrices dans la base $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&\sqrt{6}&-\sqrt{6}\\\sqrt{6}&1&3\\-\sqrt{6}&3&1\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&2\\1&-2&-2\\2&2&-1\end{pmatrix}.$$

Exercice 87 (CCINP PSI 2022 - ❄❄)

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ une base orthonormée directe, $e=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(e_1-e_2+e_3)$ et D la droite portée par le vecteur e.
On considère la rotation u autour de l'axe D orienté par e d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. Déterminer la matrice de u dans $\mathcal{B}$.

Exercice 88 (❄)

Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E. Démontrer l'équivalence suivante.

$$f \text{ symétrie orthogonale} \iff f\in\mathcal{O}(E) \text{ et } f \text{ symétrique.}$$

Exercice 89 (❄)

Soit E un espace euclidien et $f\in\mathcal{O}(E)$. Montrer l'équivalence :

$$f \text{ diagonalisable} \iff f \text{ symétrie orthogonale.}$$

Exercice 90 (TPE PSI 2017 - ❄❄)

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.
Déterminer tous les endomorphismes u de E tels que :

$$\forall (x,y)\in E^2,\ u(x\wedge y)=u(x)\wedge u(y).$$

Exercice 91 (❄)

Soit $J\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de J.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $aI+bJ$ soit la matrice d'un projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $aI+bJ$ soit la matrice d'un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique.

Exercice 92 (❄)

Soit $A=\begin{pmatrix}a^2&ab-c&ac+b\\ab+c&b^2&bc-a\\ac-b&bc+a&c^2\end{pmatrix}$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels a,b,c pour que la matrice A soit orthogonale puis donner ses éléments caractéristiques.

Exercice 93 (ICNA MP 2017 - ❄❄)

Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur $p,q,r\in\mathbb{R}$ pour que $A=\begin{pmatrix}p&q&r\\q&r&p\\r&p&q\end{pmatrix}$ soit la matrice d'une rotation dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel.

Exercice 94 (Centrale PC 2018 - ❄❄❄)

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique.

1. Montrer que si M est une matrice orthogonale, alors :
$$\mathbb{R}^n=\mathrm{Ker}(M-I_n)\overset{\perp}{\oplus}\mathrm{Im}(M-I_n).$$
2. Étudier la convergence de la suite de terme général $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}M^k$.
3. Vers quoi converge cette suite si $M\in\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 95 (Mines-Ponts PC 2018 - ❄❄❄)

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si A est inversible, on peut écrire $A=OT$ avec O matrice orthogonale et T matrice triangulaire supérieure.
   On pourra appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt aux colonnes de A.
2. Montrer que $|\det(A)|\leq\sqrt{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}^2\right)}$.

Exercice 96 (CCP PSI 2016 - ❄)

Pour a non nul donné dans un espace euclidien E, déterminer les valeurs de α, pour lesquelles
$$u(x)=\alpha\langle x|a\rangle a-x$$
définit un isométrie.

Exercice 97 (ENSSAT (Lannion) 2014 - ❄❄)

Soit $(E;(.|.))$ un espace euclidien et $\{a,b\}$ une famille libre de vecteurs unitaires de E. On considère la fonction f définie par
$$\forall x \in E, \quad f(x) = (a|x)a + (b|x)b.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

Exercice 98 (❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.
On suppose que $\mathrm{sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$.
Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $A = C^2$.

Exercice 99 (❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer l'équivalence suivante.
$$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ B^T.B = A.$$

Exercice 100 (❄)

Vérifier que A dont tous les coefficients diagonaux valent 4 et tous les autres 1, est diagonalisable.

Montrer que $A - 3I_n$ n'est pas inversible puis déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Exercice 101 (❄)

Diagonaliser la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant des 1 sur ses premières et dernières lignes, des 1 sur ses premières et dernières colonnes et des 0 ailleurs.

Exercice 102 (❄)

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 103 (❄)

Soit a un réel non nul et n un entier avec $n \geq 3$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice M
$$M = \begin{pmatrix} a & \cdots & a \\ \vdots & 0 & \vdots \\ a & \cdots & a \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est diagonalisable
2. Déterminer le rang de f et une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = (\mathrm{Ker}(f))^\perp$.
4. Montrer que 0 est valeur propre de f et donner sa multiplicité.
5. Calculer M^2 et en déduire les 2 autres valeurs propres.

Exercice 104 (CCP PSI 2017 - ❄❄)

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, avec $a_2 \neq 0$. On définit
$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

1. On note $\chi_n = \det(XI_n - A_n)$. Calculer χ_2 et χ_3.
2. Montrer que χ_n est divisible par X^{n-2}.
3. Montrer que $\chi_n = X^{n-2}(X^2 - a_1X - B)$, avec $B = \sum_{k=2}^{n} a_k^2$.
4. On suppose que $B = 0$. La matrice A_n est-elle diagonalisable ?
5. On suppose $B \neq 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A_n soit diagonalisable.

Exercice 105

Soit $n \geq 2$ un entier et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{n-1} \\ x_1 & \cdots & x_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

1. Calculer $\mathrm{tr}(A^2)$.
2. En déduire les valeurs propres de A.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 106 (ENSEA PC 2016 - ❄)

Soient $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ et $M = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$

1. Montrer qu'il existe $C \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ tel que $M = CC^T$.
2. Déterminer le rang de M.
3. Montrer que M est semblable à une matrice de la forme
$$N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Expliciter a en fonction de x, y et z.
4. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

Exercice 107 (Mines-Ponts PSI 2017 - ❄❄)

Déterminer les éléments propres de la matrice
$$M = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_1x_2 & x_2^2 & & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1x_n & \cdots & x_{n-1}x_n & x_n^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 108 (ENSEA PSI 2016 - ❄❄)

1. Reconnaître l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ représenté dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ par la matrice M dont les coefficients diagonaux valent $1 - \dfrac{1}{n}$ et tous les autres $-\dfrac{1}{n}$.
2. Donner les éléments propres de f.
3. Exprimer $f(x)$ pour tout $x \in E$.
   On pourra introduire $u = e_1 + \cdots + e_n$.

Exercice 109 (TPE PSI 2019 (Gabriel P.) - ❄❄)

Soit $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$N = M^{p+1} \quad \text{et} \quad M^p = M^T.$$

1. Montrer que $\langle NX|X\rangle = ||MX||^2$.
2. Montrer que $N^p = N$, en déduire les valeurs propres possibles pour N.
3. Montrer que $N^2 = N$.

Exercice 110 (Centrale-Supelec PC 2015 - ❄❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique réelle telle qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ avec $A^m = I_n$.
Montrer que $A^2 = I_n$ et interpréter les propriétés géométriques de l'endomorphisme associé.

Exercice 111 (CCINP PSI 2022 et 2023 (Baptiste G.) -

Soit $A \in GL_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = A^T$ et $A \neq I_2$.

1. Trouver un polynôme annulateur de A.
2. Montrer que le spectre d'une matrice est inclus dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur.
   En déduire le spectre de A.
3. Montrer que A est orthogonale.
4. Déterminer $\det(A)$.
5. En déduire les matrices A vérifiant les conditions de l'énoncé.

Exercice 112 (CCP PSI 2017 - ❄❄)

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M\ M^T M = I_n$.

1. Montrer que M est symétrique.
2. Déterminer toutes les matrices M solutions.

Exercice 113 (CCINP PSI 2022 - ❄❄)

Soient $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme annulateur de A.

1. Montrer que les valeurs propres de A sont des racines de P.
2. Peut-on avoir à la fois $\mathrm{tr}(A) = 0$ et $A^2 + A^T = I_3$?

Exercice 114 (CCINP PSI 2022 - ❄❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A\left(A^T A\right)^2 = I_n$.

1. Montrer que A est inversible.
2. Montrer que A est symétrique.
3. En déduire que $A = I_n$.

Exercice 115 (Mines-Télécom PSI 2023 (Lucas E.) - ❄❄)

Soient $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -C^T \\ C & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

1. Calculer $M^T M$. En déduire que M est inversible.
2. Montrer que $M^{-1}M^T$ est une matrice orthogonale.

Exercice 116 (Mines-Télécom PSI 2023 (Pierre D.) - ❄❄ ?)

Soient $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $\dfrac{1}{2}(A + B) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $A = B$.

Exercice 117 (CCINP PSI 2021 (Antoine D.) - ❄❄)

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M \neq I_n$, $M^3 = I_n$ et $M\ M^T = \ M^T M$.

1. Montrer que M est orthogonale.
2. Pour $n = 3$, déterminer toutes les matrices M solutions.

Exercice 118 (ENSAM PSI 2018 - ❄❄❄)

1. Donner la dimension de l'espace $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $M \in \mathcal{A}_n$, alors $(I_n + M)$ est inversible.
3. Montrer que $A = (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$ est orthogonale.

Exercice 119 (CCP PSI 2017 - ❄❄)

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{p\pi \,|\, p \in \mathbb{Z}\}$.

1. Calculer pour $n \geq 1$:

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) \text{ et } T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta)$$

   Déterminer les limites de S_n et T_n en $+\infty$.
2. On note r une rotation d'angle θ sur un espace euclidien de dimension 2 ou 3. Déterminer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r^k(x)$.
3. Montrer que si u est une isométrie de E, espace euclidien, alors $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires et orthogonaux.
   Calculer pour tout $x \in E$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u^k(x)$.

Exercice 120 (CCP PSI 2018 - ❄❄)

Soit E un espace euclidien de dimension n et (a, b) une famille libre de E.

1. Montrer que l'application définie par

$$\varphi(x) = \langle x, b\rangle a + \langle x, a\rangle b$$

   définit un endomorphisme de E.
2. Trouver les valeurs propres de φ.
3. φ est-il diagonalisable ? symétrique ?

Exercice 121 (❄❄)

Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace euclidien.
Pour $f \in \mathcal{O}(E)$ dont on note $F = \text{Ker}(f - Id_E)$.

1. Montrer que $f(F^\perp) = F^\perp$.
2. Démontrer ausi l'égalité $F = (\text{Im}(f - Id_E))^\perp$.
   En déduire que si $(f - Id_E)^2 = 0$ alors $f = Id_E$.

Exercice 122 (CCP PSI 2013 - ❄❄)

Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que $\text{tr}(f) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle f(e_k) | e_k \rangle$.
2. Montrer que si f est autoadjoint et si $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}^+$ alors
$$\forall x \in E, \ \langle f(x) | x \rangle \geq 0.$$
3. Montrer que si $f, g \in \mathcal{L}(E)$ sont des endomorphismes symétriques dont les valeurs propres sont positives alors
$$\text{tr}(f \circ g) \geq 0.$$

Exercice 123 (TPE PSI 2019 (Olivier D.) - ❄❄)

Soit $A = [a_{i,j}]_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.
On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres.
Démontrer l'égalité $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2$.

Exercice 124 (CCINP PSI 2022 (Maxence B.) - ❄❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = \dfrac{1}{2}(A + A^T)$.

1. Justifier que les valeurs propres de S sont réelles. On les note :
$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$
2. Soit μ une valeur propre (réelle) de A.
   Ainsi, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $AX = \mu X$.
   (a) Calculer $X^T S X$.
   (b) Montrer que $\lambda_1 \leq \mu \leq \lambda_n$.

Exercice 125 (CCINP PSI 2022 - ❄❄)

Soient $(E, \langle \ , \ \rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$.

1. Montrer l'équivalence :
$$u \text{ est défini positif} \iff \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*.$$
2. Si a et b sont deux endomorphismes symétriques définis positifs, montrer qu'il existe un unique $c \in \mathcal{L}(E)$ tel que $b = a \circ c + c \circ a$.
3. Montrer que c est symétrique défini positif.

Exercice 126 (IMT PSI 2022 - ❄❄)

Montrer que, pour toue matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a :
$$\Big(\text{tr}(A)\Big)^2 \leq \text{rg}(A)\text{tr}(A^2).$$

Exercice 127 (Centrale PSI 2022 - ❄❄)

On pose $\varphi : (A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2 \longmapsto \text{Tr}(A^T B)$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire. Montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux. Donner l'expression de $S(M)$ symétrie orthogonale de M par rapport à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
2. Soit A une matrice de $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$. Soit S_A sa projection orthogonale sur $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et $\text{Sp}(S_A)$ son spectre. Montrer que $1 \in \text{Sp}(S_A) \subset [-1, 1]$.

