PSI 2023-2024
Lycée Châtelet

Exercices de Mathématiques

PSI

Volume 2

S. Dion

Table des matières

Feuille 9

Réduction

Extraits de rapports de jury :

- **Oral CCINP 2022 PSI :** *La mise en œuvre pratique de la réduction (diagonalisation, trigonalisation) de matrices est en général satisfaisante et les conditions pour les matrices sont la plupart du temps connues : valeurs propres et dimension des espaces propres associés, polynôme annulateur scindé à racines simples. L'adaptation à des endomorphismes est souvent moins convaincante, avec des conditions qui sont rarement énoncées spontanément : existence d'une base de vecteurs propres, ou écriture de l'espace comme somme (directe) des espaces propres.*
- **Oral CCP 2018 :** *Le lien entre une matrice et l'application linéaire canoniquement associée pose toujours des difficultés.*
- **Oral CCP 2019 :** *Beaucoup de candidats savent identifier une matrice de rang* 1 *mais éprouvent plus de difficultés pour utiliser ce résultat pour écourter la recherche des espaces propres.*

  Trop de candidats confondent polynôme annulateur et polynôme caractéristique et utilisent l'expression « LE polynôme annulateur ». Ceci les amène par exemple à considérer que si P *est annulateur de* A*, alors les racines de* P *sont valeurs propres de* A*. Dans le même ordre d'idées, certains candidats pensent que la diagonalisabilité est déductible du polynôme caractéristique et on voit trop souvent des candidats affirmer que puisque le polynôme caractéristique (ou le polynôme annulateur) est scindé, la matrice est diagonalisable.*

  Le calcul du polynôme caractéristique est la plupart du temps effectué par la règle de Sarrus ou par développement par rapport à une ligne ou une colonne, ce qui conduit à une forme développée dont la factorisation pose problème.
- **Oral CCP 2019 :** *Les polynômes de matrices et d'endomorphismes sont très mal maîtrisés. Une erreur très courante consiste à calculer* $P(MX)$ *au lieu de* $P(M)X$ *lorsque* P *désigne un polynôme,* M *une matrice et* X *un vecteur.*
- **Oral Mines Telecom 2022 :** *L'algèbre linéaire reste un domaine difficile. Pour certains cela se résume à des recettes de cuisine appliquées sans le moindre recul : par exemple, utiliser systématiquement le polynôme caractéristique pour déterminer les valeurs propres d'une matrice qui est visiblement de rang 1...*
- **Oral Mines-Ponts 2021 PSI :** *un polynôme annulateur d'un endomorphisme, lorsqu'il est scindé à racines simples, devrait immédiatement susciter une réaction ;*

  Après avoir obtenu une valeur propre λ *d'une matrice* A *(par exemple comme racine du polynôme caractéristique) et en cherchant à déterminer l'espace propre associé, certains candidats sont perplexes en constatant qu'il n'y a pas une unique solution au système linéaire* $AX = \lambda X$*.*
- **Oral Mines-Ponts 2018 :** *En algèbre linéaire, trop de candidats ont beaucoup de mal à construire une base adaptée à un problème. En particulier, la traduction matricielle de l'existence d'un sous-espace stable par un endomorphisme est mal maîtrisée.*
- **Oral Mines-Ponts 2018 :** *Il n'est pas suffisant, pour établir qu'un endomorphisme est diagonalisable, de donner la liste exhaustive des critères de diagonalisabilité du programme en laissant à l'examinateur le soin de choisir le plus adapté à la situation. La caractérisation par l'existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples n'est pas toujours spontanément citée, et lorsque c'est le cas la simplicité des racines est souvent oubliée.*
- **Oral Mines-Ponts 2018 :** *Les candidats savent en général que l'indice de nilpotence d'une matrice de taille* n *est majoré par* n*, bien que ce résultat ne soit pas explicitement au programme, mais tous ne savent pas le démontrer.*
- **Oral Centrale 2022 PSI :** *Il est parfois difficile d'étudier le caractère diagonalisable d'une matrice* 2×2*. Le fait que les valeurs propres d'une matrice triangulaire se trouvent sur la diagonale nécessite souvent un lourd calcul. Certains candidats ne voient pas qu'une matrice de taille* n *qui n'est pas de rang* n*, admet* 0 *pour valeur propre. La détermination des espaces propres d'une matrice est le plus souvent abordée par résolution du système* $AX = \lambda X$*. La recherche du noyau de* $A - \lambda I_n$ *par opérations sur les colonnes est pourtant bien plus rapide et élégante mais suppose de savoir interpréter vectoriellement les opérations sur les colonnes.*
- **Écrit Centrale 2018 :** *Il n'y a pas équivalence pour une matrice entre « être diagonalisable » et « avoir un polynôme caractéristique scindé et à racines simples ».*
- **Oral Centrale 2018 et 2019 :** *La détermination de la dimension d'un sous-espace propre doit faire intervenir un argument sur le rang du système, même en petite dimension : il ne faut pas se contenter d'affirmer « on voit bien que le sous-espace est de dimension 1 ».*

- **Navale 2019 et 2021 PSI :** *Les étudiants doivent savoir que si deux endomorphismes commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre. Les conditions de diagonalisabilité d'une matrice ou d'un endomorphisme ont été trop souvent mal maitrisées. Il est important que les candidats sachent faire la distinction entre une condition nécessaire et une condition suffisante. Le jury a souvent constaté une majoration de l'ordre de multiplicité d'une valeur propre par la dimension du sous-espace propre associé.*

  Le rôle de la valeur propre particulière nulle n'est pas suffisamment bien connu des candidats. Si le lien entre valeur propre et racine d'un polynôme annulateur est partiellement maitrisé, la distinction du corps de référence pose souvent de nombreux problèmes. Le rôle de la valeur propre particulière nulle n'est pas suffisamment bien connu des candidats.

Exercice 1 (CCP PSI 2017 - ❉)

Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 2$, possèdent le même spectre.

1. Montrer que si les valeurs propres sont deux à deux distinctes, alors A et B sont semblables.
2. Donner deux matrices possédant le même spectre mais qui ne sont pas semblables.

Exercice 2 (❉)

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Démontrer que toute valeur propre de AB est aussi valeur propre de BA.
2. Est-il vrai que AB et BA possèdent un vecteur propre commun ?

Exercice 3 (CCINP PSI 2022 (Aubin G.) - ❉❉)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall P \in GL_n(\mathbb{R}),\ AP = PA$.

1. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B - \lambda I_n$ soit inversible.
   En déduire que $AB = BA$.
2. Montrer alors qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $A = \alpha I_n$.

Exercice 4 (❉)

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui à $P(X)$ associe

$$\varphi(P)(X) = P(-X).$$

Déterminer les valeurs propres de φ et les sous-espaces propres associés.

Exercice 5 (❉❉)

Soit E l'espace vectoriel des suite réelles convergeant vers 0 et $\varphi : E \longrightarrow E$ définie par

$$\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n.$$

Déterminer les éléments propres de φ.

Exercice 6 (❉❉)

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de l'endomorphisme f de l'espace :

$$E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C}),\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge } \}$$

défini par

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E,\ f((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ avec } \forall n \in \mathbb{N}, y_n = x_{n+1}.$$

Exercice 7 (❉❉)

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de l'endomorphisme f suivant de l'espace :

$$E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C}),\ \lim_{n\to+\infty} u_n = 0\right\}$$

défini par $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E,\quad f((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $v_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_{n-1}$.

Exercice 8 (CCINP PC 2022 - ❉❉)

On pose $j = e^{2i\pi/3}$.
On suppose que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à jA.

1. Montrer que si λ est valeur propre de A alors $j\lambda$ est valeur propre de A.
2. Montrer alors que $\lambda = 0$ puis que $A^2 = 0$.

Exercice 9 (❉❉)

Soient E un espace vectoriel et u, v des endomorphismes de E.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ non nul. Montrer que si λ est valeur propre de $u \circ v$ alors λ est valeur propre de $v \circ u$.
2. On suppose que E est de dimension finie.
   (a) Démontrer que $\mathrm{Sp}(u \circ v) = \mathrm{Sp}(v \circ u)$.
   (b) Montrer que si u et v sont inversibles alors :

$$u \circ v \text{ est diagonalisable} \iff v \circ u \text{ est diagonalisable.}$$

Exercice 10 (❉)

On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une valeur propre évidente de A. Quelle est la dimension de son sous-espace propre associé ?
2. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de A. En déduire une matrice diagonale D semblable à A.

Exercice 11 (❉)

Soit a un réel non nul. On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une valeur propre évidente de A. Quelle est la dimension de son sous-espace propre associé ?
2. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de A. En déduire une matrice diagonale D semblable à A.

Exercice 12 (CCP PSI 2017 - ❄)

1. Déterminer le spectre de $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Expliciter une base (u, v, w) de $\mathbb{R}^3$ telle que u et v soient des vecteurs propres de A.
4. La matrice A est-elle trigonalisable ?

Exercice 13 (Une trigonalisation - ❄)

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
2. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré minimal.
   En déduire l'expression de A^n en fonction de A, I_3 et $n \in \mathbb{N}$.
3. (a) Déterminer une base (e_1) du sous-espace propre de u.
   (b) Justifier que $\mathrm{Ker}(u - 2Id)^2$ est stable par u et qu'il contient e_1.
   Déterminer un vecteur e_2 pour lequel (e_1, e_2) est une base de $\mathrm{Ker}(u - 2Id)^2$.
   (c) Déterminer e_3 tel que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire le matrice de u dans cette base.

Exercice 14 (IMT PSI 2019 - ❄)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont on note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
   Exprimer AX à l'aide des colonnes de A et des coordonnées de X.
2. Déterminer le rang de la matrice $Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Calculer $C_1 + C_5$. En déduire un élément propre de Z.
4. Calculer $C_1 - C_3 + C_5$. En déduire un élément propre de Z.
5. Achever la réduction de Z.

Exercice 15 (❄)

Réduire (diagonaliser ou trigonaliser) les matrices suivantes.

$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 16 (❄)

Réduire (diagonaliser ou trigonaliser) les matrices suivantes.

$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$B_2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$B_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 17 (❄)

Réduire (diagonaliser ou trigonaliser) les matrices suivantes.

$C_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$C_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$C_3 = \begin{pmatrix} 9 & 60 & -12 \\ -2 & -11 & 1 \\ -4 & -28 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 18 (❄)

Réduire (diagonaliser ou trigonaliser) les matrices suivantes.

$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 19 (❄)

Réduire (diagonaliser ou trigonaliser) les matrices suivantes.

$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$B_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$B_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 20 (❄)

Réduire (diagonaliser ou trigonaliser) les matrices suivantes.

$C_1 = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

$C_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

$C_3 = \begin{pmatrix} 9 & 60 & -12 \\ -2 & -11 & 1 \\ -4 & -28 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 21 (Mines Télécom PSI (Ilyana D.) - ❄)

Dans $E=\mathbb{C}_2[X]$, on pose

$$P_1(X)=(1-X)^2, P_2(X)=X(1-X) \text{ et } P_3(X)=X^2.$$

1. Montrer que $\mathcal{B}=(P_1,P_2,P_3)$ est une base de E.
2. On définit :

$$u : P\in E \longmapsto P(0)(1-X)^2+P(1/2)X(1-X)+P(1)X^2.$$

Montrer que u est un endomorphisme de E et déterminer la matrice $A=\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$.

3. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 22 (Mines Télécom PSI (Clément G.) - ❄)

Dans $E=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{B}=(E_{1,1},E_{1,2},E_{2,1},E_{2,2})$ la base canonique.

On note $P=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ et $\varphi\in\mathcal{L}(E)$ définie par $\varphi(M)=MP$.

1. Déterminer la matrice $A=\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.
2. Déterminer le noyau et l'image de A (avec le moins de calculs possible).
3. Diagonaliser la matrice A (avec le moins de calculs possible).

Exercice 23 (❄)

La matrice suivante est-elle diagonalisable ?

$$A=\begin{pmatrix}2&1&\cdots&\cdots&1\\0&2&1&&1\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&&0&2&1\\0&\cdots&\cdots&0&2\end{pmatrix} \quad (\text{avec } n\geq 2)$$

Exercice 24 (❄)

La matrice suivante est-elle diagonalisable ?

$$B=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&\cdots&1\\0&2&1&&1\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&&0&n-1&1\\0&\cdots&\cdots&0&n\end{pmatrix} \quad (\text{avec } n\geq 2)$$

Exercice 25 (❄❄)

$A=\begin{pmatrix}I_n&I_n\\0&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est-elle diagonalisable ?

Donner ses valeurs propres et vecteurs propres.

Exercice 26 (❄❄)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f\in\mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si $u\in E$ est un vecteur propre de f associé à une valeur propre non nulle de f alors $u\in\mathrm{Im}(f)$.
2. En déduire que si E est de dimension finie, et si f est diagonalisable, alors $E=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 27 (Mines-Ponts PSI 2022 (Hugo V.) - ❄❄❄)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f\in\mathcal{L}(E)$. On suppose que $f\circ f$ est diagonalisable. Montrer que :

$$f \text{ est diagonalisable} \iff \mathrm{Ker}(f)\cap\mathrm{Im}(f)=\{0\}.$$

Exercice 28 (EIVP PC 2016 - ❄)

On note $j=\mathrm{e}^{2i\pi/3}$ et $J=\begin{pmatrix}1&j&j^2\\j&j^2&1\\j^2&1&j\end{pmatrix}$.

Donner le rang et les valeurs propres de J.

Est-elle diagonalisable ?

Exercice 29 (CCP MP 2018 - ❄)

Montrer que si f est un endomorphisme de rang 1 d'un espace vectoriel de dimension finie $n\geq 1$, alors f est diagonalisable ou nilpotent.

Exercice 30 (❄❄)

Soient $n\geq 2$ et $M=\begin{pmatrix}1&\dots&1\\\vdots&&\vdots\\1&\dots&1\\1-n&\dots&1-n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Étudier les valeurs propres et la diagonalisabilité de M.

Exercice 31 (IMT PSI 2019 - ❄)

Soient E un espace vectoriel muni d'une base $(e_1,\dots,e_n)$ et v un vecteur de E.

Soit f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(e_1)=f(e_2)=\cdots=f(e_n)=v.$$

1. Expliquer comment calculer $f(u)$ pour $u\in E$.
2. Quel est le rang de f ?
3. Discuter de la diagonalisabilité de f en fonction de v.

Exercice 32 (IMT PSI 2022 - ❄)

Soit $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j}=ij$ pour $i,j\in[\![1,n]\!]$.

Déterminer les éléments propres de A.

Exercice 33 (IMT PSI 2022 (Célia D.) - ❄❄)

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible et $J=\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

On écrit $A^{-1}=[a'_{i,j}]_{i,j=1,\dots,n}$ et on pose $M=A^{-1}J$.

1. Donner les coefficients $m_{i,j}$ de M en fonction de ceux de A^{-1}.
2. Donner le rang de M, et en déduire une valeur propre de M.
3. Montrer que $\det(A-J)=\det(A)\left(1-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a'_{i,j}\right)$.

Exercice 34 (IMT PSI 2022 - ❄❄)

Soit $A\in GL_n(\mathbb{R})$. Expriemr $\chi_{A^{-1}}$ à l'aide de χ_A.

Exercice 35 (CCP PSI 2019 (Davy L.) - ❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit :

$$M_n(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. (a) Pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi.\mathbb{Z}$, on pose $\Delta_n = \det(M_n(2\cos(\theta)))$. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait :
$$\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} + b\Delta_n.$$
   (b) En déduire que $\Delta_n = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Quelles sont les valeurs propres de $M_n(x)$?
   La matrice $M_n(x)$ est-elle diagonalisable ? (5/2)

Exercice 36 (CCP PSI 2017 - ❄)

Soit $n \geq 4$ un entier.
On définit $\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto XP'' + (X-4)P' - 3P$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
2. Est-il diagonalisable ?
3. Déterminer la dimension puis une base du noyau de Φ.

Exercice 37 (❄)

On définit $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$: pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on pose $f(M) = \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. f est-elle diagonalisable ?

Exercice 38 (❄)

Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 10 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 39 (CCP PSI 2018 - ❄)

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u^2) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(u^2) \neq \mathrm{Ker}(u)$.
3. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Déterminer les endomorphismes v qui commutent avec u.

Exercice 40 (ENSEA PSI 2023 (Baptiste G.) - ❄)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Diagonaliser A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. En déduire l'ensemble des matrices qui commutent avec A.

Exercice 41 (❄❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A possède n valeurs propres distinctes que l'on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

1. Montrer que la famille $\{I_n, A, \dots, A^{n-1}\}$ est libre.
2. Montrer que le commutant de A est :
$$\mathrm{Com}(A) = \mathrm{Vect}\{I_n, A, \dots, A^{n-1}\}.$$

Exercice 42 (❄)

Résoudre le système différentiel suivant.

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x'(t) & = & x(t) + y(t) \\ y'(t) & = & -2x(t) + 3y(t) \\ \text{et} & & x(0) = 1,\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Exercice 43 (IMT PSI 2023 (Élise A.) - ❄)

1. Réduire la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Résoudre le système différentiel :
$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x'(t) & = & x(t) + 2z(t) \\ y'(t) & = & y(t) \\ z'(t) & = & 2x(t) + z(t) \end{cases}$$

Exercice 44 (❄)

Résoudre les équations différentielles suivantes. On précisera la structure des ensembles solutions.
$(\mathcal{E}_1) :\ y'''(t) + 2y''(t) - y' - 2y(t) = e^{-2t}$.
$(\mathcal{E}_2) :\ y'''(t) - 2y''(t) + y' - 2y(t) = 0$.

On pourra considérer la fonction vectorielle $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$.

Exercice 45 (❄)

1. Exprimer $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ à l'aide de I_3 et de J.
2. En déduire un polynôme annulateur de A de degré 2 et calculer A^n sans diagonaliser A.
3. Exprimer les termes généraux des suites définies par :
$$\begin{cases} x_{n+1} = -x_n + y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n - z_n \end{cases}$$

Exercice 46 (❄)

Déterminer l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 4u_{n+3}+8u_{n+2}+5u_{n+1}+u_n=0.$$

Indication : on pourra introduire le vecteur $X_n=\begin{pmatrix}u_n\\u_{n+1}\\u_{n+2}\end{pmatrix}$.
Quelles sont celles qui convergent ?

Exercice 47 (IMT PSI 2017 - ❄❄)

Soit $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

1. Soit X une matrice telle que $X^2=A$. Montrer que X et A commutent, puis que X est triangulaire supérieure.
2. Trouver toutes les matrices X telles que $X^2=A$.

Exercice 48 (CCP PSI 2017 - ❄❄)

Soient $n\geq 2$ et $D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ ou $\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_n$ sont n éléments de $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) deux à deux distincts.

1. Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que M commute avec D si et seulement si M est diagonale.
2. Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale. Montrer qu'il existe un polynôme P de degré au plus $n-1$ tel que $M=P(D)$.

Exercice 49 (ENSAM PSI 2017 - ❄❄)

Soit $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. On veut résoudre $M^2=A$.

1. Montrer que A n'est pas diagonalisable mais trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et la trigonaliser.
2. Montrer que le spectre de M vérifiant $M^2=A$ est inclus dans $\{-1,0,1\}$.
3. Estimer la dimension des sous-espaces propres correspondants.
4. Montrer que 0 est valeur propre de M.
5. Trouver toutes les matrices M solutions de $M^2=A$.

Exercice 50 (EIVP PSI 2017 - ❄❄)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f^2=-Id$.

1. Montrer que n est pair et que f n'est pas diagonalisable.
2. Montrer que si $x\in E$ est non nul, alors $\operatorname{Vect}\{x\}$ n'est pas stable par f, mais que $\operatorname{Vect}\{x,f(x)\}$ l'est.

Exercice 51 (CCINP PSI 2023 (Thibault H.) - ❄❄)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que :

$$u^2=u^3,\ \ u\neq \mathrm{Id}_E,\ u^2\neq 0 \text{ et } u^2\neq u.$$

1. Montrer que $\operatorname{Sp}(u)\subset\{0,1\}$.
2. À l'aide de $u^2\neq u$, trouver un vecteur non nul, dont l'image par u est 0.
3. Montrer que 1 est valeur propre de u.
4. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Exercice 52 (CCINP PSI 2019 - ❄)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que $3u^3=u^2+u+\mathrm{Id}$.

1. Montrer que u est bijectif.
2. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, u^k est combinaison linéaire de u^2, u et Id.
3. Est-il possible que u soit diagonalisable ? non diagonalisable ?
4. Qu'en est-il sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

Exercice 53 (Mines-Ponts PC 2018 - ❄❄)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $p,q\in\mathcal{L}(E)$ des projecteurs.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p\circ q=q\circ p=0$.
2. On suppose que $p+q$ est un projecteur. Montrer que p et q sont codiagonalisables (c'est-à-dire qu'ils diagonalisent dans une même base).

Exercice 54 (❄)

Soit $A\in\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $A^3-4A^2+3A=0$ et $\operatorname{tr}(A)=11$. Calculer le polynôme caractéristique de A.

Exercice 55 (❄❄)

On considère l'endomorphisme $u:\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$u(M)=\frac{1}{2}(2M-M^T)$$

1. Rechercher un polynôme annulateur de u.
2. Montrer que u est diagonalisable.
3. Déterminer la trace et le déterminant de u.

Exercice 56 (❄)

Soit $A\in M_n(\mathbb{C})$ avec $n\geq 3$. On suppose que A vérifie les conditions suivantes.

$$\operatorname{rg}(A)=2\quad \operatorname{tr}(A)=0\quad A^n\neq 0.$$

Montrer que A est diagonalisable et déterminer le nombre d'éléments de $\operatorname{sp}(A)$.

Exercice 57 (CCP PSI 2017 - ❄)

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle vérifiant $A^3+9A=0$.

1. Montrer que ses seules valeurs propres possibles sont $0,3i$ et $-3i$.
2. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
3. **(5/2)** Montrer que A ne peut pas être symétrique.
4. Montrer que si n est impair alors A n'est pas inversible.

Exercice 58 (CCP PSI 2017 - ❄)

Déterminer les $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^3-4M^2-4M=0$ et $\operatorname{tr}(M)=0$.

Exercice 59 (TPE PSI 2019 (Clémence H.) - ❄)

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^3.
2. La matrice M est-elle diagonalisable (resp. trigonalisable) dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$?

Exercice 60 (CCP PSI 2017 - ❄❄)

Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{rg}(A) = 1$.

1. Donner le polynôme caractéristique de A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ? Donner ses valeurs propres.