Exercice 128 (Centrale PSI 2022 - ❄❄)

Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,j}| \leq 1$.
2. Montrer que, si S est positive, alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $s_{i,i} \geq 0$.
3. Montrer que, si S est positive, alors $\text{tr}(SA) \leq tr(S)$. Étudier la réciproque.

Exercice 129 (CCP PC 2018 - ❄❄)

Soit $M = [m_{i,j}]_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer $\text{tr}(M^T M)$.
2. Montrer que si M est symétrique de coefficients diagonaux égaux à ses valeurs propres (avec multiplicité) alors M est diagonale.

Exercice 130 (ENSAM PSI 2017 - ❄❄)

On note $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \ M^T = M\}$.

1. Soit $M \in E$. Montrer que M vérifie :
$$\Big(\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \ X^T M X > 0\Big)$$
   si et seulement si les valeurs propres de M sont toutes réelles et strictement positives.
2. Montrer alors que M est inversible et que M^{-1} vérifie la même propriété.
3. Montrer que si $A, B \in E$ vérifient la même propriété, alors $A + B$ est inversible.
4. Trouver l'ensemble des couples (A, B) de la question précédente, tels que $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

Exercice 131 (ENSAM PSI 2015 - ❄❄)

Soit $M = [m_{i,j}]_{i,j=1,\ldots,n}$ une matrice orthogonale. Montrer que :
$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} m_{i,j} \right| \leq n \leq \sum_{i,j=1}^{n} |m_{i,j}| \leq n^{3/2}.$$

Exercice 132 (CCP PSI - ❄❄)

1. Montrer que si $D \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est diagonale et si $H \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\text{tr}(HD) \leq \text{tr}(D)$.
2. Montrer que si $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et si $H \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\text{tr}(HS) \leq \text{tr}(S)$.

Exercice 133 (IMT MP 2018 - ❄❄)

On se donne une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique dont les valeurs propres sont strictement positives et deux-à-deux distinctes.
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne non nul.
En décomposant X dans une base appropriée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donner une expression de $Y_k = \dfrac{1}{\|S^k X\|} S^k X$, puis déterminer la limite de $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Exercice 134 (Mines-Ponts PC 2017 - ❄❄)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Déterminer les $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que, pour tout sous-espace V de E, on ait $f(V^\perp) = (f(V))^\perp$.

Exercice 135 (Mines-Ponts 2013 - ❄❄)

Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ nilpotentes telles que $M + I_n$ soit orthogonale.

Exercice 136 (Mines-Ponts PSI 2015 - ❄❄)

Soient A et B deux matrices symétriques réelles. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^{2p+1} = B^{2p+1}$.
Montrer que $A = B$.

Exercice 137 (CCP MP 2015 - ❄❄)

Soit u un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien E. On pose $v = u - Id_E$. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(v) = (\mathrm{Im}(v))^\perp.$$

On note p la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(v)$.
Montrer que la suite de terme général $u_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k(x)$ converge vers $p(x)$.

Exercice 138 (CCP PSI 2018 (Mélissandre H.) - ❄❄)

Soit E un espace euclidien E et f un endomorphisme de E vérifiant

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad (x|y) = 0 \implies (f(x)|f(y)) = 0.$$

1. Que dire de la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$?
2. Calculer $\langle f(e_i) + f(e_j), f(e_i) - f(e_j)\rangle$ et en déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :
$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \|f(e_i)\| = \alpha.$$
3. En déduire qu'il existe $g \in \mathcal{O}(E)$ tel que $f = \alpha g$.

Exercice 139 (d'après Centrale-Supélec PSI 2015 - ❄❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer que $A^T A$ est symétrique réelle et que ses valeurs propres sont strictement positives.
Démontrer qu'il existe une matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique réelle à valeurs propres strictement positives telles que $A = US$.

Exercice 140 (EIVP PSI 2016 - ❄❄❄)

Soit φ un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E.
Comparer $\displaystyle\sup_{\|u\|=1} \|\varphi(u)\|$ et $\displaystyle\sup_{\|u\|=1} |\langle \varphi(u), u\rangle|$.

Exercice 141 (ENSAM PSI 2016 / ICNA PSI 2017 - ❄❄❄)

Quel est le cardinal de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$?

Exercice 142 (ENSEA MP 2017 - ❄❄❄)

Soit A une matrice symétrique réelle telle que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$.
Soit U une matrice orthogonale.
Montrer que $|\mathrm{tr}(AU)| \leq \mathrm{tr}(A)$.

Exercice 143 (Centrale PSI 2021 - ❄❄❄)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et :

$$f_n : P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^1 P(s)s^k \mathrm{d}s\right) X^k \in \mathbb{R}_n[X].$$

1. Justifier que f_n est un automorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit M_n la matrice de f_n dans la base canonique. Soit Y un vecteur colonne.
Montrer que $Y^T M_n Y = \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} y_k s^k\right)^2 \mathrm{d}s$. En déduire que les valeurs propres de f_n sont strictement positives.
3. Soit $\lambda_{1,n}$ la plus petite valeur propre de f_n.
Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \lambda_{1,n} = 0$.

Exercice 144 (Mines - Ponts PSI 2016 - ❄❄❄)

On note $S_n(I)$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n dont les valeurs propres sont dans l'intervalle (non vide) I.

1. Montrer que pour tout $S \in S_n(I)$, et pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\left(\displaystyle\min_{\lambda\in\mathrm{Sp}(S)} \lambda\right).X^T X \leq X^T S X$.
2. Montrer que $S_n(I)$ est une partie convexe de $S_n(\mathbb{R})$.

Exercice 145 (Mines-Ponts PSI 2017 - ❄❄❄)

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux d'un espace euclidien E. Pour tout $f \in \mathcal{O}(E)$, on note $I(f) = \mathrm{Im}(f - Id_E)$ et $K(f) = \mathrm{Ker}(f - Id_E)$ et pour tout $u \in E$ non nul, on note s_u la symétrie orthogonale par rapport à $(\mathbb{R}u)^\perp$.

1. Montrer qu'un s.e.v. F de E est stable par f si et seulement si $F^\perp$ est stable par f.
2. Montrer que si $f \in \mathcal{O}(E)$, alors $E = I(f) \oplus K(f)$ et que cette somme est orthogonale.
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\{u_1, \dots, u_p\}$ une famille libre de E.
Montrer que $I(s_{u_p} \circ \dots \circ s_{u_1}) = \mathrm{Vect}\{u_1, \dots, u_p\}$.

Exercice 146 (Centrale PSI 1017 - ❄❄❄)

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. On note $G = A^T A$ avec $A = [a_{i,j}]$ où $a_{i,j}$ est la i-ème coordonnée de x_j dans $\mathcal{B}$.

1. Exprimer G à l'aide du produit scalaire de E.
2. Montrer que G est diagonalisable à valeurs propres positives.
   Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que ses valeurs propres soient strictement positives.
3. Montrer qu'il existe $(y_1, \ldots, y_{n+1}) \in E^{n+1}$ tel que :

$$\forall i \neq j, \; \|y_i - y_j\| = 1.$$

Exercice 147 (Mines-Ponts PSI 2021 - ❄❄❄)

Soient E un espace euclidien, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et :

$$u : x \in E \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme symétrique de E.
2. Vérifier que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.
3. En déduire qu'il existe un automorphisme symétrique v de E tel que $u^{-1} = v^2$. Est-il unique ?
4. Soit v un automorphisme symétrique v de E tel que $u^{-1} = v^2$. Montrer que $(v(e_1), \ldots, v(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Exercice 148 (Centrale PC 2021 - ❄❄❄)

1. Soient $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs et $Q \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice $Q^T \Delta Q$ est symétrique, à valeurs propres strictement positives.
2. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives. Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que $B = P^T P$ et $A = P^T D P$.

Feuille 18

Espaces Vectoriels normés

Extraits de rapports de jury :

- **Écrit Mines-Ponts 2020 :** Le passage à la limite doit être motivé, par exemple, par la continuité de l'application linéaire $M \longmapsto Q^T MQ$. Une simple locution du type « par unicité de la limite » ou « par passage à la limite » ne peut suffire.
- **Écrit Mines-Ponts 2019 :** Concernant les espaces vectoriels normés, chapitre plus délicat pour les candidats, il est important de maîtriser les concepts d'ouvert, de fermés et de continuité des applications linéaires en dimension finie, équivalent au caractère lipschitzien des applications linéaires continues.
- **Oral Mines-Ponts 2018 :** Les résultats de cours relatifs aux espaces vectoriels normés (continuité des applications linéaires en dimension finie, caractère lipschitzien des applications linéaires continues) sont rarement énoncés et utilisés.
- **Écrit Mines-Ponts 2017 :** Concernant les propriétés de la norme, si elles ont été quasiment toujours correctement citées, l'inégalité triangulaire a été le plus souvent bien mal établie : un argument du type « on passe au sup ». sans plus de précision a été sanctionné.

Exercice 149 (❄)

Sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on définit : $\|A\|_1 = \sum_{i,j=1,\dots,n} |a_{i,j}|$,

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1,\dots,n} a_{i,j}^2} \text{ et } \|A\|_\infty = \max_{i,j=1,\dots,n} |a_{i,j}|.$$

1. Montrer qu'il s'agit de normes sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer des réels strictement positifs a, b, c pour lesquels on ait :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|A\|_1 \leq a\|A\|_2 \leq b\|A\|_\infty \leq c\|A\|_1.$$

Exercice 150 (CCINP PSI 2021 - ❄❄)

On note $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1]),\ f(0) = 0\}$ et pour $f \in E$:

$$N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N'(f) = \|f + f'\|_\infty.$$

1. Montrer que N et N' sont des normes sur E.
2. Établir, pour tout $x \in [0,1]$:
$$e^x f(x) = \int_0^x e^t(f(t) + f'(t))dt.$$
3. Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que :
$$\forall f \in E,\ \alpha N'(f) \leq N(f) \leq \beta N'(f).$$

Exercice 151 (Mines-Ponts PSI 2022 - ❄❄❄)

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $N(A) = \mathrm{tr}(A^T A)$.
Montrer que, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

Exercice 152 (❄❄)

Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|.$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Étudier la convergence pour l'une et l'autre norme de la suite de terme général $P_n = \dfrac{1}{n}X^n$.
3. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 153 (CCINP PSI 2021 - ❄❄)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose :

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|dt.$$

1. Montrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit E est un espace vectoriel réel muni d'une norme N. Montrer que, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $x \in E$, alors $N(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} N(x)$.
3. Pour quelles valeurs de a la suite des $P_n = \left(\dfrac{X}{2}\right)^n$ est-elle convergente pour N_a ?

Exercice 154 (Centrale PC 2019 - ❄❄❄)

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\|P\| = \sum_{k=1}^{n} |P(1/k)| + |P(0)| \text{ et } \|P\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|.$$

Trouver les constantes C_1 et C_2 optimales telles que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad C_1\|P\|_\infty \leq \|P\| \leq C_2\|P\|_\infty.$$

Exercice 155 (Centrale PC 2022 - ❄❄❄)

On note $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1]),\ f(0) = f'(0) = 0\}$ et pour $f \in E$:

$$N(f) = \|f + f''\|_\infty \quad \text{et} \quad N'(f) = \|f\|_\infty + \|f''\|_\infty.$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Soit $g \in \mathcal{C}^0([0,\pi],\mathbb{R})$.
   Montrer que le système $(y'' + y = g,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0)$ possède une unique solution qui est :
   $$x \longmapsto \int_0^x \sin(x-t)g(t)dt.$$
3. On admet que N' est une norme sur E. Montrer qu'il existe deux réels strictement positifs a et b tels que :
   $$\forall f \in E,\ aN'(f) \leq N(f) \leq bN'(f).$$

Exercice 156 (❄❄❄)

1. On note $\ell^\infty(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites de E qui sont bornées.
   (a) Montrer que $\ell^\infty(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Montrer que l'application N_∞ définie par $N_\infty(u) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est une norme sur $\ell^\infty(\mathbb{K})$.
2. On note $\ell^1(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telles que $\sum u_n$ est absolument convergente.
   (a) Montrer que $\ell^1(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Montrer que l'application N_1 définie par $N_1(u) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ est une norme sur $\ell^1(\mathbb{K})$.
3. Ces deux normes sont-elles équivalentes ?

Exercice 157 (❄❄❄)

On note $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et pour $f \in E$, on pose $\mathcal{N}_\infty(f) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$ et $\mathcal{N}'_\infty(f) = |f(0)| + \sup\limits_{t\in[0,1]} |f'(t)|$.

1. Montrer que $\mathcal{N}_\infty$ et $\mathcal{N}'_\infty$ sont deux normes sur E.
2. Démontrer que $\mathcal{N}'_\infty$ domine $\mathcal{N}_\infty$, mais que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 158 (❄❄)

Montrer que $(x,y) \mapsto \max\limits_{t\in[0,1]} |x + ty|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et tracer $B(0,1)$.

Exercice 159 (Centrale PSI 2019 - ❄❄)

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose $\varphi(A) = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^n |a_{i,j}|$.

1. Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :
   $$\forall i \in [\![1,n]\!], |a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$$
   (matrice à diagonale strictement dominante).
   Montrer que pour tout $b \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'équation $AX = b$ admet une unique solution dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Exercice 160 (Centrale PSI 2018 - ❄❄)

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/6 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$.
Déterminer la plus petite constante $C \geq 0$ telle que :

$$\forall X \in \mathbb{R}^3,\ \|MX\| \leq C\|X\|,$$

Avec $\|\ \| = \|\ \|_1$, puis $\|\ \| = \|\ \|_\infty$, puis $\|\ \| = \|\ \|_2$.

Exercice 161 (Parties bornées - ❄)

Les ensembles suivants sont-ils des parties bornées ?

1. $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^4 = 1\}$
2. $E_2 = \{(n^2 - 1, e^{-n}),\ n \in \mathbb{N}\}$
3. $E_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 = y(y-1)\}$
4. $E_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$

Exercice 162 (Parties bornées - ❄)

Dans $\mathbb{R}^3$, démontrer que $A = \{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3,\ x+y+z \leq 1\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 163 (Parties bornées - ❄)

Soit E un espace vectoriel normé et $F \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de E. F est-il borné ?

Exercice 164 (❄)

Démontrer que l'application suivante est bornée.

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \left(\operatorname{th}(x+y), xye^{-x^2-y^2}, \frac{x}{1+x^2+2y^2}\right).$$

Exercice 165 (❄❄)

Soient A, B deux parties d'une espace vectoriel normé de dimension finie. On pose :

$$A + B = \{a + b,\ a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Les assertions suivantes sont-elles vraies ? Justifier.

1. A et B ouverts $\implies$ $A + B$ ouvert.
2. A et B fermés $\implies$ $A + B$ fermé.

Exercice 166 (Parties ouvertes, parties fermées - ❄)

Représenter graphiquement l'ensemble

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - y^2 \geq 0 \text{ et } x^2 + 2x + y^2 \leq 0\}$$

et montrer que E est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 167 (Parties ouvertes, parties fermées - ❄)

1. Représenter graphiquement l'ensemble
   $$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| \leq 1 \text{ et } |y| \geq 0\}$$
   et montrer que E est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.
2. E est-il une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 168 (Parties ouvertes, parties fermées - ❄)

1. Représenter graphiquement l'ensemble
$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + 2y^2 > 1\}$$
et montrer que E est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
2. E est-il une partie fermée de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 169 (❄)

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.
Démontrer que l'adhérence de la boule ouverte $B(0, 1)$ est la boule fermée $\bar{B}(0, 1)$.

Exercice 170 (Parties ouvertes, parties fermées - ❄❄)

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si tous ses coefficients sont dans $[0, 1]$ et si la somme des coefficients de chacune de ses lignes est égale à 1.
Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 171 (Parties ouvertes, parties fermées - ❄❄)

Montrer que l'ensemble des matrices antisymétriques est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 172 (Parties ouvertes, parties fermées - ❄❄)

Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{C})$ est une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Est-ce une partie fermée ?

Exercice 173 (Parties ouvertes, parties fermées - ❄❄)

Montrer que l'ensemble $E = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X],\ \displaystyle\int_0^1 P(t)dt = 1\right\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 174 (Parties ouvertes, parties fermées - ❄❄)

Montrer que l'ensemble $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{tr}(M) > 0\}$ est une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 175 (❄❄)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie.

1. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des projecteurs de E. Montrer que $\mathcal{P}$ est une partie fermée de $\mathcal{L}(E)$.
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Montrer que l'ensemble $\{f \in \mathcal{L}(E), P(f) = 0\}$ est une partie fermée de E.

Exercice 176 (Parties ouvertes, parties fermées - ❄❄)

L'ensemble $\mathcal{D}_n$ des matrices diagonalisables est-il une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 177 (Parties ouvertes, parties fermées - ❄❄)

L'ensemble $\mathcal{N}_n$ des matrices nilpotentes est-il une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? une partie ouverte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 178 (❄❄)

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E de dimension finie.

1. Démontrer que si l'intérieur de F est non vide, alors $F = E$.
2. Démontrer que si F est de dimension finie, alors $F = adh(F)$, autrement dit F est fermé.

Exercice 179 (❄❄)

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.
Montrer que l'intérieur et l'adhérence d'une partie convexe C de E sont des parties convexes.

Exercice 180 (Extrait E3A PSI 2018 - ❄❄)

On note $\mathcal{D}_2$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et
$$\Omega = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid (a-d)^2 + 4bc > 0\right\}$$
$$F = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid (a-d)^2 + 4bc \geqslant 0\right\}$$

1. Montrer que Ω est un ouvert de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et F un fermé de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Prouver que l'on a : $\Omega \subset \mathcal{D}_2 \subset F$.
3. $\mathcal{D}_2$ est-il un fermé de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? un ouvert de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Justifier.

Exercice 181 (Extrait E3A PSI 2017 - ❄❄)

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soient $A \in \mathcal{N}, \alpha \in \mathbb{R}^*$ et $M = I_n + \alpha A$.
Montrer que $\det(M) = 1$.
En déduire que toute boule ouverte de centre A contient au moins une matrice de rang n puis que l'intérieur de $\mathcal{N}$ est vide.
3. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que si l'intérieur de F est non vide alors $F = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 182 (Mines-Ponts 2018 - ❄❄❄)

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et A une partie ouverte de E.
Montrez que $U = \displaystyle\bigcup_{a \in A} \overline{B(a, 1)}$ est un ouvert.

Exercice 183 (Centrale PC 2022 - ❄❄❄)

Soit $a \in]0, 1[$. On note F le sous-espace vectoriel de $E = \mathcal{C}([-a, a], \mathbb{R})$ constitué des fonctions polynomiales.

1. On pose $f_n : x \longmapsto 1 + x + \cdots + x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément de E au sens de la norme $\|\ \|_\infty$.
2. Le sous-espace F est-il fermé pour $\|\ \|_\infty$?
3. Soit $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que la suite $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée pour $\|\ \|_\infty$.
Montrer que f appartient à l'adhérence de F.

Exercice 184 (Centrale 2016 PSI maths 1 - ❄❄)

Soit $\mathcal{Y}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $[0,1]$.

1. Montrer que $\mathcal{Y}_n$ est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{Y}_n$ est une partie compacte (i.e. fermée et bornée) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 185 (Centrale 2014 PSI maths 1 - ❄❄)

Soit $z \in \mathbb{C}$. On note Ω_z l'ensemble des points du plan d'affixe complexe Z tels que $|Z(Z-2z)| < 1$.

1. Justifier que Ω_z est une partie bornée du plan.
2. Est-elle ouverte ? Fermée ?

Exercice 186 (❄)

1. La fonction f est-elle continue ? ses applications partielles le sont-elles ?
$$f : \begin{cases} (x,y) & \longrightarrow \quad \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ (0,0) & \longrightarrow \quad 0. \end{cases}$$
2. La fonction f est-elle continue ? ses applications partielles le sont-elles ?
$$f : \begin{cases} (x,y) & \longrightarrow \quad \dfrac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ (0,0) & \longrightarrow \quad 0. \end{cases}$$
3. La fonction g est-elle continue ?
$$g : \begin{cases} (x,y) & \longrightarrow \quad \dfrac{\ln(1+x^4)}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ (0,0) & \longrightarrow \quad 0. \end{cases}$$

Exercice 187 (❄❄)

La fonction suivante est-elle continue ?
Ses applications partielles le sont-elles ?
$$h : \begin{cases} (x,y) & \longrightarrow \quad y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) \quad \text{si} \quad y \neq 0, \\ (x,0) & \longrightarrow \quad 0. \end{cases}$$

Exercice 188 (❄)

Est-il possible de prolonger par continuité, la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, par $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^4+y^2}$?

Exercice 189 (❄)

Soit E un espace vectoriel normé (de dimension finie ou non). Montrer que l'application $h : x \longmapsto \dfrac{x}{1+\|x\|}$ est continue.

Exercice 190 (❄)

On note $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par
$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \; A(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} & (t-1)^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la norme $\|M\|_\infty = \max\limits_{i,j=1,2} |m_{i,j}|$.

1. La fonction A est-elle continue sur $\mathbb{R}^+$?
2. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on pose $\varphi(t) = \|A(t)\|_\infty$.
Déterminer $\varphi(t)$ et montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 191 (❄❄)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \qquad g(x,y) = \frac{1}{x}\int_x^{xy} f(t)dt.$$

1. Montrer que g est continue sur son ensemble de définition.
2. Montrer que g est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 192 (Distance à une partie - ❄❄)

Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et A une partie non vide de E. Pour tout $x \in E$, on définit la distance de x à A par
$$d(x,A) = \inf_{a \in A} ||x-a||.$$

1. Justifier l'existence de $d(x,A)$.
2. Montrer que pour tout $(x,y) \in E$, on a
$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq ||x-y||.$$
L'application $x \in E \longmapsto d(x,A)$ est-elle continue ?
3. Que vaut $d(x,A)$ si $x \in A$?
4. Montrer que $\quad d(x,A) = 0 \iff x$ est adhérent à A.

Exercice 193 (CCP PSI 2019 - ❄❄)

Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E et $k \in \mathbb{R}_+^*$.
Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une application $k-$lipschitzienne et :
$$g : x \in E \longmapsto \inf_{y \in A}\{k\|x-y\| + f(y)\}.$$

1. Montrer que g est bien définie et qu'on peut prolonger f par g sur E.
2. Montrer que g est $k-$lipschitzienne.

Exercice 194 (❄❄❄)

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. On se donne une partie F fermée et bornée de E et une application $f : F \longrightarrow F$ vérifiant :
$$\forall (x,y) \in F^2, \qquad x \neq y \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x-y\|.$$

1. Montrer que si f admet un point fixe alors il est unique.
2. Démontrer que $g : x \in F \longmapsto \|f(x) - x\|$ est lipschitzienne.

Exercice 195 (❄❄❄)

Sur $E=\mathbb{R}[X]$ on définit

$$\forall P(X)=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k,\qquad N(P)=\sup_{0\le k\le n}|a_k|.$$

On note A l'ensemble des polynômes non nuls de E dont le coefficient dominant est strictement positif.

1. Montrer que l'application N est une norme sur E.
2. Soit $P(X)=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in E$. Montrer que P est adhérent à A si et seulement si $a_n \geq 0$.
3. Soit $c\in\mathbb{R}$. On considère l'application

$$\varphi_c : \left\{ \begin{array}{rcl} (\mathbb{R}[X],N) & \longrightarrow & (\mathbb{R},|.|) \\ P & \longmapsto & P(c). \end{array} \right.$$

   (a) Montrer que φ_c est une forme linéaire.
   (b) Montrer que φ_c est continue si et seulement si $|c|<1$.

Exercice 196 (Mines-Ponts PC 2022 - ❄❄❄)

On munit $E=\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\|\ \|_\infty$.
Soit φ une forme linéaire sur E telle que :

$$\forall f\in E,\quad (f\geq 0)\implies (\varphi(f))\geq 0).$$

Montrer que φ est continue.

Exercice 197 (❄❄)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie.

1. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des projecteurs de E. Montrer que $\mathcal{P}$ est une partie fermée de $\mathcal{L}(E)$.
2. Soit $P\in\mathbb{K}[X]$.
   Montrer que l'ensemble $\{f\in\mathcal{L}(E), P(f)=0\}$ est une partie fermée de E.

Exercice 198 (TPE 2019 (Jade C.) - ❄❄)

Soit $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On suppose que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $P\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
Montrer que P et A commutent, et que P est une matrice de projection.

Exercice 199 (CCP MP 2018 - ❄)

1. Montrer que $M=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/3 & 5/12 \\ 1/4 & 5/12 & 1/3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et donner ses éléments propres.
2. Montrer que $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite N que l'on calculera.
3. Montrer que N représente un projecteur dont on donnera les éléments caractéristiques.