Exercice 61 (Navale PSI 2021 (Louis-Victor G.) - ❄)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $\mathrm{rg}(f) = 1$. f est-il un projecteur ?
2. Montrer que si $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{tr}(f) = 1$ alors f est un projecteur.

Exercice 62 (IMT PSI 2018 - ❄)

Montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $M^3 + M^2 + M = 0$ alors $\mathrm{tr}(M) \in \mathbb{Z}$.

Exercice 63 (❄)

Soit $A \in GL_6(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $\mathrm{tr}(A) = 8$.
Calculer le polynôme caractéristique de A.

Exercice 64 (Mines-Ponts PSI 2017 - ❄❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 5A + 6I_n = 0$.

1. A est-elle diagonalisable ? Que dire des valeurs propres de A ?
   Montrer que $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{N}$.
2. Calculer A^k en fonction de A et de I_n.

Exercice 65 (CCP PSI 2019 (François B.) - ❄❄)

1. Soit $P(X) = X^3 - X - 1$.
   Étudier l'existence des racines de P dans $\mathbb{C}$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$.
   Démontrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 66 (CCP PSI 2017 - ❄❄)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme annulateur non nul de A, de degré inférieur ou égal à deux.
2. Montrer que $\{I_3, A, A^2\}$ est libre.
3. Donner un polynôme annulateur de A et en déduire A^{-1}.
4. Quels sont tous les polynômes qui annulent A ?

Exercice 67 (CCP PSI 2019 (Axel L. et Maxime S.) - ❄❄)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \neq Id$ et $f^3 = Id$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de f.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - Id) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + f + Id)$.
3. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 68 (Mines-Ponts 2023 (Yassine N.) - ❄)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que f^2 soit un projecteur.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Exercice 69 (TPE PSI 2019 (Margaux L.) - ❄❄)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Soit λ un complexe non nul. On note r et $-r$ ses racines carrées : $r^2 = \lambda$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^2 - \lambda Id) = \mathrm{Ker}(f - rId) \oplus \mathrm{Ker}(f + rId)$.
2. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f^2 est diagonalisable et $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

Exercice 70 (❄)

Soient E un K-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E de rang 1.

1. Montrer que si f est diagonalisable alors $\mathrm{tr}(f) \neq 0$.
2. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que le polynôme caractéristique de f s'écrive

$$\chi_f(X) = X^{n-1}(X - \lambda).$$

3. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(f) \neq 0$.
4. Réduire sans calcul la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et donner sans calcul les sous-espaces vectoriels propres.

Exercice 71 (CCINP PSI 2021 (Mathis T.) - ❄)

Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $M^3 - 4M = 0$ et $\mathrm{tr}(M) = 0$.

1. Montrer que les valeurs propres de M sont racines de $P(X) = X^3 - 4X$.
2. Décrire les matrices M solutions.

Exercice 72 (❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les propriétés suivantes sont deux-à-deux équivalentes.

1. A est nilpotente
2. $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$
3. $\chi_A(\lambda) = \lambda^n$
4. $A^n = 0$

Exercice 73 (CCP PSI 2018 - ❄❄)

Soit f un endomorphisme de E qui admet un polynôme annulateur P vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$, d'abord en dimension finie, puis en dimension quelconque.

Exercice 74 (Centrale PC 2017 - ❄❄)

1. Quelles sont les valeurs propres d'une matrice nilpotente ?
2. Que dire de M si M est nilpotente et diagonalisable ?
3. Soient M_1, M_2 deux matrices nilpotentes, D_1, D_2 deux matrices diagonalisables telles que les quatre matrices commutent deux-à-deux et telles que $M_1 + D_1 = M_2 + D_2$. Montrer que $M_1 = M_2$ et $D_1 = D_2$.

Exercice 75 (IMT PSI 2019 (Olivier D.) - ❄)

À quelle(s) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s), la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 76 (ENSAM PSI 2016 - ❄)

À quelle(s) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s), la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 77 (❄)

A quelle condition la matrice suivante est-elle diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 78 (IMT PC 2018 - ❄)

À quelle(s) condition(s) nécessaire(s) et suffisante(s), la matrice suivante est-elle diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & e & f \\ 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & 0 & g \end{pmatrix}.$$

Exercice 79 (CCP PSI 2017 - ❄)

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On définit $A = \begin{pmatrix} 0 & -b & c \\ a & 0 & -c \\ -a & b & 0 \end{pmatrix}$.
Cette matrice est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 80 (❄)

Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & a & c \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 81 (❄❄)

Pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$ la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 82 (EIVP MP 2017 - ❄❄)

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 83 (❄❄)

A quelle(s) condition(s) $M = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
Montrer, dans ce cas, que pour tout n, M^n est combinaison linéaire de M et de I_4.

Exercice 84 (ENTPE-EIVP PSI 2016 - ❄)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, A^n est combinaison linéaire de I_3, A et A^2.
2. Calculer A^n.

Exercice 85 (CCINP PSI 2022 (Justin A.) - ❄)

Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit $M_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de M_a. Combien de valeurs propres possède-t-elle ? Les donner.
2. M_a est-elle diagonalisable ? Si oui, trouver P et D telles que $PDP^{-1} = M_a$.
3. M_a est-elle inversible ? Dans le cas où elle ne l'est pas, donner $\mathrm{Ker}(M_a)$ et $\mathrm{Im}(M_a)$.

Exercice 86 (❄❄)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = f^3$ et $\dim(\ker(f - Id)) = 1$.

1. Montrer que f^2 est un projecteur.
2. Montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \{0, 1\}$.
3. Montrer que $\ker(f^2)$ est un plan.
4. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\alpha = 0$ ou 1.

Exercice 87 (❄❄)

Montrer que, pour $n \geq 3$, la matrice N carrée d'ordre n, qui a des 1 sur la diagonale, sur la première et la dernière colonne, et des zéros ailleurs, est diagonalisable. Préciser ses éléments propres.

Exercice 88 (CCP PSI 2016 - ❄❄)

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$. On suppose que $n \geq 3$.

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $\mathrm{rg}(A)$ et $\mathrm{rg}(A^2)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$ sont supplémentaires.
3. Trouver une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que A soit semblable à la matrice suivante (définie par blocs).
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$
Calculer $\mathrm{tr}(B)$ et $\mathrm{tr}(B^2)$.
4. La matrice B est-elle diagonalisable ?

Exercice 89 (ENSEA PSI 2014 - ❄❄)

Soit $n \geq 3$ un entier et M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de la dernière ligne et de la dernière colonne qui valent 1.
(on pourra admettre qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable)

1. Quel est le rang de M ?
2. Montrer que M est semblable à une matrice triangulaire (5/2 : diagonale) dont tous les coefficients diagonaux sont nuls, sauf les deux derniers que l'on notera λ et μ. Montrer que λ et μ sont des réels non nuls.
3. Calculer $\lambda + \mu$ et $\lambda^2 + \mu^2$.
4. Donner une base de $\mathrm{Ker}(M)$.

Exercice 90 (CCP PSI 2017 - ❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit par bloc $A_{n+1} = \begin{pmatrix} J_n & (0) \\ (0) & n \end{pmatrix}$, avec $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée uniquement de 1.

1. Justifier que A_{n+1} est diagonalisable.
2. Diagonaliser J_n.
3. Connaissant un vecteur propre de J_n, comment construire un vecteur propre de A_{n+1} ?
4. Diagonaliser A_{n+1}.

Exercice 91 (IMT PSI 2022 - ❄❄)

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, avec $a_2 \neq 0$ et

$$A_= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

On note P_n le polynôme caractéristique de A_n.
1. Calculer P_2 et P_3.
2. Déterminer le rang de la matrice A_n. En déduire que X^{n-2} divise P_n.
3. Déterminer a, b et c tels que $P_n(X) = X^{n-2}(aX^2+bX+c)$.

Exercice 92 (CCINP PSI 2021 (Louis B.) - ❄❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 3$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Donner le rang de A et $\dim(\mathrm{Ker}(A))$.
2. A est-elle diagonalisable ?
(on pourra admettre qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable)
3. Que dire de la multiplicité de la valeur propre 0 ?
4. Montrer qu'il existe $\lambda > 1$ tel que $\mathrm{Sp}(A) = \{0, \lambda, 1 - \lambda\}$.
5. Donner un polynôme annulateur de A.

Exercice 93 (ENTPE-EIVP PSI 2014 - ❄❄)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C = A + B$. On suppose que $C^2 = 2A + 3B$ et $C^3 = 5A + 6B$.
Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ?

Exercice 94 (IMT PSI 2022 - ❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$ et :

$$f : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \mathrm{tr}(X)A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme. Déterminer son noyau.
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Quelle est sa trace ?

Exercice 95 (CCP PSI 2014 - ❄❄)

Soit φ défini par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = M - \mathrm{tr}(M)I_n$.
Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est-il diagonalisable ?

Exercice 96 (ENSAM et CCP PSI 2017 - ❄❄)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f définie par :

$$\forall M \in E,\ f(M) = M + \mathrm{tr}(M)I_n.$$

1. Montrer que $f \in GL(E)$.
2. Montrer que f admet un polynôme annulateur de degré 2. Calculer f^{-1}.
3. Donner les valeurs et vecteurs propres de f. Est-il diagonalisable ?

Exercice 97 (CCP PSI 2018 (Thomas L.) - ❄❄)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0 \in E$ non nul et φ une forme linéaire sur E, non identiquement nulle.
On pose : $\forall x \in E,\ u(x) = x + \varphi(x)x_0$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Montrer que 1 est valeur propre de u. Donner sa multiplicité et le sous-espace propre associé.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable.

Exercice 98 (Centrale PSI 2022 - ❄❄❄)

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $f(I_n) = I_p$ et telle que pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on ait $f(AB) = f(A)f(B)$.
On pose $\varphi : M \longmapsto \mathrm{tr}(f(M))$.

1. Justifier que, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\varphi(AB) = \varphi(BA)$.
2. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi : M \longmapsto \alpha\mathrm{tr}(M)$.
3. Montrer que n divise p.
4. Montrer que, si A est diagonalisable, alors $f(A)$ est diagonalisable.
5. Dans le cas $n = p = 2$, montrer que f est bijective.

Exercice 99 (CCINP PSI 2022 - ❄❄)

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $u : m \longmapsto aM + bM^T$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Trouver un polynôme annulateur de u de degré deux.
3. Déterminer les éléments propres de u.
4. Calculer $\det(u)$ et $\mathrm{tr}(u)$.

Exercice 100 (CCINP PSI 2022 (Raphaël D.) - ❄❄)

Soit φ l'application qui à $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de $X^2P(X)$ par $X^4 - 1$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. φ est-il diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.
3. φ est-il inversible ? Si oui, donner φ^{-1}.

Exercice 101 (CCP PSI 2018 - ❄)

Soient A, B deux matrices complexes carrées de taille n telles que $AB - BA = \alpha A$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A^kB - BA^k = \alpha k A^k$.
2. Montrer que A est nilpotente (on pourra s'intéresser à l'endomorphisme L défini par $L(M) = MB - BM$).

Exercice 102 (CCINP PSI 2021 (Andy D.) - ❄)

Soient A, B deux matrices réelles carrées de taille n telles que $AB - BA = A$.
Soit $f : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto XB - BX$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Calculer $\mathrm{tr}(A)$ et ensuit $\mathrm{tr}(A^k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f(A^k) = \alpha k A^k$.
4. En déduire que A est nilpotente.

Exercice 103 (ENSAM PSI 2014 - ❄❄)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = \alpha A + \beta B$.