Exercice 200 (EIVP PSI 2017 - ❄❄)

Soit $n\geq 2$ un entier et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$3A^3=A^2+A+I_n.$$

Montrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice B de projecteur.

Exercice 201 (❄❄)

Soit $E=\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On pose :

$$\forall M=[m_{i,j}]_{i,j=1,\dots,p}\in E,\ \|M\|=\sup_{i=1,\dots,p}\left(\sum_{j=1}^{p}|m_{i,j}|\right).$$

1. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur E.
2. Démontrer que pour tout $(A,B)\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})^2$ on a
$$\|AB\|\leq\|A\|.\|B\|.$$
3. Soit $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable telle que
$$\mathrm{Sp}(A)\subset]-1,1[.$$
   Montrer que $A^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
4. Démontrer que si λ est valeur propre de A alors $|\lambda|\leq\|A\|$.
5. Soit $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $\|A\|<1$.

(a) Démontrer que $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.
(b) Démontrer que la matrice I_p-A est inversible.
(c) On note $S_n=\sum_{k=0}^{n}A^k$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}(S_n(I_p-A))$.
(d) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et trouver sa limite.

Exercice 202 (❄❄)

Soit $E=\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $||\ .\ ||$ une norme sur E. Pour $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on pose

$$|||A|||=\sup\{||AX||,\ X\in E \text{ et } ||X||=1\}.$$

1. Justifier l'existence de $|||A|||$.
2. Démontrer que $A\longmapsto|||A|||$ est une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
3. Démontrer que pour toutes $A,B\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on a
$$|||AB|||\leq|||A|||.|||B|||.$$
4. Soit $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable.
   (a) Démontrer que si $\mathrm{Sp}(A)\subset[-1,1]$ alors la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   (b) Démontrer que si $\mathrm{Sp}(A)\subset]-1,1[$ alors la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 203 (CCP PC 2019 - ❄❄)

Pour $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose :

$$\|A\|=\max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|.$$

On admet que $\|.\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note aussi $\rho(A)$ le plus grand module des valeurs propres de A.

1. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. On pose $A=\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & e^{i\theta}\end{pmatrix}$.
   Calculer $\|A\|$ et $\rho(A)$.
2. Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$.
3. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\rho(A)\leq\|A\|$.
4. Soient $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $k\in\mathbb{N}$. Montrer que $\rho(A^k)=\rho(A)^k$.
5. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose A diagonalisable.
   Montrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 si et seulement si $\rho(A)<1$.

Exercice 204 (CCP PC 2019 - ❄❄)

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout (i,j), $a_{i,j} > 0$ et, pour tout i, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

On admet que $\mathrm{rg}(A - I_n) = n - 1$.

Si $X = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $\|X\| = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(A - I_n)$.
2. Montrer que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\|AX\| \leq \|X\|$.
3. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $|\lambda| \leq 1$.
4. On pose $B = A + I_n = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.
   Montrer que, pour tout i, $b_{i,i} > \displaystyle\sum_{j\neq i} b_{i,j}$.
5. Montrer que B est inversible.
6. Montrer que $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice R, et que R est semblable à $\mathrm{diag}(1, 0, \ldots, 0)$.

Exercice 205 (❄❄)

On se donne une norme $X \longmapsto \|X\|$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on définit les fonction N_1, N_2, N_3 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$N_1(A) = \sup_{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}} \frac{\|AX\|}{\|X\|},$$

$$N_2(A) = \sup_{\|X\|\leq 1} \|AX\| \quad \text{et} \quad N_3(A) = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|.$$

1. Démontrer que $N_1 = N_2 = N_3$ et qu'elles définissent une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   On note désormais N cette norme.
2. Montrer que pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $N(AB) \leq N(A)N(B)$.
3. Déterminer N lorsque $\|.\| = \|.\|_1$ et lorsque $\|.\| = \|.\|_\infty$.

Exercice 206 (❄❄)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Déterminer f sur $\mathbb{N}$, puis sur $\mathbb{Q}$, puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 207 (❄❄)

On se donne deux parties A et B d'un espace vectoriel normé E. On suppose que A et B sont denses dans E.

1. Montrer que si A est une partie ouverte, alors $A \cap B$ est dense dans E.
2. Montrer que si $A \cap B = \emptyset$ alors A et B sont d'intérieur vide.

Exercice 208 (Mines-Ponts PC 2022 - ❄❄❄)

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{C})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. A-t-on aussi $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 209 (❄❄❄)

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. En déduire que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 210 (Centrale PC 2019 - ❄❄❄)

1. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \chi_A(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

Exercice 211 (Mines-Ponts PC 2022 - ❄❄❄)

Soient $A_1, \ldots, A_r$ des parties denses et ouvertes d'un espace vectoriel normé E. On rappelle qu'une partie est dense si son adhérence est égale à E.

Montrer que $A_1 \cap \cdots \cap A_r$ est ouverte et dense.

Exercice 212 (Centrale PSI 2021 - ❄❄❄)

1. La matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Est-elle limite d'une suite de matrices diagonalisables ?
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe $c > 0$ tel que :
   $$\forall z \in C,\ |P(z)| \geq c|\mathrm{Im}(z)|^n.$$
3. Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$ convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 213 (Mines-Ponts PC 2019 - ❄❄❄)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :
   $$k \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{tr}(M^k) = 0.$$
   Montrer que M est nilpotente.
2. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{C}$, A est semblable à $A + tB$. Montrer que B est nilpotente.
3. Soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices semblables entre elles. On suppose que $M_k \underset{k\to 0}{\longrightarrow} 0$. Montrer que M_0 est nilpotente.
4. Soit réciproquement M0 une matrice nilpotente. Montrer qu'il existe une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices semblables entre elles telle que $M_k \underset{k\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 214 (Mines-Ponts PC 2019 - ❄❄❄)

Soit $n \geq 2$ un entier.

Soient $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, convergeant respectivement vers A et B. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A_k est semblable à B_k.

Est-il vrai que A est semblable à B ?

Exercice 215 (Centrale PSI 2022 - ❄❄❄)

1. Soient $P \in \mathbb{C}[X]$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   Montrer que, si A est semblable à B, alors $P(A)$ est semblable à $P(B)$.
2. Soit $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui converge vers $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, B_k est semblable à une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable.
   Montrer que B est semblable à A.
3. Est-ce encore vrai si A n'est pas diagonalisable ?

Exercice 216 (❄❄❄)

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $u \in \mathcal{L}(x)$ tel que :

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leq \|x\|.$$

Montrer que $\mathrm{Ker}(u - Id) \cap \mathrm{Im}(u - Id) = \{0\}$.

Exercice 217 (Centrale PSI 2018 - ❄❄❄)

Soit φ l'application qui à une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe la somme des carrés de ses coefficients.

1. Montrer que $N : M \longmapsto \sqrt{\varphi(M)}$ est une norme.
2. Montrer que deux matrices semblables n'ont pas nécessairement la même norme.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$.
4. Trouvez l'ensemble des matrices $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = \varphi(P^{-1}MP)$.

Feuille 19

Équations Différentielles

Extraits de rapports de jury :

- **CCINP 2022 PSI :** Les équations différentielles restent un sujet qui pose des difficultés à beaucoup de candidats. En particulier, la structure de l'ensemble des solutions est souvent mal connue, et la technique du changement de variable, toujours guidée, n'est pas toujours bien menée : certains candidats n'introduisent pas de bonnes notations et ne voient pas qu'il y a lieu de dériver des fonctions composées.
- **CCINP 2020 PSI :** Le principe de recherche d'une solution développable en série entière d'une équation différentielle et en miroir le principe de détermination d'une équation différentielle vérifiée par une fonction somme d'une série entière sont compris. En revanche les calculs ne sont que rarement terminés et justes, le plus souvent à cause d'une mauvaise manipulation des indices des sommes.
- **Oral CCP 2018 :** Les exercices avec des équations différentielles posent souvent des diffcultés aux candidats, notamment calculatoires, que ce soit lors de la recherche d'une solution somme d'une série entière avec des changements d'indice très laborieux ou lors de la recherche de primitives.
- **Centrale 2022 PSI :** Pour les équations différentielles on déplore l'utilisation inappropriée de l'équation caractéristique dans la résolution de l'équation différentielle $y'' = \pm y$, ce qui reste toutefois moins grave que son utilisation dans le cas d'une équation à coefficients non constants. La méthode dite de « variation de la constante », utile (entre autre) à la résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre avec second membre, s'apparente pour les candidats fort souvent à une recette, présentée sans rigueur, et sans que l'on sache si l'on procède par condition nécessaire ou suffisante. Rappelons que l'oxymore cache un simple changement de fonction inconnue qui permet de donner par équivalence la solution générale l'équation avec second membre. Les étudiants ne sont pas familiers avec les techniques de recollement des solutions d'une équation différentielle. La structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire est parfois ignorée.
- **Oral Centrale 2021 :** Pour les équations différentielles on déplore l'utilisation inappropriée de l'équation caractéristique dans la résolution de l'équation différentielle $y'' = \pm y$, ce qui reste toutefois moins grave que son utilisation dans le cas d'une équation à coefficients non constants. La méthode dite de « variation de la constante », utile (entre autre) à la résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre avec second membre, s'apparente pour les candidats fort souvent à une recette, présentée sans rigueur, et sans que l'on sache si l'on procède par condition nécessaire ou suffisante. Rappelons que l'oxymore cache un simple changement de fonction inconnue qui permet de donner par équivalence la solution générale l'équation avec second membre. Les étudiants ne sont pas familiers avec les techniques de recollement des solutions d'une équation différentielle. La structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire est parfois ignorée.
- **Oral Centrale 2018 :** Faut-il préciser que le théorème de Cauchy-Lipschitz a des hypothèses, qu'il faut se placer sur un intervalle ? La méthode de variation de la constante est un outil indispensable et les étudiants doivent savoir obtenir une expression des solutions à l'aide d'intégrales si les primitives ne sont pas connues.

Exercice 218 (❆)

Résoudre les équations différentielles suivantes avec condition initiale.

1. $(\mathcal{E}_1) : \ y' = \sin(x) + 2y$ avec $y(\pi) = 0$.
2. $(\mathcal{E}_3) : \ y'' + 4y' + 3y = \mathrm{ch}(x)$ avec $y(0) = 1$.

Exercice 219 (❆)

Résoudre les équations différentielles suivantes. On précisera la structure des ensembles solutions.

$(\mathcal{E}_1) : \ y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^{\alpha t}$.
$(\mathcal{E}_2) : \ y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = \sin(t)$.

Exercice 220 (Navale PSI 2021 (Louis-Victor G.) - ❆)

Résoudre $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = e^{-t}\cos(t)$.

Exercice 221 (❆)

Résoudre les équations différentielles suivantes.
On précisera les intervalles de résolution, les raccordements éventuels et la structure des ensembles solutions.

$(\mathcal{E}_1) : \ t(1+t^2)y'(t) = y(t)$
$(\mathcal{E}_2) : \ (e^t - 1)y'(t) + e^t y(t) = 1$.

Exercice 222 (❆)

Résoudre les équations différentielles suivantes.
On précisera les intervalles de résolution, les raccordements éventuels et la structure des ensembles solutions.

$(\mathcal{E}_1)$: $ty' - t = t^2 e^t$
$(\mathcal{E}_2)$: $(t-1)y'(t) - 2y(t) = 1$.

Exercice 223 (❆)

Résoudre les équations différentielles suivantes.
On précisera les intervalles de résolution, les raccordements éventuels et la structure des ensembles solutions.

$(\mathcal{E}_1)$: $\mathrm{sh}(t)y'(t) - \mathrm{ch}(t)y(t) = 1$.
$(\mathcal{E}_2)$: $ty'(t) - (1+t)y(t) + (1+t^2)e^t = 0$.

Exercice 224 (CCP PC 2013 - ❆)

Résoudre sur $]0, +\infty[$ puis sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) : \quad xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}.$$

Exercice 225 (CCINP PC 2019 - ❆❆)

1. Calculer les parties réelles et imaginaires de $\dfrac{1}{x+i}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire les solutions de l'équation $(\mathcal{E})$: $y' + \dfrac{1}{2(x+i)}y = 0$.
3. On pose $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$.
   (a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée à l'aide d'une intégrale.
4. Montrer que f est solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$.
5. Soit $I : \alpha \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}\sin(t)}{\sqrt{t}}dt$.
   (a) Montrer que I est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Exprimer I en fonction de f. En déduire le signe de I.

Exercice 226 (CCP PSI 2017 à 2019 (T. Leroy) - ❆❆)

1. Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$:
$$\frac{1}{t(t^2-1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{t+1}.$$
2. Résoudre $(\mathcal{E})$: $t(t^2-1)x'(t) + 2x(t) = t^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 227 (IMT 2019 - ❆❆)

Résoudre $\mathcal{E} : |x|y' + (x-1)y = x^2$

Exercice 228 (CCINP PSI 2019 - ❆❆)

Soit l'équation différentielle $\mathcal{E}$: $xy' - 2|y| = x$. On suppose qu'il existe une solution f de $\mathcal{E}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $f(0) = 0$.
2. Montrer que f est strictement positive sur $]0, +\infty[$.
3. En déduire la forme générale de f.
4. Conclure qu'il n'existe aucune solution de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 229 (E3A 2018 PSI (maths 2) - ❆❆)

Soit $a > 0$ et f une fonction continue et bornée sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$. On note :

$$(\mathcal{E}) : \ y' - ay + f = 0.$$

1. Soit z de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
   Montrer que z est solution de $(\mathcal{E})$ si et seulement si il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall z \in I, \ z(x) = e^{ax}\left(K - \int_1^x e^{-at}f(t)dt\right).$$
2. Prouver que s'il existe une solution de $(\mathcal{E})$ qui soit bornée sur I, alors elle est unique.
3. Vérifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-at}f(t)dt$ est convergente.
4. Démontrer que la fonction
$$F : x \in I \longmapsto e^{ax}\int_x^{+\infty} e^{-at}f(t)dt$$
   est l'unique solution de $(\mathcal{E})$ bornée sur I.

Exercice 230 (❆❆)

Prouver que toute solutionde l'équation différentielle

$$y' + e^{x^2}y = 0$$

a une limite nulle en $+\infty$.

Exercice 231 (CCINP PSI 2022 - ❆)

Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie une équation différentielle du premier ordre.
3. On donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$.
   Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 232 (Mines-Ponts PC 2015 - ❆❆)

Déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 2\int_0^x f(t)\cos(x-t)dt.$$

Exercice 233 (Centrale MP 2001 - ❆❆)

Soit f continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y + f = 0$.

1. Résoudre (E).
   On écrira les solutions à l'aide d'une intégrale dépendant de f.
2. Montrer que (E) admet une unique solution F bornée sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}$ et comparer les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$.

Exercice 234 (❄❄)

Soient $a, b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec a impaire et b paire. Montrer que l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) : \; y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

admet une unique solution impaire.

Exercice 235 (❄)

On considère l' équation différentielle

$$(\mathcal{E}) : \; y'''(t) - 2y''(t) - y'(t) + 2y(t) = 0.$$

1. Pour $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fois dérivable, on pose :

$$X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}.$$

Déterminer une matrice A telle que :

$$y \text{ est solution de } (\mathcal{E}) \text{ sur } \mathbb{R} \iff \left\{ \begin{array}{l} X \text{ est solution de} \\ (\mathcal{S}) : \; X' = AX \text{ sur } \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

2. En déduire la résolution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 236 (❄)

Résoudre les systèmes différentiels suivants.

$$(\mathcal{S}_1) : \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t) + y(t) \\ y'(t) & = & -2x(t) + 3y(t) \\ \text{et} & & x(0) = 1, \; y(0) = -1 \end{array} \right.$$

$$(\mathcal{S}_2) : \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & 2x(t) + 3y(t) + 3z(t) \\ y'(t) & = & 3x(t) + 2y(t) + 3z(t) \\ z'(t) & = & 3x(t) + 3y(t) + 2z(t) \end{array} \right.$$

Exercice 237 (CCP MP 2018 - ❄)

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A. Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.
3. Résoudre le système différentiel $\mathcal{S} : \left\{ \begin{array}{l} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{array} \right.$

Exercice 238 (CCINP PSI 2021 (Ilyana D.) - ❄❄)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.
   Trouver une base $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ telle que $T = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ soit triangulaire. Préciser T.
3. Résoudre le système différentiel $\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 2x + y \\ y' & = & -x + 4y \end{array} \right.$

Exercice 239 (CCP PSI 2017 - ❄❄)

Résoudre le sustème $\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & y - z \\ y' & = & -2x + y - z \\ z' & = & -2x + 3y + z \end{array} \right.$

Exercice 240 (❄)

Résoudre le système différentiel :

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & (2-t)x + (t-1)y \\ y' & = & 2(1-t)x + (2t-1)y \end{array} \right.$$

Exercice 241 (❄)

Résoudre l'équation différentielle suivante.

$$(\mathcal{E}) : \qquad (1 + x^2)y'' + xy' - 4y = 0.$$

On pourra faire le changement de variable $x = \mathrm{sh}(t)$.

Exercice 242 (❄❄)

Résoudre $(\mathcal{E}) : \; xy''(x) + y'(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
Que dire de la dimension de l'espace des solutions. Commenter.

Exercice 243 (❄)

En posant $t = $Arctan$(x)$, résoudre :

$$(\mathcal{E}) : \; y''(x) + \frac{2x}{1+x^2} y'(x) + \frac{y(x)}{(1+x^2)^2} = 0.$$

Exercice 244 (EIVP PSI 2017 - ❄)

1. Résoudre $(\mathcal{E}) : \; y'' + \dfrac{1}{t^2} y = 0$ sur $]0, +\infty[$ en posant $t = \mathrm{e}^x$.
2. Trouver toutes les fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ telles que $\forall t > 0, \; f'(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

Exercice 245 (CCP PSI 2013 - ❄❄)

On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : \; x^2 y'' - 2y = 3x^2$.

1. Déterminer les solutions polynômiales de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$.
2. Résoudre $(\mathcal{E})$.

Exercice 246 (❄❄)

On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) : \qquad x^2 y''(x) - 4xy'(x) + 6y(x) = x.$$

1. Déterminer les solutions puissances de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$.
2. En déduire les solutions de cette équation homogène sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
3. Déterminer une solution particulière de $(\mathcal{E})$. En déduire ses solutions sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
4. Résoudre $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ et préciser la structure des solutions.

Exercice 247 (ENSEA PSI 2021 - ❄❄)

Déterminer les solutions de $(\mathcal{E})$: $xy'' - (x+1)y' + y = 0$ développables en série entière.

Exercice 248 (Mines-Ponts PC 2017 - ❄❄)

Soit $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle $2xy'' + y' - y = 0$.

1. Trouver une solution f de $(\mathcal{E})$ développable en série entière au voisinage de 0 et telle que $f(0) = 1$.
2. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.
3. Résoudre $(\mathcal{E})$.

Exercice 249 (ENSAM PSI 2018 - ❄❄)

1. Déterminer le rayon de convergence de :
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$
2. Montrer que f est solution de $(\mathcal{E})$: $(1-x^2)y' - xy = 1$.
3. En déduire une expression de $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 250 (CCINP PSI 2018, 2022 (Mathilde P.) - ❄

Soit $f : x \longmapsto \operatorname{Arcsin}(x)\sqrt{1-x^2}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en précisant son intervalle de définition.
2. Trouver des solutions polynomiales $a(x), b(x)$ et $c(x)$ telles que f soit solution de l'équation différentielle du premier ordre $(\mathcal{E})$: $a(x)y' + b(x)y = c(x)$.
3. Montrer qu'il existe une unique solution impaire développable en série entière au voisinage de 0 qui soit solution de $(\mathcal{E})$.
Montrer que f est cette solution.
4. En déduire un développement en série entière au voisinage de 0 de f.

Exercice 251 (ENTPE - EIVP PSI 2010 - ❄❄)

Pour tout $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \dfrac{\operatorname{Arctan}(x)}{\sqrt{x^2 - 1}}$.
Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 puis établir qu'elle est développable en série entière autour de 0.

Exercice 252 (CCINP PSI 2018 (Matthieu D.)- ❄❄)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $a_0 = a_1 = 1$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $1 \leq a_n \leq n^2$.
2. Calculer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.
3. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 que vérifie la somme de cette série.
4. Résoudre cette équation.

Exercice 253 (❄❄)

On suppose que $\sum b_n x^n$ est solution de :
$$(\mathcal{E}) :\ x^2 y'' + xy' - y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$
Exprimer a_n en fonction de b_n. En déduire une condition sur les a_n pour qu'une telle solution existe.

Exercice 254 (Centrale PC 2018 - ❄❄)

On pose $a_n = \dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

1. Donner une relation entre a_n et a_{n+1} et trouver le rayon de convergence R de la série entière f.
2. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par f.
3. La résoudre et en déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 255 (CCP MP 2014 - ❄❄)

1. Déterminer les solutions développables en série entière de
$$(\mathcal{E}) :\ x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0.$$
2. Calculer leurs sommes.
3. Décrire un moyen d'obtenir les solutions sur $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

Exercice 256 (CCINP PC 2022 - ❄❄)

On étudie sur $]0, +\infty]$ l'équation différentielle
$$(\mathcal{E}) :\ x^2 y'' + 4xy' + 2y = \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

1. Donner les solutions de l'équation homogène de la forme $x \longmapsto x^\alpha$. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation homogène.
2. Chercher les solutions de $(\mathcal{E})$ sous la forme $x \longmapsto \dfrac{z(x)}{x^2}$ et résoudre $(\mathcal{E})$.

Exercice 257 (CCINP PSI 2022 (Aubin G.) - ❄❄)

On veut résudre $(*)$: $(x^2-1)y'' + 2xy' - 2y = 0$ sur $]-1, 1[$.

1. Déterminer les solutions polynomiales de $(*)$.
2. Déterminer une équation différentielle vérifiée par z en posant $y(x) = xz(x)$.
3. Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$ on ait
$$\frac{2(2x^2-1)}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}.$$
4. Résoudre l'équation différentielle vérifiée par z.
5. Résoudre $(*)$.

Exercice 258 (Mines-Ponts PC 2018 - ❄❄)

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$.

Exercice 259 (❄❄)

On considère l'équation différentielle suivante.

$$(\mathcal{E}): \quad (1+t^2)y'' - 2y = t.$$

1. Déterminer une solution particulière polynomiale de l'équation homgène associée à $(\mathcal{E})$.
2. A l'aide de la méthode de Lagrange, en déduire les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 260 (❄❄)

Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f''(x) + f(-x) = \cos(x).$$

Exercice 261 (❄❄)

Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(-x) = x.$$

Exercice 262 (ENTPE PC 2016 - ❄)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ centré en zéro, $\varphi \in \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$ une fonction paire et l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}): \; y''(x) + \varphi(x)y(x) = 0.$$

Soit y une solution de $(\mathcal{E})$. Montrer que y est de classe $\mathcal{C}^2$ et que la fonction $x \longmapsto y(-x)$ est également solution de $(\mathcal{E})$.
Montrer que si de plus $y'(0) = 0$, alors y est une fonction paire.

Exercice 263 (Mines-Ponts PSI 2018 - ❄❄)

Soit y_n la solution de $(\mathcal{E}_n) : (n+1)y'' - (2n+1)y' + ny = 0$ vérifiant les conditions initiales $y_n(0) = 0$ et $y_n'(0) = 1$.

1. Déterminer y_n et montrer que la suite de fonctions $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour tout $x < 0$ on a $0 \leq e^x - 1 - x \leq \dfrac{x^2}{2}$.
3. En déduire que la suite de fonctions $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}^+$.

Exercice 264 (❄❄)

On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}): \; t^2z''(t) + 3tz'(t) + 4z(t) = t\ln(t).$$

1. Soit $z :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $y(x) = z(e^x)$.
   Démontrer que z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ si et seulement si y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que z est solution de $(\mathcal{E})$ sur $]0,+\infty[$ si et seulement si y est solution d'une équation différentielle linéaire $(\mathcal{E}')$ de degré 2 que l'on précisera.
3. Résoudre $(\mathcal{E}')$ et en déduire les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 265 (❄❄)

Résoudre l'équation différentielle suivante.

$$(\mathcal{E}): \qquad (1+e^x)y'' + y' - e^x y = 0.$$

On pourra faire le changement de fonction $z = y' + y$.

Exercice 266 (❄❄)

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\varphi : E \longrightarrow E$, définie par $\varphi(f) = g$ où g est l'application $g : t \longmapsto f'(t) + tf(t)$.

1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.
2. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de φ^2.
3. Résoudre l'équation : $y'' + 2xy' + (x^2-1)y = 0$.