1. Si $\alpha = \beta = 0$: montrer que A et B ont un vecteur propre commun.
2. Si $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$: montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $A^kB - BA^k = k\alpha A^k$.
   Montrer que φ défini par $\varphi(M) = MB - BM$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ puis que A est nilpotente.
   Montrer alors que A et B ont un vecteur propre commun.
3. Dans le cas général : montrer que A et B ont un vecteur propre en commun.
   On pourra considérer la matrice $C = \alpha A + \beta B$.

Exercice 104 (IMT PSI 2022 (Raphaël D.) - ❄❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $u \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad u(M) = AM.$$

Montrer que $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(A)$.

Exercice 105 (TPE PSI 2017 - ❄❄)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace de E possède un supplémentaire stable par f.

Exercice 106 (Mines-Télécom MP 2017 - ❄❄)

1. Énoncer le théorème du rang.
2. Montrer que si $f \in \mathcal{L}(E)$ alors $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.
3. Montrer que la réciproque est vraie lorsque f est diagonalisable (E de dimension finie ici).

Exercice 107 (Navale PSI 2018 - ❄❄)

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient $(AB)^2 = 0$, a-t-on $(BA)^2 = 0$?

Exercice 108 (❄❄)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que A et B n'ont pas de valeur propre commune si et seulement si la matrice $\chi_B(A)$ est inversible.

Exercice 109 (CCP PSI- ❄❄)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ? A est-elle inversible ? Donner les éléments propres de A.
2. On définit $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$. B est-elle diagonalisable ?
   Donner les éléments propres de B.

Exercice 110 (CCP PSI 2018 (Loïc M.) - ❄❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et B définie par $B = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1. Donner le rang de B en fonction de celui de A.
2. Exprimer χ_B en fonction de χ_A. En déduire le spectre de B en fonction de celui de A.
3. Si A est inversible, B est-elle diagonalisable ?
4. Si A est diagonalisable mais non inversible, B est-elle diagonalisable ?

Exercice 111 (❄❄)

1. Diagonaliser rapidement la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
2. A quelle condition sur $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice $C = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 112 (❄❄)

1. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ montrer que $B = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$.
2. Montrer que B est diagonalisable si et seulement si A l'est aussi.
3. Quand c'est le cas, pour $n = 2$, exprimer les vecteurs propres de B en fonction de ceux de A.

Exercice 113 (CCP PSI 2017 - ❄❄❄)

1. Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que si M^2 est diagonalisable alors M l'est aussi.
2. Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que N est inversible et calculer N^{-1}.
   (b) Calculer N^2 et $P(N^2)$ pour $P \in \mathbb{C}[X]$.
   (c) Montrer que si N est diagonalisable, alors AB l'est aussi.
   (d) Étudier la réciproque.

Exercice 114 (CCP PSI 2018 - ❄❄)

Soit $M = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ B & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Calculer M^2.
2. Justifier que si $P(M) = 0$, les valeurs propres de M sont racines de P.
3. On choisit $A = B^{-1}$ (B inversible). Justifier que M est diagonalisable et préciser les dimensions des sous-espaces propres.
4. On choisit $A = -B = I_n$. Justifier que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ et préciser les dimensions des sous-espaces propres.

Exercice 115 (❄❄)

Soit $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Calculer B^n puis, pour $P \in \mathbb{C}[X]$, exprimer $P(B)$ en fonction de $P(A)$ et $P'(A)$.
2. Montrer que si B est diagonalisable alors A l'est aussi et que ce n'est possible que si $A = 0$.

Exercice 116 (CCP PSI 2018 (Corentin M.)- ❄❄)

On donne $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$ où A et B sont des matrices complexes de même taille n, qui commutent.

1. Montrer que si U est semblable à V alors, pour tout polynôme R, $R(U)$ est semblable à $R(V)$.
2. Si $P \in \mathbb{C}[X]$, exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A), P'(A)$ et B.
3. Montrer que si A est diagonalisable et $B = 0$, alors M est diagonalisable.
4. Démontrer la réciproque.

Exercice 117 (CCP PSI 2013 - ❄❄)

1. Calculer B^n où $B = \begin{pmatrix} A & 0 & A \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que pour tout polynôme P, on a
$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 & AP'(A) \\ 0 & P(A) & 0 \\ 0 & 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$
3. Montrer que si B est diagonalisable, alors A l'est aussi.
4. Trouver une condition pour que B soit diagonalisable.

Exercice 118 (Centrale PSI 2018 - ❄❄)

Soit F de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})^2$ dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ définie par
$$F(A,B) = \begin{pmatrix} aB & bB \\ cB & dB \end{pmatrix} \text{ où } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $F(A_1A_2, B_1B_2) = F(A_1, B_1)F(A_2, B_2)$.
2. Donner $\operatorname{tr}(F(A,B))$, $\det(F(A,B))$ et $\operatorname{rg}(F(A,B))$ en fonction de $\operatorname{tr}(A)$, $\operatorname{tr}(B)$, $\det(A)$, $\det(B)$, $\operatorname{rg}(A)$, $\operatorname{rg}(B)$.
3. Donner une condition suffisante sur A et B pour que $F(A,B)$ soit diagonalisable.

Exercice 119 (Centrale PSI 2022 - ❄❄)

Soient $a_0, \dots, a_{N-1} \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On pose :
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ e^{2i\theta} \\ \vdots \\ \vdots \\ e^{Ni\theta} \end{pmatrix}$$
$$\text{et } A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{N-2} & a_{N-1} \\ a_{N-1} & a_0 & a_1 & & a_{N-2} \\ a_{N-2} & a_{N-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{N-2} & a_{N-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

1. Exprimer A comme polynôme en J.
2. Montrer que J est diagonalisable dans C. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que V soit un vecteur propre de J.
3. Montrer que A est diagonalisable dans C. Exhiber $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale. En déduire une expression de $\det(A)$.

Exercice 120 (CCP PSI 2016 - ❄❄)

1. Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ ainsi qu'une matrice diagonale D semblable à A.
2. Montrer que si une matrice N commute avec D, alors elle est diagonale.
3. Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que
$$M^7 + M + I_3 = A.$$

Exercice 121 (ENSEA PSI 2016 - ❄❄)

1. Donner le spectre de la matrice J de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
2. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(A) \in \mathrm{Sp}(A).$$
Si M est une matrice triangulaire et n'a que des 0 sur sa diagonale, déterminer $\varphi(M)$.
Déterminer $\varphi(J)$ et aboutir à une contradiction.
3. Que conclure ?

Exercice 122 (Mines-Ponts PC 2012 - ❄❄❄)

Pour $n \geq 2$, on note H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On suppose que H contient toutes les matrices nilpotentes. Déterminer une matrice simple de H qui est inversible.
2. Démontrer que si N est une matrice nilpotente alors pour tout $t \in \mathbb{K}$, la matrice $I_n + tN$ est inversible.
3. Déduire des questions précédentes que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$.

Exercice 123 (Mines-Ponts PC 2017 - ❄❄❄)

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. M est-elle diagonalisable ?
2. Représenter l'ensemble des α tels que M admette au moins une valeur propre de module 1.

Exercice 124 (Mines-Ponts PSI 2017 - ❄❄❄)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$.

1. Montrer que A est un polynôme en B, ou bien que B est un polynôme en A.
2. Qu'en est-il si A et B sont de taille $n \geq 3$? Si elles sont réelles ?

Exercice 125 (ENSEA PSI 2019, Centrale PC 2022 - ❄❄❄)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que 1 est la seule valeur propre de M si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{tr}(M^k) = n$.

Feuille 10

Suites et séries de fonctions

Extraits de rapports de jury :

- **Oral CCINP 2022 :** *Les raisonnements sur les suites et séries de fonctions sont sources de confusion pour beaucoup de candidats. La notion délicate de convergence uniforme est souvent retenue par la convergence vers 0 d'une norme infinie. Peu pensent à l'argument direct d'une suite ou série de fonctions continues dont la limite ne l'est pas.*
- **Oral CCINP 2019 :** *Les différents types de convergence pour les séries de fonctions ne sont pas maîtrisés. De très nombreux candidats affirment montrer la convergence uniforme d'une série de fonction en (re)démontrant la convergence simple vers 0 de la suite des restes. D'autres montrent la convergence uniforme sur tout intervalle* $[a, +\infty[$, $a > 0$ *et en déduisent la convergence uniforme sur* $\mathbb{R}_+^*$. *D'autres encore se lancent dans la preuve de la convergence uniforme après avoir remarqué la non continuité de la fonction somme.*
- **Oral CCINP 2018 :** *La convergence uniforme est très mal comprise et dans le cas des séries de fonctions, même si certains candidats pensent à utiliser la suite des restes, ils ne la majorent pas uniformément.*

  On constate beaucoup de confusion entre les hypothèses des différents théorèmes d'interversion entre $\sum$ *ou* $\lim$ *et* $\int$ *et des théorèmes de régularité des intégrales à paramètres.*
- **Oral ENSAM 2018 :** *Des imprécisions fréquentes sur les théorèmes d'interversion somme/intégrale. Parfois, par contre, ils sont connus mais les étudiants ne savent pas lequel choisir.*

  Il est dommage de voir de bons candidats, maitrisant les théorèmes par exemple sur convergence uniforme ou intégrales à paramètres être ralentis par des calculs de dérivées (mises en facteurs inexistantes, maladresses sur les fractions et puissances)
- **Oral Centrale 2019 :** *Enfin, quand il faut vérifier une hypothèse de domination, la fonction dominante doit avoir deux propriétés : l'une de convergence, l'autre d'indépendance par rapport à une variable, il faut que le candidat vérifie et énonce au moins oralement ces deux propriétés.*
- **Écrit Centrale 2017 :** *Les théorèmes de continuité et dérivabilité des séries de fonctions ne sont pas bien appliqués. Si les énoncés sont globalement sus, le sens des convergences uniformes et normales n'est que rarement compris.*
- **Oral Mines-Ponts 2021 PSI :** *le théorème de convergence dominée exige une domination sur l'intervalle tout entier, une domination sur tout segment n'a aucun sens ;*
- **Oral Mines-Ponts 2019 :** *Les théorèmes sur les suites et séries de fonctions sont en général bien sus. Dans leur application on attend l'emploi de quantificateurs et d'intervalles précis, notamment pour prouver la convergence uniforme.*

  Rappelons que le théorème de convergence dominée est applicable, quand bien même l'intervalle d'intégration est un segment (certains candidats pensent qu'il est nécessaire d'être en présence d'intégrales généralisées pour l'utiliser). Plus généralement, malgré une bonne connaissance des théorèmes d'interversion série-intégrale les candidats manquent de méthode pour savoir lequel employer.

  Trop souvent les candidats pensent que la convergence normale ou uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$, *entraîne la convergence normale ou uniforme sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 126 (❄)

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui converge simplement vers une fonction f.
   On suppose qu'il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'éléments de X telle que $(f_n(x_n) - f(x_n))$ ne tendent pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément.
2. Etudier la convergence simple et uniforme sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$) puis sur $]0, +\infty[$ de la suite de fonction définie par :
   $$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + n^2x^2} \qquad \text{(on pourra poser } x_n = \frac{\pi}{2n}\text{)}$$

Exercice 127 (CCP PSI 2018 - ❄)

Étudier la convergence simple et uniforme sur $[-1, 1]$ de la suite de fonctions définies par $f_n(x) = \sin(nxe^{-nx^2})$.