Exercice 267 (Mines - Ponts PSI 2016 - ❄❄❄)

Montrer que D définie par $D(f)(x) = xf'(x)$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Trouver $\ker(D)$, puis les éléments propres de D.

Exercice 268 (Mines-Ponts MP 2017 - ❄❄)

Soient a et b continues et 1-périodiques sur $\mathbb{R}$, et soit y solution de $(\mathcal{E}): \; y'' + ay' + by = 0$ telle que $y(0) = y(1) = 0$.
Montrer que y s'annule en tout $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 269 (Centrale PSI 2016 - ❄❄❄)

1. Montrer que $(\mathcal{E}) : y'' = (x^4+1)y$ admet une unique solution y telle que $y(0) = y'(0) = 1$.
2. Soit f une solution de $(\mathcal{E})$.
   On suppose que $\dfrac{1}{f^2}$ est définie et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   Montrer que $F : x \longmapsto f(x)\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{f^2(t)}$ est également solution de $(\mathcal{E})$.
3. Montrer que si f est solution de $(\mathcal{E})$ et si $f(0) = f'(0) = 1$, alors $\dfrac{1}{f^2}$ est définie et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 270 (Centrale PC 2021 - ❄❄❄)

1. Soit $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $g'' \leq 0$. Montrer que :
   $$\forall (t_0,t) \in \mathbb{R}^2, \; g(t) \leq g(t_0) + (t-t_0)g'(t_0).$$
2. Soit $a > 0$. Soit q une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall t \in R, q(t) \geq a$.
   Soit f une solution de l'équation différentielle $y'' + qy = 0$.
   Montrer que l'ensemble des zéros de f n'est pas majoré.

Feuille 20

Fonctions numériques, fonctions vectorielles

Extraits de rapports de jury :

- **Oral CCINP PSI 2023 :** Un nombre non négligeable de candidats pense qu'une suite positive qui converge vers zéro est décroissante.
- **Oral CCINP PSI 2022 :** Les fonctions trigonométriques réciproques (Arcsin, Arccos, Arctan) interviennent régulièrement dans les exercices et ne sont pas toujours bien connues : ensemble de définition, conditions de dérivabilité et expression des dérivées.
- **Oral Centrale PSI 2022 :** La formule de Taylor avec reste intégral mieux connue que les autres années pose néanmoins encore pour certains des difficultés. Il serait sage de comprendre l'efficacité de cette formule pour obtenir des résultats globaux (par exemple des inégalités).

Exercice 271 (❄)

Etudier et tracer le graphe de la fonction suivante.

$$f : x \longmapsto \text{Arcsin}(2x^2 - 1).$$

Exercice 272 (❄)

Pour chacune des fonctions suivantes, donner les ensembles de définitions, de continuité et de dérivabilité de la fonction f puis calculer $f'(x)$ là où c'est possible.

$f_1 : x \mapsto \ln(\sqrt{x+1} - 1)$
$f_2 : x \mapsto \text{Arccos}(1 - x^2)$
$f_3 : x \mapsto \sqrt{4\text{Arctan}(x) - \pi}$

Exercice 273 (❄)

Pour chacune des fonctions suivantes, donner les ensembles de définitions, de continuité et de dérivabilité de la fonction f puis calculer $f'(x)$ là où c'est possible.

$f_1 : x \mapsto \sqrt{\ln(x) + 1}$
$f_2 : x \mapsto \text{Arcsin}(1 - x^2)$
$f_3 : x \mapsto \ln(\text{Arctan}(x) - 1)$

Exercice 274 (❄)

Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a :

$$\text{Arctan}(\text{sh}(x)) = \text{Arccos}\left(\frac{1}{\text{ch}(x)}\right).$$

Exercice 275 (❄❄)

Résoudre l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 276 (❄)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \text{Arccos}(1 - x^2)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et étudier sa parité.
   Sur quel ensemble f est-elle continue ? dérivable ?
2. Calculer $f'(x)$ là où c'est possible et dresser le tableau des variations de f sur $[0, \sqrt{2}]$.
3. Démontrer que pour tout $x \in [0, \sqrt{2}]$, on a l'égalité
   $$\text{Arccos}(1 - x^2) = 2\text{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$
   La fonction f est-elle dérivable en $\sqrt{2}$? en 0?
4. Tracer le graphe de f.

Exercice 277 (❄)

Soit f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$.

1. Prolonger la fonction f par continuité en 0.
2. Montrer que la nouvelle fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 278 (❄)

Soient $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $p, q \in \mathbb{R}^+$.
Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$pf(a) + qf(b) = (p + q)f(c).$$

Exercice 279 (❄)

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue, positive et telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \ell < 1$.
Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 280 (❄)

Soient $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ bornée et $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ continue.
Montrer que $g\circ f$ et $f\circ g$ sont bornées.

Exercice 281 (❄)

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ continue telle que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f\left(\frac{x+1}{2}\right)=f(x).$$

Montrer que f est constante.

Exercice 282 (❄❄❄)

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x).$$

Démontrer que f n'est pas injective.

Exercice 283 (❄)

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=x+e^x$.

1. Montrer que f est une bijection.
2. On note g la bijection réciproque de f.
   Montrer que g est dérivable.
3. Calculer $g(1)$ et $g'(1)$.

Exercice 284 (❄)

Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$. On suppose que l'on a $f(a)=f(b)$ et $f'(a)=0$.
Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f'(c)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

Donner un interprétation graphique du résultat.

Exercice 285 (❄)

Soit $a>0$ et $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ continue sur $[0,a]$, dérivable sur $]0,a]$ et telle que :

$$f(0)=0\quad\text{ et }\quad f(a)f'(a)<0.$$

Démontrer qu'il existe $c\in]0,a[$ tel que $f'(c)=0$.

Exercice 286 (❄❄)

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dérivable à droite en 0 et vérifiant $f(0)=0$.
Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 287 (❄❄)

A l'aide du théorème des accroissement finis, déterminer

$$\lim_{x\to+\infty}\left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}}-xe^{\frac{1}{x}}\right).$$

Exercice 288 (❄❄)

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x^{(x+1)/x}-(x-1)^{x/(x-1)}\right)$.

Exercice 289 (❄❄)

Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Etudier les implications entre les propositions suivantes.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$.

(iii) f est strictement croissante au voisinage de $+\infty$.

Exercice 290 (Règle de l'Hospital - ❄❄)

Soient $f,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur$]a,b[$.

1. Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que
$$g'(c)(f(b)-f(a))=f'(c)(g(b)-g(a)).$$
2. On suppose que g' ne s'annule pas au voisinage de a.
   Démontrer que, si $\displaystyle\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$, alors :
$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\ell.$$
3. On suppose que f et g sont dérivables en a : retrouver ce résultat à l'aide de développements limités.

Exercice 291 (❄❄)

Soient $f,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$.

1. On note $\Delta(x)=\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x)\\ g(a) & g(b) & g(x)\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$.
   Montrer que Δ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et calculer $\Delta'(x)$.
2. En déduire qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que :
$$(g(b)-g(a))f'(c)=(f(b)-f(a))g'(c).$$

Exercice 292 (❄)

Calculer la dérivée $n-$ième de $f:x\longmapsto(x^2+1)e^{-2x}$.

Exercice 293 (❄)

Calculer la dérivée $n-$ième de la fonction $g:x\longmapsto\dfrac{1}{1+2x}$.

Exercice 294 (❄)

Calculer la dérivée $n-$ième de la fonction $g:x\longmapsto\dfrac{1}{1-x^2}$.

Exercice 295 (❄)

Montrer que la dérivée d'ordre $n+1$ de $h:x\longmapsto x^ne^{1/x}$ est donné par $h^{(n+1)}(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}e^{1/x}$.

Exercice 296 (❄)

1. Calculer la dérivée à l'ordre n de la fonction :
$$f : x \mapsto x^n(1-x)^n.$$
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2$.

Exercice 297 (❄❄)

On suppose ici que $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et on note P_n son polynôme d'interpolation aux points $a_1, \ldots, a_n$ (tous distincts et contenus dans $[a,b]$).
On fixe $x_0 \in [a,b]$ distinct de chacun des a_i. On considère alors la fonction g définie sur $[a,b]$ par

$$\forall t \in [a,b],\ g(t) = f(t) - P_n(t) - \Big(f(x_0) - P_n(x_0)\Big) \prod_{i=1}^{n} \frac{t-a_i}{x_0-a_i}.$$

1. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ et montrer qu'elle admet au moins $n+1$ zéros distincts.
2. En déduire que $g^{(n)}$ s'annule au moins une fois en un point α de $[a,b]$.
3. Calculer $g^{(n)}(t)$ pour $t \in [a,b]$.
4. Justifier l'existence de $M_n = \sup\limits_{[a,b]} \left|f^{(n)}\right|$ et démontrer que
$$\Big|f(x_0) - P_n(x_0)\Big| \leq \frac{M_n}{n!} \prod_{i=1}^{n} |x_0 - a_i|.$$
5. En déduire la majoration uniforme :
$$\sup_{[a,b]} \Big|f - P_n\Big| \leq \frac{M_n(b-a)^n}{n!}.$$

Exercice 298 (❄)

En appliquant l'égalité de Taylor avec reste intégrale à l'application $x \longmapsto \ln(1+x^2)$, démontrer que
$$\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2} dt = \frac{\ln(2)}{2}.$$

Exercice 299 (❄)

Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications telles que f soit convexe et g soit à la fois convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.

Exercice 300 (❄❄)

Soit f une fonction réelle définie sur $]0, +\infty[$. Montrer que la fonction $x \longmapsto xf(x)$ est convexe si, et seulement si, la fonction $x \longmapsto xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$. l'est aussi.

Exercice 301 (❄)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et majorée. Montrer que f est constante.

Exercice 302 (❄❄)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. On suppose que la fonction f est convexe. Montrer que pour tout réel y, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq y\}$ est un intervalle.
2. Que dire de la réciproque ?

Exercice 303 (❄❄)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que si f admet un minimum local en $a \in I$ alors f admet un minimum global en a.

Exercice 304 (❄)

Soient $p, q \in]0, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Montrer que pour tous $a, b \in]0, +\infty[$ on a $\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \geq ab$.

Exercice 305 (❄❄)

Démontrer que pour tout $x \in [-1,1]$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
$$\exp(\lambda x) \leq \mathrm{ch}(\lambda) + x\,\mathrm{sh}(\lambda).$$

Exercice 306 (Inégalité arithmético-géométrique - ❄)

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels positifs. En utilisant l'inégalité de Jensen (cours), montrer :
$$\sqrt[n]{a_1 \times \cdots \times a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n).$$

Exercice 307 (❄)

Démontrer que $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto \mathrm{rg}(M)$ n'est pas continue.

Exercice 308 (❄)

Soit $M : t \in \mathbb{R}^* \longmapsto M(t) = (x(t), y(t)) = \left(\dfrac{t}{e^t - 1}, \dfrac{\mathrm{sh}(t)}{t}\right)$.

1. Prolonger la fonction M par continuité en 0.
2. On note $\mathcal{C} = \{(x(t), y(t)),\ t \in \mathbb{R}\}$ la trajectoire du point $M(t)$.
Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} M(t)$. Qu'en déduit-on pour $\mathcal{C}$.
3. Justifier que M est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer le vecteur dérivée $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t)$.
4. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $M(t)$.
En déduire que M est dérivable en 0 puis que $\mathcal{C}$ admet une tangente en $M(0)$ que l'on précisera.

Exercice 309 (❄)

Soit $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^m$ dérivable en $a \in I$.
Déterminer $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{x-a}\left(x\vec{f}(a) - a\vec{f}(x)\right)$.

Exercice 310 (❄)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$.
On suppose que l'application $\|f\|$ est constante.
Démontrer que pour tout $t \in I$, $f(t) \perp f'(t)$.

Exercice 311 (❄)

Soit $A : t \in I \longmapsto A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Démontrer que $f : t \in I \longmapsto \operatorname{tr}(A)$ et $g : t \in I \longmapsto A^T$ sont de de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et déterminer leurs dérivées.

Exercice 312 (Mines-Ponts PC 2019 - ❄❄)

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(f(t), f'(t))$ est liée et que,pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \neq 0$.
On pose $g : t \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{f(t)}{\|f(t)\|}$.

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer, pour $t \in \mathbb{R}$, que $g'(t)$ est colinéaire et orthogonal à $f(t)$.
2. En déduire l'existence de $e \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \in \mathbb{R}.e$.
3. Est-ce toujours le cas si on ne suppose plus que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \neq 0$?

Exercice 313 (❄❄)

1. Soient $E_1, \ldots, E_p, F$ des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions finies, $F : E_1 \ldots E_p \longrightarrow F$ une application p linéaire et $x_1, \ldots, x_p : I \longrightarrow \mathbb{K}$ des applications dérivables sur un intervalle I.
   Montrer que $g : t \longmapsto F(x_1(t), \ldots, x_p(t))$ est dérivable sur I et déterminer sa dérivée.
2. Soit $A : t \in I \longmapsto A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Montrer que $t \longmapsto \det(A(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et déterminer sa dérivée.
3. On note pour $x \in \mathbb{R}$, $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{x^2}{2} & x & 1 & \ddots & \vdots \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2} & x & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \cdots & \cdots & \frac{x^2}{2} & x \end{vmatrix}$.
   Montrer que D_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de $D_n'(x)$. En déduire $D_n(x)$.

Exercice 314 (Centrale PSI 2021 - ❄❄❄)

Soit $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Supposons, dans cette question, qu'il existe
   $$S : \mathbb{R} \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$$
   de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $S^{-1}(t)A(t)S(t) = A(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   Montrer qu'il existe $B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A'(t) = B(t)A(t) - A(t)B(t)$.
2. Supposons, dans cette question, qu'il existe une application $B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue telle que :
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ A'(t) = B(t)A(t) - A(t)B(t).$$
   Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ est semblable à $A(0)$.

Exercice 315 (ENTPE-EIVP PSI 2019 - ❄❄❄)

Soit $M : t \in \mathbb{R} \longmapsto M(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose que M est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ M^2(t) = M(0) = I_n.$$

1. Montrer que $M(t)$ est diagonalisable pour tout réel t.
2. Montrer que : $MM' = -M'M$ et $M' = -MM'M$.
3. Montrer que $\Phi : t \longmapsto \operatorname{tr}(M(t))$ est constante sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer $M(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 316 (Mines-Ponts PSI 2019 - ❄❄❄)

Soient $n \in N^*$ et $M : \mathbb{R} \longmapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application dérivable.

1. Démontrer que l'application $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(x) = M(x)^T.M(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.
2. Soient $A : \mathbb{R} \longmapsto \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ continue et $M : \mathbb{R} \longmapsto \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ solution de l'équation différentielle
   $$M'(x) = A(x)M(x).$$
   On suppose que $M(0) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $M(x) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.

Feuille 21

Fonctions de plusieurs variables

Extraits de rapports de jury :

- **Oral CCINP PSI 2023 :** La partie du programme sur les fonctions de plusieurs variables n'est pas bien assimilée. La compréhension de la continuité en un point pose problème. La définition de la dérivée partielle en un point est rarement connue. Il ne faut pas oublier que les fonctions de plusieurs variables sont au programme. La notion de limite ou de continuité en une valeur (a, b) n'est qu'exceptionnellement bien connue : la plupart des candidats pensent qu'il suffit de faire tendre x vers a et y vers b en fixant l'autre variable.
- **Oral CCINP PSI 2022 :** Les fonctions à plusieurs variables inspirent peu les candidats.
- **Oral CCINP PSI 2021 :** Les exercices concernant les fonctions de deux variables ont eu peu de succès. Si nombre de candidats n'hésitent pas à se lancer dans de long calculs de dérivées partielles, les notions de régularité ne sont pas acquises. À titre d'exemple, beaucoup pensent prouver la continuité de f en $(0, 0)$ en prouvant la continuité des fonctions partielles $f(., 0)$ et $f(0, .)$.
- **Oral Mines-Télécom PSI 2023 :** Les notions élémentaires en calcul différentiel sont souvent mal connues, en particulier, les notions de limites, de continuité des fonctions de plusieurs variables sont très mal traitées, il en de même pour la règle de la chaîne.
- **Oral Mines-Ponts PSI 2019 :** Concernant les fonctions de plusieurs variables, l'étude des extremums locaux est mieux menée cette année, mais il faut prendre soin de préciser que l'on se place sur des ouverts et que la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$. L'existence de bornes sur un fermé borné pour une fonction continue devrait être systématiquement mentionnée. Les méthodes pour prouver la continuité d'une fonction à deux variables, ou celle de ses dérivées partielles dans le but de prouver que celle-ci est de classe $\mathcal{C}^1$ ne sont pas maîtrisées par les candidats. La notion de gradient reste confuse.
- **Oral Centrale PSI 2022 :** Le calcul différentiel et la géométrie différentielle élémentaires sont souvent très mal connus au point que des questions aussi simples que le calcul des dérivées partielles en coordonnées polaires ou le lien entre le vecteur gradient et les ensembles de niveau d'une fonction font chuter des candidats.
- **Oral Centrale PSI 2021 :** Le chapitre qui a le moins de succès auprès des candidats est, cette année encore, celui sur les fonctions de plusieurs variables. La règle de la chaine, formule assez incontournable non seulement des mathématiques, mais encore des sciences physiques ou de l'ingénieur est ignorée des candidats. Montrer qu'une application f de deux variables x et y est de classe $\mathcal{C}^1$, au moyen des théorèmes de composition, s'avère être une tâche insurmontable pour certains candidats, qui en particulier ne semblent pas comprendre que la décomposition de f utilisée doit commencer par une application du couple (x, y). La partie ≪ Applications géométriques ≫ du chapitre calcul différentiel du programme de CPGE est ignorée ou mal connue de la grande majorité des candidats. Ceci est dommage puisque les exercices portant sur cette partie sont souvent simples et proches du cours et devraient permettre aux candidats d'avoir une bonne note.
- **Oral Centrale PSI 2019 :** Le calcul différentiel et la géométrie différentielle élémentaires sont souvent très mal connus au point que des questions aussi simples que le calcul des dérivées partielles en coordonnées polaires ou le lien entre le vecteur gradient et les ensembles de niveau d'une fonction font chuter des candidats.

Exercice 317 (❆)

La fonction suivante est-elle continue ? Ses applications partielles le sont-elles ?

$$f : \begin{cases} (x, y) \longrightarrow \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ (0, 0) \longrightarrow 0. \end{cases}$$

Exercice 318 (❆)

La fonction suivante est-elle continue ? Ses applications partielles le sont-elles ?

$$g : \begin{cases} (x, y) \longrightarrow \dfrac{\ln(1 + x^4)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ (0, 0) \longrightarrow 0. \end{cases}$$

Exercice 319 (❊)

La fonction suivante est-elle continue ? Ses applications partielles le sont-elles ?

$$h : \begin{cases} (x,y) & \longrightarrow & y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si} \;\; y \neq 0, \\ (x,0) & \longrightarrow & 0. \end{cases}$$

Exercice 320 (❊)

Peut-on prolonger par continuité la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2}$.

Exercice 321 (❊)

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on pose

$$f(x,y) = \frac{\ln(1+x^2) - \ln(1+y^2)}{x^2+y^2}.$$

Peut-on prolonger la fonction f par continuité en $(0,0)$?

Exercice 322 (❊)

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on pose

$$f(x,y) = \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Prolonger la fonction f par continuité en $(0,0)$ puis calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Exercice 323 (❊)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f : \begin{cases} (x,y) & \longrightarrow & \dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|} & \text{si} \;\; (x,y) \neq (0,0), \\ (0,0) & \longrightarrow & 0. \end{cases}$$

Etudier la continuité de f et l'existence de ses dérivées partielles. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 324 (❊❊)

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on pose $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$, on pose aussi $f(0,0) = 0$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la fonction f admet en $(0,0)$ des dérivées selon tout vecteur et que pourtant f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 325 (CCINP PC 2019, Mines-Ponts PC 2022

Soit $f :\; \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$.

1. Montrer que f se prolonge par continuité en $(0,0)$.
2. La fonction ainsi prolongée est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
3. Que valent $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$? Que peut-on en déduire ?

Exercice 326 (Mines-Ponts PC 2018, CCINP PSI 2021 - ❊

On pose $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. Montrer que f est continue.
2. Exprimer les dérivées partielles de f.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
4. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Conclusion ?

Exercice 327 (CCP PSI 2016 - ❊❊)

On pose $f(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0) = 0$.

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? de classe $\mathcal{C}^1$?
2. Existence et calcul de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Exercice 328 (❊)

Pour chacune des fonctions suivantes, dire où elles sont définies (représenter Df quand f dépend de deux variables), calculer leurs dérivées partielles premières. Exprimer de plus la différentielle de f et son développement limité à l'ordre 1 en le point a indiqué.

1. $f(x,y) = e^{x+4y}\mathrm{ch}(2y^2)$, différentielle en $a = (0,0)$.
2. $f(x,y) = \ln(1-x) + y^x$, différentielle en $a = (-1,2)$.
3. $f(x,y,z) = \ln(z)\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}$, différentielle en $a = (1,0,2)$.

Exercice 329 (❊)

Pour chacune des fonctions suivantes, dire où elles sont définies (représenter Df quand f dépend de deux variables), calculer leurs dérivées partielles premières. Exprimer de plus la différentielle de f et son développement limité à l'ordre 1 en le point a indiqué.

1. $f(x,y) = x^y$, différentielle en $a = (1,1)$.
2. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-2x-3}$, différentielle en $a = (-1,1)$.
3. $f(x,y,z) = \ln(x+y) + \sqrt{4-x^2-y^2-z^2}$, différentielle en $a = (1,1,1)$.

Exercice 330 (❊)

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. Montrer que l'application $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\|x\|}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et calculer son gradient.

Exercice 331 (❊❊)

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$ et $f : (x,y) \in U \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0.$$

1. On note $I = \{y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}, (x,y) \in U\}$. Démontrer que I est un intervalle.
2. Démontrer qu'il existe une fonction $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = g(y)$.

Exercice 332 (❄)

Déterminer l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

1. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$
2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+y$
3. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{2x+y}$

Exercice 333 (❄)

Déterminer l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$
2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{2x}$
3. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{2x}+y$

Exercice 334 (❄)

Déterminer l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

1. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$
2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = x$
3. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^2y - 2x + y^3$

Exercice 335 (❄)

Déterminer l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

1. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = x$
2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$
3. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \cos(x)$

Exercice 336 (CCP PC 2015 - ❄)

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Exprimer le Laplacien de $F : (x,y) \longmapsto \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Exercice 337 (Changement de variables affine - ❄)

Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

On pourra utiliser un changement de variables du type

$$u = ax+by, v = cx+dy.$$

Exercice 338 (Changement de variables en polaire - ❄❄)

Soit (x,y) un point du plan distinct de l'origine. On note (r,θ) ses coordonnées polaires :
- $r > 0$ est unique.
- θ est unique si on suppose qu'il est dans $]-\pi,\pi]$.

1. Exprimer x et y en fonctions de r et θ.
2. Exprimer r en fonction de x et y.
3. Si $x > 0$, exprimer θ en fonction de x et y.
4. (a) On note $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}^-\}$. Représenter U et montrer qu'il s'agit d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Démontrer que $\varphi : (r,\theta) \longmapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ est une bijection de $]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$ sur U.
   (c) Démontrer que si $(x,y) \in U$ alors
   $$\theta = 2\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$
   (d) En déduire que φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 339 (❄❄)

En passant en coordonnées polaires, résoudre sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'équation aux dérivées partielles

$$(\mathcal{E}) :\ y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Exercice 340 (❄❄)

En passant en coordonnées polaires, résoudre sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'équation aux dérivées partielles

$$(\mathcal{E}) :\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2+y^2.$$

Exercice 341 (❄)

On note $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y\right\}$.
Déterminer toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U telles que

$$\forall (x,y) \in U, \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - y^2.$$

On pourra utiliser le changement de variables : $(u,v) = (x+y, xy)$.

Exercice 342 (❄❄)

On note $U = \mathbb{R}\times]0,+\infty[$.
Déterminer toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U telles que $\forall (x,y) \in U,\ x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$
On pourra utiliser le changement de variables : $(x,y) = (ue^v, e^{-v})$.

Exercice 343 (Mines-Ponts PC 2022 - ❄❄)

Déterminer les fonctions $f : (]0,+\infty[)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de $\dfrac{\partial f}{\partial x} - xy\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Ind. Utiliser le changement de variable $(u,v) = (x, xe^{y^2/2})$.