Exercice 128 (CCP PSI 2016 - ❄❄)

Montrer que la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(0) = 0$ et $f_n(x) = x\sin^{2n}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \in]0, 1]$ converge simplement mais pas uniformément.

Exercice 129 (ENSEA MP 2015 - ❄❄)

1. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions définies par $f_n(x) = ne^{-(nx)^2}$.
2. Etudier la convergence uniforme sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
3. La suite de fonctions converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Exercice 130 (❄)

Etudier la convergence simple (resp. uniforme) des suites de fonctions suivantes.

1. $f_n(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx) & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{si } x \in [1/n, 1] \end{cases}$
   (a) Convergence simple ?
   (b) Convergence uniforme ?
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{n+1}{n^2+x^2} \qquad n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Convergence simple ?
   (b) Convergence uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice 131 (❄)

Etudier la convergence simple (resp. uniforme) des suites de fonctions suivantes.

1. . $\forall x \in [0, +\infty[,\ f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+n^2x} \qquad n \in \mathbb{N}$.
   (a) Convergence simple ?
   (b) Convergence uniforme sur $[0, +\infty[$? sur des parties plus petites : $[a, b] \subset]0, +\infty[, [0, b]$ ou $[a, +\infty[\subset]0, +\infty[$?
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \cos\left(\dfrac{nx}{n+1}\right) \qquad n \in \mathbb{N}$.
   (a) Convergence simple ?
   (b) Convergence uniforme sur $[-A, A]$? sur $\mathbb{R}$?

Exercice 132 (CCINP 2023 (Maxence B.) - ❄❄)

Soient $a \geq 0$. On définit les fonctions f_n sur $I = [0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1],\ f_n(x) = \frac{nx(x^2+a)}{nx+1}e^{-x}.$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction F à préciser.
2. Discuter, selon les valeurs de a, de la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur I.
3. Etudier la convergence uniforme sur tout intervalle $[k, 1]$ avec $k \in]0, 1[$.

Exercice 133 (ICNA PSI 2017 - ❄❄)

Étudier la convergence simple et uniforme sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = n\cos^n(x)\sin(x)$.

Exercice 134 (CCP PSI 2017 - ❄❄)

Pour tout $n \geq 1$, on pose $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{nx^2}{1+nx} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{nx^3}{1+nx^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. Montrer que $(f'_n)_{n\geq 1}$ converge simplement mais pas uniformément sur $[-1, 1]$.

Exercice 135 (CCP MP 2015 - ❄❄)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n(x) = \cos^n(x)\sin(x)$.

1. Etudier les convergences simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, \pi]$.
2. Etudier les convergences simple, uniforme et normale de $\sum f_n$ sur $[0, \pi]$.

Exercice 136 (❄)

Etudier la convergence simple (resp. normale, uniforme) des séries de fonctions $\sum f_n$.

1. $\forall x \in [0, +\infty[,\ f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^2+x^2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.
2. $\forall x \in [0, 1],\ f_n(x) = n^2x^n(1-x)^n \quad (n \in \mathbb{N})$.
3. $\forall x \in [0, +\infty[,\ f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n^2+1} \quad (n \in \mathbb{N})$.
4. $\forall x \in [0, +\infty[,\ f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^2+x^2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.
5. $\forall x \in [0, +\infty[,\ f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x^2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

Exercice 137 (CCP PSI 2017 - ❄❄)

1. Montrer que si une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément, alors f_n est bornée à partir d'un certain rang, et converge uniformément vers 0.
2. Montrer que $\sum (-1)^n \dfrac{x^2+n}{n^2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ mais pas uniformément.

Exercice 138 (Mines-Ponts PC 2021 et 2022 - ❄❄)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathbb{R}^+$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, soit $f_n(x) = a_nx^n(1-x)$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.
2. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, 1]$ si et seulement si $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge.
3. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ si et seulement si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice 139 (Centrale PSI 2021 - ❄❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n n}{n^2+x}$.

1. Établir la convergence simple de la série de terme général $u_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$ et, pour $a>0$, sa convergence uniforme sur $[0,a]$.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels positifs ou nuls.
   (a) Montrer que $0 \leq (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \leq a_n$.
   (b) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 140 (❄❄)

On pose $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R},\ \ u_n(x) = \dfrac{1}{n+(n(x-n))^2}$.

1. La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?
2. En minorant $|x-n|$ par 1 pour « presque tout » $n\in\mathbb{N}$, montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 141 (CCP PC 2017 - ❄)

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n}$.

Étudier l'existence de I_n puis la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 142 (❄)

Déterminer les limites suivantes.

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x/n}}{1+x^2}dx$$
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{1}\frac{dx}{1+x+\cdots+x^n}$$
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{1} n\left(e^{\frac{x}{n+x}}-1\right)dx$$

Exercice 143 (❄❄)

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx$.

Exercice 144 (IMT 2022 (Célia D.) - ❄❄)

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in]0,1[$, on pose :

$$f_n(x) = \frac{x^{2n+1}\ln(x)}{x^2-1}.$$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $]0,1[$.
2. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
3. Calculer $I_k - I_{k+1}$. En déduire que $I_n = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

Exercice 145 (CCP PSI 2018 (Alexandre B.) - ❄)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{sh}(t)=1$.
2. On note $\alpha = \ln(1+\sqrt{2})$ et $I_n = \displaystyle\int_0^\alpha \mathrm{sh}^n(t)dt$. Etudier la convergence de I_n.
3. Montrer que $\mathrm{ch}^2(t) = 1+\mathrm{sh}^2(t)$ puis que pour tout entier $n\geq 2$, on a $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$,
4. Trouver un encadrement et un équivalent de I_n.

Exercice 146 (Mines-Ponts PSI 2022 - ❄)

Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, $f_n : x \longmapsto \dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$.

1. Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que, pour tout n, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer son intégrale.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$. Commentaire ?

Exercice 147 (CCINP PSI 2021 (Louis B.) - ❄❄)

Pour $n\in\mathbb{N}^n$, et pour $t\in[O,1]$, on pose $g_n(t) = \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n e^t$.

1. Montrer que pour tout $t\in[0,1]$, on a $|g_n'(t)| \leq \dfrac{e^t}{n}$.
2. En déduire que pour tout $t\in[0,1]$, on a :
$$\left|\left(1-\frac{t}{n}\right)^n e^t - 1\right| \leq \frac{te^t}{n}.$$
3. Pour tout $x\in[0,1]$, on pose $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x g_n(t)dt$.
   Montrer que, sur $[0,1]$, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
4. Montrer que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 148 (IMT PSI 2019 (Gabriel P.) - ❄)

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.

1. Montrer que, sur $[0,1]$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
3. Soit $a\in]0,1]$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,1]$.
4. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 149 (CCINP PSI 2019 (Théo D.) - ❄❄)

Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}^n(t)}$.

1. Vérifier que I_n est bien définie sur $\mathbb{R}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
2. Déterminer la convergence simple de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Est-t-elle uniforme ?
3. Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.

énoncé incomplet

Exercice 150 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t/n)}{t+t^3} dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifier l'existence de I_n.
2. Déterminer la limite de I_n, puis un équivalent de I_n.

Exercice 151 (Mines-Ponts PSI 2021 - ❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(nt)}{(1+n^4t^2)^2} dt$.

1. Justifier l'existence de I_n.
2. Déterminer la limite de I_n, puis un équivalent de I_n.

Exercice 152 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

1. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n\ln(1+t^n)dt$.
   Ind. Utiliser le changement de variable $u = t^n$.
2. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 nf(t)\ln(1+t^n)dt$.

Exercice 153 (Mines-Ponts PSI 2022 - ❄❄❄)

Soient $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n)dt$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 154 (CCP PC 2018 - ❄)

Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

Montrer que f est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

Exercice 155 (CCP PC 2015 - ❄)

Montrer que $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

Exercice 156 (❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $f_n : x \in]1,+\infty[\longmapsto \dfrac{(-1)^n}{\ln(nx)}$.

1. Justifier que l'application $F : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est bien définie sur $]1,+\infty[$.
2. Démontrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $]1,+\infty[$.
3. Montrer que F est continue sur $]1,+\infty[$ et déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1} F(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
4. Déterminer un équivalent de $F(x)$ lorsque x tend vers 1.
5. Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et dresser le tableau des variations de F.

Exercice 157 (Mines-Télécom PSI 2016 - ❄)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1]$, on pose

$$u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \qquad \text{et} \qquad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

1. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

Exercice 158 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

Soit $S : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2x+n}$.

1. Déterminer le domaine de définition de S.
2. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
3. Déterminer un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 159 (CCINP PSI 2023 (Yassine N.) - ❄❄)

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \dfrac{x}{\text{sh}(x)}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{\text{sh}^2(nx)}$.

1. Énoncer le théorème de dérivation terme à terme.
2. Montrer que f est bornée.
3. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $]0,+\infty[$.
4. On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
   Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
5. Exprimer $f_n(x)$ à l'aide de $f(x)$ et en déduire un équivalent de S en 0^+.
   On admettra que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 160 (Mines-Ponts PC 2022 - ❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \dfrac{1}{n+n^2x^2}$, et $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et étudier sa parité.
2. Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur le domaine de définition de f.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est bien définie, et l'exprimer comme la somme d'une série numérique.
4. Déterminer la limite puis un équivalent de f en $+\infty$.
5. Déterminer la limite puis un équivalent de f en 0.

Exercice 161 (Centrale PSI 2022 - ❄❄)

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n dt$.

1. Montrer l'existence de I_n pour tout entier $n \geq 2$.
2. Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\geq 2}$.
3. Montrer que $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{kn} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin(u)}{u+k\pi}\right)^n du$.
   En déduire que $I_n > 0$.

Exercice 162 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

Soit $S : x \longmapsto S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\exp(nx)}{1+\exp(2nx)}$.
Déterminer le domaine de définition, la continuité, les limites aux bornes de S.

Exercice 163 (Mines-Ponts PSI 2017 - ❄❄)

1. Étudier les convergences simple et uniforme de $\displaystyle\sum \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n}$.
2. On note f sa somme. f est-elle continue ? dérivable ?
3. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 164 (d'après CCP PSI 2018 (Corentin M.) - ❄

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$.

1. Étudier la convergence de $\sum f_n(x)$.
   On note $S(x)$ sa somme quand elle existe.
2. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
3. On donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,64$. Calculer $S(0), S(1), S'(0)$ et $S'(1)$.
4. Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x) = +\infty$.
5. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S'(x)$ et tracer le graphe de S sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 165 (TPE PSI 2019 (Clémence H.) - ❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{n(1+x^2)}\right)$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
   On note f sa somme.
2. Montrer que $\sum (-1)^n \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. On note S sa somme.
3. Justifier l'existence de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et l'exprimer à l'aide de S.
4. Calcul de S.
   (a) Démontrer que :
   $$\sum_{n=1}^{N} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{((2N+1)!)^2}{16^N(2N+1)(N!)^4}\right).$$
   (b) En utilisant la formule de Stirling, déterminer S.

Exercice 166 (IMT PSI 2023 (Lucas E.) - ❄❄)

On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer la limite (et un équivalent) de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.
3. On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   Prouver que $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2x}$.

Exercice 167 (❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{(n+x)^2}$.

1. Montrer que la fonction $S : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
3. Etudier la monotonie de S sur $]0, +\infty[$.
4. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to0^+} S(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

Exercice 168 (❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) = \frac{\mathrm{Arctan}(nt)}{n^2}$$
et on considère la série de fonctions $\sum f_n$.

1. Déterminer le domaine de définition D de $\sum f_n$, sa parité et sa monotonie. On note S sa somme.
2. Démontrer que S est continue sur D et déterminer sa limite en $+\infty$.
3. Démontrer que S est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que
   $$\lim_{t\to0} S'(t) = +\infty.$$
4. Tracer l'allure du graphe de S.

Exercice 169 (cf. Cours - ❄❄)

On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de S.
2. Montrer que S est continue sur D et déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S(x)$.
3. Démontrer que S admet une limite (finie ou infinie) en 0^+.
4. En raisonnant par l'absurde, montrer que
   $$\lim_{x\to0^+} S(x) = +\infty.$$
   On pourra utiliser les sommes partielles.

Exercice 170 (CCINP PSI 2021 (Emma H.) - ❄❄)

On s'intéresse à $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ avec $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n \mathrm{e}^{-nx}}{n}$.

1. Donner le domaine de définition de S.
2. Étudier la continuité de S.
3. Montrer que S est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Expliciter $S(x)$.

Exercice 171 (Mines-Télécom PSI 2017 - ❄❄)

On s'intéresse à $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}}{n}$.

1. Donner le domaine de définition de S.
2. Montrer que S est dérivable sur son domaine de définition.
3. Montrer que S est monotone sur son domaine de définition.
4. Que dire de S au voisinage de $+\infty$. ?

Exercice 172 (D'après TPE PC 2018 - ❄❄)

1. Donner le domaine de définition de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2x+n}$ et montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
2. Avec $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, trouver un équivalent de S en $+\infty$.
3. Montrer que $S(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)$.

Exercice 173 (❄❄)

On note $f_n : x \in [0,+\infty[\longmapsto \frac{x}{n(1+nx^2)}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Quand elle existe, on note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

1. Etudier les convergences de $\sum f_n$.
2. (a) Montrer : $\lim_{x\to 0^+} \frac{S(x)}{x} = +\infty$.
   L'application S est-elle dérivable en 0 ?
   (b) Etablir que $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$

Exercice 174 (Mines-Ponts PSI 2021 - ❄❄(❄))

On considère la série de fonctions $f = \sum u_n$ avec

$$u_n(x) = \ln(1+e^{-nx}).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f et montrer que f est continue et décroissante sur D.
2. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3. En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$, déterminer un équivalent de f en 0.

Exercice 175 (CCP MP 2015 - ❄❄)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{n^3}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'elle est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$. On pourra ramener l'étude sur $[a,+\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 176 (Mines-Ponts PC - ❄❄)

Soit $f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$ et $R_n : x \longmapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{xe^{-kx}}{\ln(k)}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{xe^{-(n+1)x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}.$$

3. Étudier la continuité de f.
4. La série de fonction converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$? normalement sur $\mathbb{R}_+^*$? normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 177 (CCINP PSI 2019 et 2023 (Kévin D.) - ❄❄)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{x+n}$.

1. Donner l'ensemble de définition de S en fonction de a.
2. On suppose que $|a| < 1$.
   (a) Étudier la continuité de S sur $]0,+\infty[$.
   (b) Déterminer une relation entre $S(x+1)$ et $S(x)$.
   (c) En déduire un équivalent de S en 0^+.
   (d) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$ puis un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 178 (CCINP PSI 2019 (Margaux L.) - ❄❄)

1. Déterminer le domaine de convergence de la série $\sum_{n\geq 2} u_n(x)$ avec

$$u_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}.$$

2. Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur ce domaine.
3. On note $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n(x)$.
   Montrer que $|R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$.
4. Montrer que $\sum u_n$ est continue sur son domaine de définition.
5. $\sum u_n$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

Exercice 179 (❄❄)

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Justifier que f est bien définie sur $]0,+\infty[$.
2. Démontrer alors l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} = f(x).$$

3. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$?
4. Etablir une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$.
5. Déterminer un équivalent de $f(x)$ en 0 et en $+\infty$.

Exercice 180 (❄❄)

On considère la série $\sum_{n\geq 1} u_n(t)$ avec $u_n(t) = \frac{2t}{n^2+t^2}$.

1. Déterminer le domaine de convergence D de cette série. On note S sa somme.
2. Etudier la continuité de S.
3. (a) La série de fonctions $\sum u_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?
   (b) A l'aide d'intégrales, démontrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ 2\text{Arctan}(t) \leq S(t) \leq 2\text{Arctan}(t) + \frac{2t}{1+t^2}.$$

   (c) En déduire $\lim_{t\to+\infty} S(t)$.
   (d) Pouvait-on utiliser le théorème de double limite ?

Exercice 181 (❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n : x \in]0,+\infty[\longmapsto n^x e^{-nx} \text{ et } S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

1. Démontrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$. Ainsi, S est bien définie sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer S'.
3. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
4. En minorant n^x par 1, déterminer la limite de S en 0^+.

Exercice 182 (❄)

1. Existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\mathrm{ch}^n(x)}$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
3. Etudier la nature de $\sum (-1)^n I_n$ puis de $\sum I_n$.

Exercice 183 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x \ln(n)}$.
La fonction f est-elle intégrable sur son domaine de définition ?

Exercice 184 (CCINP PSI 2019 et 2023 (Gabriel L.) - ❄

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n(t)dt$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
2. Calculer $I_n + I_{n+2}$.
3. À l'aide du changement de variable $t = \tan(x)$, déterminer une autre expression de I_n.
4. Montrer la convergence de $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et calculer sa somme.
5. Démontrer que $\sum (-1)^n I_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 185 (CCP PSI 2017 - ❄)

On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x+\cdots+x^n} dx$.

1. Déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Déterminer la nature de $\sum u_n$.

Exercice 186 (❄)

On considère l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$.
Montrer que cette intégrale est bien définie puis établir l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 187 (❄)

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 188 (ENSAM PSI 2018 (Axel C.B.)- ❄❄(❄))

1. Existence suivant $n \in \mathbb{N}^*$ de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} dx$.
2. Déterminer les limites de I_n et de nI_n quand n tend vers $+\infty$.
3. Quelle est la nature de $\sum (-1)^n I_n$? de $\sum I_n$?
4. On pose $K_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}}{x(1+x^2)} dx$. Déterminer la nature de $\sum K_n$.

Exercice 189 (CCP PSI 2018 - ❄❄)

1. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles l'intégrale $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^\alpha dt$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Parmi les valeurs précédentes, déterminer celles pour lesquelles la série de terme général $I_n(\alpha)$ converge, puis calculer la somme de cette série.

Exercice 190 (Mines-Ponts PSI 2022 - ❄❄)

Soit, pour $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, $u_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha(t)\cos^n(t)dt$.

1. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$ selon les valeurs de α.
2. Calculer les sommes des séries de terme général $u_n(2)$ et $u_n(3)$.

Exercice 191 (CCINP 2022 (Flavien L.) - ❄❄)

Démontrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{sh}(x)} dx$ est bien définie et que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{sh}(x)} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$.

Exercice 192 (CCINP 2022 (Elias AB.) - ❄❄)

Démontrer que l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1} dx$ est bien définie et que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$.

Exercice 193 (ENTPE EIVP PC 2015 - ❄❄)

Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{2n}(1-x)dx$ de deux façons différentes.

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

Exercice 194 (❄)

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} dt$ est-elle bien définie ?

Montrer l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 195 (CCP PSI 2018 et 2021 (Aubin G.) - ❄❄)

Justifier la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+e^t} dt$ et montrer que

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(-1)^{n-1}}{1+n^2}.$$

Exercice 196 (ENTPE-EIVP MP 2015 - ❄❄)

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{2x}-e^{-x}} dx$.

Exercice 197 (CCINP PSI 2018 et 2019 (Davy L.) - ❄❄

1. Justifier l'existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt$.
2. Sachant que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, montrer que :

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

Exercice 198 (CCP PSI 2017 - ❄❄)

On pose $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t)$ si $t \in]0, n]$ et 0 si $t \geq n$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$, vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{e^t} \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n f_n(t)\mathrm{d}t$.
3. On admet que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

   Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{e^t} \mathrm{d}t = -\gamma$.

   On poura faire le changement de variable $t = nu$, puis effectuer une intégration par parties.

Exercice 199 (EIVP PC 2016 - ❄❄)

Soit $\alpha > 0$.

Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{1+n\alpha}$ converge et que sa somme est égale à $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$.

Exercice 200 (❄❄)

1. Montrer que, pour $t \in [0, 1]$, la série de terme général $f_n(t) = t^n \sin(\pi t)$ est convergente et déterminer sa somme $F(t)$.

   Y a-t-il convergence uniforme ?
2. Démontrer que $\int_0^1 F(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt$.

   En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Exercice 201 (CCP PSI 2017 - ❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)\mathrm{d}x$.

1. Étudier la convergence de $\sum u_n$.
2. Montrer : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x} \mathrm{d}x$

Exercice 202 (❄❄)

1. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\sin(nx)dx.$$

2. Montrer que $u_{n-1} - u_n = u_n - \frac{1}{n}$ et en déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 203 (❄❄)

Pour $x \in]0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \frac{(-x\ln(x))^n}{n!}$ et $f_n(0) = 0$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, 1]$.
2. En déduire $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

Exercice 204 (CCP IMT 2018 - ❄❄)

On note $I = \int_0^1 t^t dt$ et $f_{n,p} : x \longmapsto x^n \ln^p(x)$ pour tous $n, p \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\sum \frac{1}{n^n}$ converge.
2. Montrer que l'intégrale I est bien définie.
3. Montrer que pour tous entiers $n, p \in \mathbb{N}$, la fonction $f_{n,p}$ est intégrable sur $]0, 1[$.
4. Calculer, pour tous entiers $n, p \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f_{n,p}(t)dt$.
5. Montrer que $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$

Exercice 205 (❄❄❄)

1. Montrer que $f : x \longmapsto \ln(1 + x^n)$ est définie sur $[0, 1[$.
2. Justifier que pour tout $x \in [0, 1[$ et tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\prod_{n=0}^{N} (1 + x^n) \geq \sum_{n=0}^{N} x^n.$$

3. En minorant les sommes partielles, démontrer que

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty.$$

Exercice 206 (Centrale PC 2017 - ❄❄)

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction f donnée par :
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^x \mathrm{e}^{-nx}.$$
2. Déterminer les limites de f aux bornes de D.

Exercice 207 (CCP MP 2017 - ❄❄)

1. Montrer que la série $S(x)$ des fonctions $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ est définie sur $]0,+\infty[$ et que $S(1) = 1 - \mathrm{e}^{-1}$.
2. Montrer que $xS(x) - S(x+1) = \dfrac{1}{e}$.
3. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer un équivalent de $S(x)$ en 0 et en $+\infty$.
5. Montrer que $S(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

Exercice 208 (ICNA PSI 2017 - ❄❄)

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ζ définie par :
$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de ζ.
3. Montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\ln(n)}$.

Exercice 209 (Mines-Ponts PC 2018 - ❄❄)

Soit $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Donner le domaine de définition D de F et mointrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D.
2. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.
3. Déterminer un équivalent de $f(x) - 1$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 210 (Mines-Ponts PSI 2017/18 (Virgile S.) - ❄❄❄

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^{-nx})$.

1. Déterminer le domaine de définition I de la fonction f donnée par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.
2. Montrer que f est continue et décroissante sur I.
3. Trouver la limite de f en $+\infty$.
4. On donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$.
   Déterminer un équivalent de f en 0^+.