Exercice 344 (CCEM PC - ❄❄)

Soit α un réel et E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha.$$

1. Montrer que la fonction $\phi : (x,y) \longmapsto (2x+y, 2x-y)$ est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
   Montrer que f appartient à E si et seulement si la fonction $g = f \circ \phi^{-1}$ vérifie $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \dfrac{\alpha}{16}$.
3. En déduire l'ensemble E.

Exercice 345 (Mines-Ponts PSI 2010 - ❄❄)

Trouver les fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Exercice 346 (❄❄)

Montrer que l'application suivante est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme (de classe $\mathcal{C}^2$, bijective et de bijection réciproque $\mathcal{C}^2$) et précisant les ensembles de départ et d'arrivée.

$$\varphi(x,y) = (x+y, x-y).$$

En déduire la résolution de

$$(\mathcal{E}) : \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).$$

Exercice 347 (❄❄)

Soit $c > 0$. En utilisant le changement de variables

$$u = x - cy, v = x + cy,$$

résoudre l'équation des cordes vibrantes sur $\mathbb{R}^2$:

$$(\mathcal{E}_2) : \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Exercice 348 (CCINP PSI 2021 - ❄❄)

On cherche les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant la condition :

$$(\mathcal{E}) : \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)dt.$$

1. Résoudre, selon la valeur du réel c, l'équation différentielle $y'' - cy = 0$.
2. Soit $F : (x,y) \longmapsto \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(t)dt$.
   Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.
3. Soit f une solution de $(\mathcal{E})$.
   Calculer $f(0)$ et $f''(x)f(y) - f(x)f''(y)$. En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.

Exercice 349 (❄❄)

Déterminer l'expression du laplacien $\Delta(f) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ de f en coordonnées polaires.

Exercice 350 (Mines-Télécom PC 2017 - ❄❄)

1. Soit $\varphi : (x,y) \longmapsto (xy, x/y)$.
   Montrer que φ est une bijection de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans lui-même.
2. Résoudre $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Exercice 351 (❄)

Déterminer les extrema locaux de :

$$f : (x,y) \longmapsto x^2 y + \ln(1+y^2).$$

Exercice 352 (CCINP PC 2022 - ❄❄)

Soit $f : [0,2] \times [-1,0] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$(x,y) \longmapsto x^2 - 2x + xy + y^2.$$

Trouver les extrémums globaux de f.

Exercice 353 (CCP PSI 2015 - ❄)

Trouver le(s) extremum(s) de $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 5x - y$.

Exercice 354 (CCP PSI 2017 - ❄)

On pose pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = x^2 y + \ln(4+y^2)$$

1. Montrer que f admet un unique point critique.
2. Calculer pour tout réel x, $f(x,x^3) - f(0,0)$ et en déterminer un équivalent quand x tend vers 0.
3. f admet-elle des extremas locaux ?

Exercice 355 (CCP PSI 2018 - ❄)

Sur $D = (\mathbb{R}_+^*)^2$, on pose $f(x,y) = xy + \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{y}$.

1. Montrer que f admet un unique point critique (a,b) sur D.
2. Écrire le développement limité à l'ordre 2 de f en (a,b).
3. La fonction f admet-elle des extrema sur D ?

Exercice 356 (EIVP PSI 2016 - ❄❄)

On note $g(x,y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$.

1. Déterminer les points critiques de g.
2. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, l'application $x \longmapsto g(x, \lambda x)$ admet un minimul local en $(0,0)$.
3. La fonction g admet-elle un minimum local ?

Exercice 357 (TPE PSI 2018 - ❄❄)

Déterminez les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de $f : (x,y) \longmapsto x^4 + y^4 - 4xy$.

Exercice 358 (❄❄)

On considère la fonction $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les dérivées partielles et les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Après avoir justifier leur existence, déterminer les minimum et maximum de f sur $\Delta = [0,2] \times [0,2]$.
3. En déduire les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 359 (CCP PC 2017 - ❄)

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$ on a $\sin(t) \leq t$ et $\mathrm{sh}(t) \geq t$.
2. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
$$f(x,y) = \frac{1}{2}(\mathrm{ch}(2x) - \cos(2y)) = \mathrm{sh}^2(x) + \sin^2(y).$$
3. Donner le signe de f. Montrer que 0 est son minimum sur $D = \{(x,y),\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.
4. Montrer que D admet un maximum sur D.
5. Montrer que $D' = \{(x,y),\ x^2 + y^2 < 1\}$ est ouvert et déterminer les points critiques de f sur D'.
6. En déduire que :
$$\exists t_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \forall (x,y) \in D,\ f(x,y) \leq f(\cos(t_0), \sin(t_0)).$$
7. Montrer que $g(t) = f(\cos(t), \sin(t))$ est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et en déduire le maximum de f sur D.

Exercice 360 (E3A 2002 PC - ❄)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :
$$f(x,y) = \sin(x) + \sin(y) - \sin(x+y).$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les points $z = (x,y)$ dans le carré $[-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$ tels que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z) = 0$.
3. Montrer que $f(x,y) = 4\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$.
4. Représenter graphiquement les ensembles
   - $S_0 = \{z \in [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi],\ f(z) = 0\}$
   - $S_{>0} = \{z \in [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi],\ f(z) > 0\}$
   - $S_{<0} = \{z \in [-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi],\ f(z) < 0\}$
5. Déterminer les extrema de f sur le carré $[-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi]$.
6. La fonction f admet-elle un maximum sur $\mathbb{R}^2$? un minimum sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les décrire.

Exercice 361 (ENSAM PSI 2018 - ❄❄)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + x^2y + y^3$.

1. Montrer que f admet un point critique mais n'y atteint pas d'extremum local.
2. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Montrer que f admet un minimum m et un maximum M sur D.
   Déterminez les points de D en lesquels ils sont atteints puis trouvez les valeurs de m et M.

Exercice 362 (ESIM 1999 PC - ❄)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :
$$f(x,y) = (x^2 + y^2)^x \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 1.$$

1. (a) Etudier la continuité de f.
   (b) Etudier l'existence des dérivées partielles de f au point $(0,0)$.
   (c) Déterminer et tracer la ligne de niveau 1 de f.
2. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = f(x,0) - 1 \text{ si } x \neq 0 \text{ et } g(0) = 1.$$
   (a) Dresser avec précision le tableau des variations de g.
   (b) En déduire que la fonction f n'admet pas d'extremum en $(0,0)$ (justifier soigneusement la réponse).
3. Déterminer les points critiques de f.
4. (a) Vérifier que pour tout $x \geq 0$, on a $f(x,y) \geq g(x)$.
   En déduire que f admet un minimum en $\left(\frac{1}{e}, 0\right)$.
   (b) La fonction f admet-elle un extremum en $\left(-\frac{1}{e}, 0\right)$?
5. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, les deux expressions :
$$\Big(f(x,1) - f(0,1)\Big) \text{ et } \Big(f(x,-1) - f(0,-1)\Big)$$
   sont du signe de x. Que peut-on en conclure ?

Exercice 363 (❄❄)

1. Représenter le domaine
$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}.$$
2. Soient a, b, c des réels strictement positif, justifier l'existence d'un maximum sur $\mathcal{D}$ pour la fonction f définie par
$$f(x,y) = x^a y^b (1 - x - y)^c.$$
3. Déterminer $\max\{f(x,y),\ (x,y) \in \mathcal{D}\}$.

Exercice 364 (Mines-Ponts PC 2015 - ❄❄)

On considère $f : (x,y) \longmapsto x^2 y(x + y - 4)$ sur
$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}.$$
Représenter Δ et déterminer les extrema locaux et globaux de f sur Δ.

Exercice 365 (D'après BCE filière commerciale 2010 - ❄)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, par
$$f(x,y) = (x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

1. Montrer que f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Montrer que f admet sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ un minimum global en chacun de ses points critiques et donner sa valeur.
4. Soit g la fonction définie pour tout (x,y) de $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, par : $g(x,y) = 2\ln(x+y) - \ln x - \ln y$.
   Montrer que : $\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[,\ g(x,y) \geq 2\ln(2)$.

Exercice 366 (❄❄)

Etudier les extrema locaux. Quand c'est possible, dire s'il s'agit d'un extremum global.
- $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ sur la boule fermée de centre 0 et de rayon 2 puis sur $\mathbb{R}^2$.
- $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 2x + y - 1 + 4z^4$ sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 367 (CCP MP 2014 - ❄❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et dont toutes les valeurs propres sont strictement positives et $u \in \mathbb{R}^n$ fixé.
Montrer que $f(x) = \dfrac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle u, x\rangle$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$. Etudier les extrema de f.

Exercice 368 (Centrale - Supélec PSI 2016 - ❄❄)

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n : t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \dfrac{1}{n^2}\exp(-nt)$.

1. Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge simplement. On note S sa somme.
2. Montrer que $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto S(x^2+y^2)$ est continue.
3. Montrer que les dérivées partielles d'ordre 1 de f existent.
4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que son gradient est colinéaire à $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
   Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 369 (ENSAM PSI 2018 - ❄❄)

1. Trouver les symétries de la surface :
$$\mathcal{S} : z = x^2 + y^2 - 2(x-y)^2.$$
2. Trouver les points critiques de $f(x,y) = x^2+y^2-2(x-y)^2$ et montrer que $O = (0,0)$ n'est pas un extremum local.
3. Trouver le minimum de $g(t) = \cos^4(t) + \sin^4(t)$.

Exercice 370 (Centrale PSI 2023 - ❄❄❄)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ la matrice Hessienne $H_f(x)$ a toutes ses valeurs propres dans $[1, +\infty[$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on note $\varphi : t \longmapsto f(tx)$.
   Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et exprimer φ'' à l'aide de la matrice Hessienne de f.
2. En considérant $\psi : t \longmapsto f(tx) - \langle \nabla f(0), tx\rangle - \dfrac{t^2}{2}x^T x$, montrer l'inégalité :
$$f(x) \geq f(0) + \langle \nabla f(0), x\rangle + \frac{1}{2}x^T x.$$
3. En déduire que $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum.

Exercice 371 (❄)

On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne
$$x^2 + xy + y^2 = 1.$$
Déterminer les équations des tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'intersection avec l'axe des ordonnées.

Exercice 372 (❄)

On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne
$$x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 1 = 0.$$
Déterminer les équations des tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'intersection avec l'axe des ordonnées.

Exercice 373 (❄)

On considère la courbe $\mathcal{C}$: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Déterminer les tangentes à $\mathcal{C}$ dirigées par $u = (1,1)$.

Exercice 374 (❄❄)

On considère la surface d'équation $(\mathcal{S})$: $z = x^2 + y^4$.

1. La surface $(\mathcal{S})$ est-elle régulière ?
2. Déterminer l'équation du plan tangent à $(\mathcal{S})$ en le point $A(1,0,1)$.
3. Déterminer la position de $(\mathcal{S})$ par rapport à ce plan tangent.

Exercice 375 (❄❄)

Déterminer les plans tangents à $\mathcal{S}$: $xy = z^3$ contenant la droite $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 2 \\ y = 3(z-1) \end{cases}$

Exercice 376 (CCP PSI - ❄❄)

1. Déterminer le plan tangent $(\mathcal{P}_0)$ à la surface $(\mathcal{S}) : xyz = 1$ en un point (x_0, y_0, z_0).
2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de O sur $(\mathcal{P}_0)$.

Exercice 377 (❄❄)

Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation cartésienne $z^2 = xy$.

1. Déterminer les points singuliers de $\mathcal{S}$.
2. Soit $P : ux + vy + wz = h$ un plan.
   Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que P soit tangent à $\mathcal{S}$.
3. Déterminer les plans tangents à $\mathcal{S}$ qui contiennent la droite $D : \begin{cases} x = z - 1 \\ y = z + 1 \end{cases}$

Exercice 378 (TPE PSI 2016 - ❄❄)

Trouver les plans tangents à la surface d'équation $z^2 = xy$ et contenant la droite d'équations : $x = 2$ et $y + z = 1$.

Exercice 379 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄❄)

Soir $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et r l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $\mathbb{R}$.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on note $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Montrer l'équivalence entre :

(i) $\forall f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}),\ \Delta(f \circ r) = (\Delta f) \circ r$,

(ii) $R \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 380 (Centrale PSI 2021 - ❄❄❄)

1. Déterminer le nombre de solutions de $xe^{-x} = \lambda$ en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Trouver les extrema de $f : (x, y) \longmapsto xye^{-x-y}$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer les λ tels que l'ensemble

$$\{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ f(x, y) = \lambda\}$$

est non vide.