Exercice 211 (❄❄)

Pour tout $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) = +\infty$.

On pourra revenir à la définition et utiliser la divergence de $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$.

Exercice 212 (Centrale PSI 2016 - ❄❄❄)

Soit $a : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow [1,+\infty[$ une fonction telle que $\dfrac{a(x)}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On pose $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-a(n)t}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Trouver un équivalent de f en $+\infty$.
3. Soit $b > 0$. On suppose que $a(x) = x^b$.
   Déterminer un équivalent de f en 0.

Exercice 213 (Mines-Ponts MP 2022 - ❄❄❄)

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ décroissante et intégrable.

Pour $x > 0$, on pose $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(nx)$.

1. Montrer que g est bien définie.
2. Déterminer un équivalent simple de g en 0 ?

Feuille 11

Séries entières

Extraits de rapports de jury :

- **Oral CCINP 2022 :** *Sur les fonctions développables en série entière, les techniques sont souvent connues (notamment la règle de d'Alembert), en revanche la nécessité de prouver qu'un rayon est non nul pour garantir qu'une fonction est développable en série entière n'est pas toujours comprise.*
- **Oral CCINP 2019 :** *La régle de d'Alembert semble être la seule méthode connue pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière.*

  Le principe de recherche d'une solution développable en série entière d'une équation différentielle et en miroir le principe de détermination d'une équation différentielle vérifiée par une fonction somme d'une série entière sont compris. En revanche les calculs ne sont que rarement terminés et justes, le plus souvent à cause d'une mauvaise manipulation des indices des sommes.
- **Oral CCINP 2018 :** *La plupart des candidats cherchent le rayon de convergence d'une série entière en tentant d'appliquer la règle de d'Alembert. Celle-ci est très mal utilisée, notamment lorsque le terme général de la série dépend de la parité de l'indice, et les candidats sont bien embêtés lorsque ce critère ne s'applique pas. Il est indispensable de connaître d'autres techniques pour déterminer le rayon de convergence. Les examinateurs ont souvent vu des candidats pensant que la règle de d'Alembert était une équivalence.*
- **Oral Mines-Télécom 2022 :** *On rencontre toujours de très nombreux étudiants qui sont incapables de trouver un rayon de convergence d'une série entière lorsque la règle de d'Alembert ne s'applique pas.*
- **Oral Centrale 2022 :** *Les séries entières posent encore de grosses difficultés. Le jury rappelle aux candidats que la règle de d'Alembert (déduite de celle pour les séries numériques) n'est pas le seul outil pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière. Très peu d'étudiants ont par exemple le réflexe de dire : $(a_n)_{n\geq 0}$ est borné donc le rayon est supérieur ou égal à 1.*
- **Oral Centrale 2021 :** *. La recherche d'une solution développable en série entière d'une équation différentielle est un exercice généralement bien connu des candidats. Cependant, les calculs sont souvent nettement plus longs qu'ils ne le devraient et occupent de ce fait la quasi-totalité de la présentation des candidats.*
- **Oral Mines-Ponts 2021 :** *Le mode de convergence d'une série entière sur l'intervalle $]-r,r[$ (où r est le rayon de convergence) est rarement une convergence uniforme, et encore plus rarement une convergence normale.*
- **Oral Mines-Ponts 2019 :** *Lors de l'introduction d'une série entière, il faut systématiquement préciser son rayon de convergence avant de se lancer dans un calcul. Les produits de Cauchy ne sont pas toujours reconnus, avec des difficultés techniques de calcul si les séries ne sont pas indicées à partir de $n=0$.*
- **Oral Mines-Ponts 2018 :** *Beaucoup trop de candidats pensent qu'une série entière de rayon de convergence $R>0$ converge uniformément sur l'intervalle $]-R,R[$, et non sur tout segment de cet intervalle.*

Exercice 214 (Parité - ❄)

On se donne une série entière f dont on note R le rayon de convergence.

$$\forall x \in]-R,R[, \qquad f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Montrer que si f est paire alors pour tout entier n impair $a_n=0$.
2. Montrer que si f est impaire alors pour tout entier n pair $a_n=0$.

Exercice 215 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄)

Calculer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n x^{2n}}{n!}$.

Exercice 216 (Mines-Ponts PSI 2017 - ❄)

Calculer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{2n}$.

Exercice 217 (❄)

Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes.

1) $\displaystyle\sum \frac{n\ln(n)}{n^2+1} z^{2n}$ 2) $\displaystyle\sum \operatorname{Arctan}\left(\frac{\ln(n)}{\sqrt{n^3+n+1}}\right) z^n$

3) $\displaystyle\sum e^{2in} z^n$ 4) $\displaystyle\sum \ln(n)^{\ln(n)} z^n$

Exercice 218 (❄)

Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes.

1) $\sum \left(\dfrac{\ln^2(n)}{\sqrt[3]{n^2+n+1}}\right) z^n$ 2) $\sum \dfrac{2^{n+1} z^{2n+1}}{n^2}$

3) $\sum \dfrac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{sh}(n)} z^n$ 4) $\sum \left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right) z^n$

Exercice 219 (❄)

Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes.

1) $\sum \left(e^{(n+1)^\alpha} - e^{(n-1)^\alpha}\right) z^n$ 2) $\sum n^n z^{n!}$

3) $\sum \sqrt{n}^{\ln(n)} z^n$ 4) $\sum \ln(n!) z^n$

Exercice 220 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

1. Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a $|\sin(x)| \geq \left|\dfrac{2x}{\pi}\right|$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{z^n}{\sin(\pi\sqrt{3}/n)}$.

Exercice 221 (❄)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont on note R le rayon de convergence.
On suppose qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum a_n z_0^n$ soit semi-convergente. Que vaut R ?

Exercice 222 (❄)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont on note R le rayon de convergence.
On suppose qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum a_n z_0^n$ diverge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n z_0^n = 0$. Que vaut R ?

Exercice 223 (Mines Télécom PSI 2021 (Lorine B.) - ❄

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et P un polynôme non nul. Montrer que $\sum a_n z^n$ et $\sum P(n) a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Exercice 224 (❄❄)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty[$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

$$\sum a_n^2 z^n,\ \sum n! a_n z^n,\ \sum n^4 a_n z^n \text{ et } \sum \frac{a_n}{n!} z^n.$$

Exercice 225 (Mines - Ponts PSI 2016 - ❄❄)

Déterminer le rayon de convergence de $\sum \left(3 + (-1)^n\right)^n x^n$.

Exercice 226 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2}$.

1. Justifier l'existence de a_n.
2. Montrer que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
3. Déterminer le domaine de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

Exercice 227 (CCINP PSI 2022 - ❄❄)

Soient, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}^n(x)}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$.

1. Justifier que chaque fonction f_n est intégrable sur R^+.
2. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Nature des séries $\sum I_n$ et $\sum (-1)^n I_n$?
   Ind. Majorer $\mathrm{ch}(x)$ *par* e^x.
4. Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum I_n x^n$.

Exercice 228 (CCP PC 2018 - ❄)

Rayon de convergence puis somme de $\sum n^2 x^n$.

Exercice 229 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄)

Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 - 5n + 1}{n!} x^n$.

Exercice 230 (CCINP PC 2022 - ❄)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

Rayon de convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin^2(n\theta)}{n!} x^n$.

Exercice 231 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄)

1. Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}$.

Exercice 232 (❄)

Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes et calculer leurs sommes.

1) $\sum \dfrac{1}{1+2+\cdots+n} x^n$ 2) $\sum \dfrac{x^{2n}}{2n+1}$

3) $\sum \dfrac{\sin(n)}{n!} x^n$ 4) $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$

Exercice 233 (IMT PSI 2022 - ❄)

Rayon de convergence et somme de $\sum \dfrac{x^n}{2n+1}$.

Exercice 234 (CCP PSI 2017 - ❄)

Déterminer le rayon de convergence de $\sum \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) x^n$ et calculer sa somme.

Exercice 235 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

Soit $f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n} x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de f.
2. Exprimer $f(x)$.

Exercice 236 (St Cyr PSI 2023 (Lucas E.) - ❄❄❄)

Pour $(p, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, on définit :

$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \cos^p(n\theta) x^n.$$

Déterminer son rayon de convergence et calculer sa somme.

Exercice 237 (IMT PC 2018 - ❄❄)

Soit $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Exprimer $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 238 (CCP PSI 2013 - ❄)

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Donner le rayon de convergence de $\sum u_n z^n$ et calculer sa somme.

Exercice 239 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = v_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - v_n \text{ et } v_{n+1} = u_n - 2v_n.$$

Déterminer les rayons de convergence et les somme de $\sum u_n x^n$ et de $\sum v_n x^n$.

Exercice 240 (CCINP PSI et Mines-Ponts PC 2019 - ❄

Soit $u_0 = 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}.$$

On suppose que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ est de rayon strictement positif.

1. Trouver une relation entre f et f^2, et en déduire f à l'aide des fonctions usuelles.
2. Déterminer une expression de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Préciser R.

Exercice 241 (CCINP PSI 2021 - ❄❄)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2u_n}{n+2}.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer $1 \leq u_n \leq n^2$.
   Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$.
2. On note $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.
   Exprimer S à l'aide des fonctions usuelles.
3. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 242 (CCINP PSI 2022 - ❄❄)

1. Soit $x \in [0, 1[$. Trouver a, b et $c \in \mathbb{R}$ (dépendant de x) tels que, pour tout $t \in [0, 1]$, $\frac{1}{(1+t^2)(1+tx)} = \frac{at+b}{1+t^2} + \frac{c}{1+tx}$.
2. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n x^n$ avec $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$.
3. Calculer la somme $S(x)$ de cette série entière pour $x \in]-R, R[$.
4. Étudier la limite de S en $-R$.

Exercice 243 (CCINP PSI 2021 - ❄)

Développer en série entière la fonction f défie par $f(s) = \frac{s}{2-s^2}$.

Exercice 244 (IMT PC 2018 - ❄)

Développer $f : x \longmapsto \frac{1}{(x+3)(x-1)}$ en série entière au voisinage de 0. Préciser le rayon de convergence.

Exercice 245 (Navale PSI 2017 - ❄)

Développer $f(x) = \frac{1}{2+x-x^2}$ en série entière.

Exercice 246 (EIVP MP 2017 - ❄❄)

Développer en série entière $\ln(1 + x + x^2)$.

Exercice 247 (CCP MP 2018 - ❄)

Donner le développement en série entière des fonctions suivantes en 0. On précisera dans chaque cas le rayon de convergence.

1. $f(z) = \frac{1}{6z^2 - 5z + 1}$ avec $z \in \mathbb{C}$,
2. $g(x) = \ln\left(\frac{2+x}{1-x}\right)$,
3. $h(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$.

Exercice 248 (❄)

Développer en séries entières les fonctions suivantes au voisinage de 0. Préciser leurs rayons de convergence.

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 - 2x\mathrm{ch}(a) + 1}$
2. $x \longmapsto \mathrm{Arctan}\,(2+x)$
3. $x \longmapsto \sin(x)\mathrm{ch}(x)$

Exercice 249 (Mines-Ponts PC 2019 - ❄❄)

Développer en série entière au voisinage de l'origine l'application :

$$f : x \longmapsto \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t.$$

Exercice 250 (❄)

Montrer que les séries numériques suivantes sont convergentes et calculer leurs sommes.

$$\sum \frac{n}{2^n(n+1)} \qquad \sum ne^{-n} \qquad \sum \frac{1}{n.(2n)!}.$$

Exercice 251 (CCP PSI 2016 - ❄)

Montrer que $\sum \dfrac{2n^2+3n+1}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 252 (Mines-Ponts PSI 2017 - ❄)

Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(1+2i)^n}$.

Exercice 253 (CCP PSI 2014 - ❄)

1. Montrer que f, définie par $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \dfrac{1}{2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer $f^{(n)}(0)$ en fonction de n.

Exercice 254 (❄)

Montrer que l'application f définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x) - x\mathrm{ch}(x)}{x^3}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 255 (CCP PSI 2014 - ❄)

1. Montrer que f et g, données par $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)-1} - \dfrac{2}{x^2}$ et $g(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2}$ sont définies pour $x \neq 0$ et prolongeables par continuité en 0.
2. Montrer que g, puis f, sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 256 (❄)

On considère la série entière $f = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
2. Démontrer que f est définie et continue sur $[-1,1]$;
3. Exprimer $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles de deux manières différentes :
   — En calculant $f'(x)$.
   — En décomposant $\dfrac{1}{n(n+1)}$ en éléments simples.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.
5. Calculer de même la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.
   N'y avait-il pas un autre moyen d'y parvenir ?

Exercice 257 (CCINP PSI 2021 - ❄❄)

Soit $F : x \longmapsto -\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.
3. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a :
$$F(x) + F(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(1-x)\ln(x).$$

Exercice 258 (Mines-Ponts PC 2018 - ❄❄)

Trouver le rayon de convergence de la série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^n$.
Calculer $f(1/4)$.

Exercice 259 (CCINP PSI 2021 - ❄❄)

Soit f définie sur $I =]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-1}$.

1. Vérifier que f est prolongeable par continuité en 1.
2. Justifier l'intégrabilité de f sur I.
3. (Hors-Programme) Donner un développement de f en série entière *au voisinage de 1*.
4. Calculer l'intégrale de f sur I.

Exercice 260 (CCINP PSI 2021 (Andy D.) - ❄)

1. Montrer que : $\forall x \in [0,1]$, $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2} \right)$ converge simplement sur $[0,1]$.
3. Calculer sa somme.
4. La série converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

Exercice 261 (❄)

Démontrer l'égalité suivante :

$$\int_0^1 \operatorname{Arctan}(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}.$$

En déduire la valeur de cette somme.

Exercice 262 (❄)

Justifier que $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ est intégrable sur $]0,1]$ et démontrer que :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt$.

Exercice 263 (CCP PSI 2018- ❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)dt$.

1. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}du$.
3. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{12n}$.

Exercice 264 (TPE PSI 2018 - ❄❄)

Soit $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$.

1. Comparer $\dfrac{1+t^2}{2}$ et t pour $t \in [0,1]$. En déduire que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est égal à 1.
2. Pour $x \in]-1,1[$, exprimer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sous forme d'intégrale. Peut-on faire de même en $x=-1$ et en $x=1$?

Exercice 265 (CCP PSI 2016 et 2021 (Antoine D.) - ❄)

1. Déterminer la limite de la suite de terme général :
$$a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt.$$
2. Montre que $\sum (-1)^n a_n$ converge.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \geq \dfrac{1}{2n+1}$.
4. En déduire le rayon de convergence et le domaine de définition de $\sum a_n x^n$.

Exercice 266 (❄❄)

Après avoir justifié son existence, calculer $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)dt$.

On donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 267 (CCP PSI 2018 - ❄❄)

Justifier la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}dt$ et montrer que

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Exercice 268 (Centrale PSI 2016 - ❄❄)

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction suivante.
$$f : x \longmapsto \int_0^1 t^x \ln(t)\ln(1-t)\mathrm{d}t.$$
2. Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)(x+n)^2}$.

Exercice 269 (❄❄)

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. On considère les séries entières

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(na)}{(\sin a)^n}\frac{x^n}{n!} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} \frac{\sin(na)}{(\sin a)^n}\frac{x^n}{n!}$$

dont on note S et T les sommes respectives.

1. Montrer que les rayons de convergence de ces deux séries entières sont infinis.
2. Calculer leurs sommes.

Exercice 270 (CCP PC 2014 - ❄❄)

Soient $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n(t)dt$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$. On note R son rayon de convergence.

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq I_n \leq \dfrac{\pi}{4}$. En déduire que $R \geq 1$.
3. Montrer que $I_{n+2} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$.
En déduire que $\sum I_n$ diverge et la valeur de R.
4. Montrer que pour tout $x \in]-R,R[$, on a
$$S(x) = \frac{1}{1+x^2}\left(-x\ln(1-x) + \frac{\ln(2)}{2}x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Exercice 271 (CCINP PC 2022 - ❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Déterminer la limite de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Calculer le rayon de convergence R et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} H_n x^n$.

Exercice 272 (❄❄)

Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on note $S_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$ et $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$.

1. Démontrer que le rayon de convergence de g est égal à 1.
2. Démontrer que $\forall x\in]-1,1[,\quad f(x)=(1-x)g(x)$.
3. Application : Déterminer le rayon de convergence de la série entière suivante et expliciter sa somme.

$$g=\sum\left(1+\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n.$$

Exercice 273 (CCINP PSI 2019 (Olivier D.) - ❄❄)

On pose $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(n)x^n$ et $g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n$.

1. Trouver le rayon de convergence de ces deux séries entières.
2. Montrer que f est continue sur $]-1,1[$ et que g est continue sur $[-1,1[$.
3. Trouver une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$.
4. Trouver un équivalent de g et de f en 1.

Exercice 274 (❄❄)

Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n+n^2ix}$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas développable en série entière autour de 0.

Exercice 275 (❄)

On considère l'équation différentielle suivante.

$$(\mathcal{E}):\qquad y'(x)-xy(x)=1.$$

1. Soit $y=\sum a_n x^n$ une solution $(\mathcal{E})$ développable en série entière et vérifiant $y(0)=0$.
   (a) Déterminer la valeur de a_0, de a_1 ainsi qu'une relation de récurrence liant a_{n+1} et a_{n-1}.
   (b) Exprimer pour tout entier $p\in\mathbb{N}$, a_{2p} et a_{2p+1}.
2. Réciproquement, la fonction y ainsi obtenue est-elle bien une solution de $(\mathcal{E})$ vérifiant $y(0)=0$? sur quel intervalle I ?
3. Démontrer enfin que pour tout $x\in I$ on a

$$y(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Exercice 276 (IMT MP 2018 - ❄❄)

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définie par :

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{n!}x^n.$$

2. Montrer que f est solution de $(1-2x)y'=y+1$ sur $]-R,R[$ et exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 277 (Centrale PC 2018 - ❄❄)

On pose $a_n=\frac{1}{\binom{2n}{n}}$ et $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$.

1. Donner une relation entre a_n et a_{n+1} et trouver le rayon de convergence R de la série entière f.
2. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par f.
3. La résoudre et en déduire $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$.

Exercice 278 (❄❄)

On considère l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}): t^2y''+4ty'+(2-t^2)y=2.$$

1. Démontrer qu'il existe une unique solution de $(\mathcal{E})$ développable en série entière et préciser son rayon de convergence.
2. Exprimer cette solution à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 279 (ENSEA - ENSIIE PSI 2014 - ❄❄)

Trouver une solution développable en série entière de

$$t^2y''(t)+4ty'(t)+2y(t)=\ln(1+t)$$

et déterminer son rayon de convergence.

Exercice 280 (ENSAM PSI 2018 - ❄❄)

1. Déterminer le rayon de convergence de :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

2. Montrer que f est solution de $(\mathcal{E}):(1-x^2)y'-xy=1$.
3. En déduire une expression de $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 281 (CCINP PSI 2018 et 2019 (Oxana M.) - ❄❄)

Soit $f:x\longmapsto \operatorname{Arcsin}(x)\sqrt{1-x^2}$.

1. Donner l'ensemble de définition D de f.
   Sur quel ensemble, l'application f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?
2. Trouver des fonctions polynomiales a,b et c telles que f soit solution de :

$$(\mathcal{E}):\ a(x)y'(x)+b(x)y(x)=c(x).$$

3. Montrer qu'il existe une unique solution impaire de $(\mathcal{E})$ et développable en série entière au voisinage de 0.
4. En déduire le développement en série entière de f.

Exercice 282 (CCP PSI 2018 (Matthieu D.)- ❄❄)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $a_0=a_1=1$ et :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_{n+1}=a_n+\frac{2}{n+1}a_{n-1}.$$

1. Montrer que pour tout $n\geq 1$, $1\leq a_n\leq n^2$.
2. Calculer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.
3. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 que vérifie la somme de cette série.
4. Résoudre cette équation.

Exercice 283 (CCP PSI 2017 - ❄❄)

On pose $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $\dfrac{a_n}{n!} \leq 1$.
2. Montrer que f, définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k!}x^k$, est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on résoudra.
3. Exprimer pour tout $p \geq 0$, a_{2p} et a_{2p+1}.

Exercice 284 (Mines-Ponts PSI 2021 (Corentin G.) - ❄

Soit $a \in]0,1[$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppoqe que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = f(ax)$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer sa dérivée n-ième.
2. Montrer que f est égale à sa série de Taylor en 0.
3. Chercher les $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables, solutions de :

$$f'(x) = f(ax)$$

Exercice 285 (IMT PSI 2018 - ❄❄)

On pose $w_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt$.

1. Étudier les variations de la suite de terme général puis déterminer sa limite.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)w_{n+2} = (n+1)w_n$.
3. Déterminer le rayon de convergence de $\sum w_n x^n$ puis exprimer sa somme à l'aide des fonctions usuelles.
4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n w_n$.

Exercice 286 (Transformation d'Abel - ❄❄)

On considère la série entière $f = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
2. Cette série converge-t-elle en $z = 1$? en $z = -1$?
3. On s'intéresse au comportement de cette série entière sur le cercle d'incertitude. On pose alors $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, 2\pi[$. On définit les sommes partielles suivantes.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{k} \qquad \text{et} \qquad A_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}.$$

Calculer A_n et montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

4. Justifier que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k - A_{k-1}}{k}$.
5. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge.

Exercice 287 (Mines-Ponts PSI 2018 - ❄❄❄)

Soit $a_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{\tanh(t)}{t^2}dt$ où $\tanh(t) = \text{th}(t) = \dfrac{\text{sh}(t)}{\text{ch}(t)}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$
2. Étudier la convergence en R et en $-R$.

Exercice 288 (Mines - Ponts PC 2013 - ❄❄)

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n$.
2. Montrer que $\ln(n) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ admet une limite finie en $+\infty$.
3. En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 1^-.

Exercice 289 (CCP PSI 2018 (Axel C.B.) - ❄❄)

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente.

1. Quel est le rayon de convergence de $\sum \dfrac{a_n}{n!}x^n$? On note $f(x)$ sa somme.
2. Existence et calcul de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}dt$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Exercice 290 (IMT PSI 2022 - ❄❄)

Justifier l'existence de $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$ et de $I = \displaystyle\int_0^1 x^x dx$.

Montrer que $I = S$.

Exercice 291 (CCINP PSI 2022 - ❄❄)

Soit $f : t \longmapsto e^t \ln(t)$.

1. Montrer que f est intégrable sur $]0, 1]$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n.n!}$.

Exercice 292 (CCINP PSI 2023 (Baptiste G.) - ❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction définie par :

$$f_n(x) = \frac{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - 1}{x}.$$

1. Justifier l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k.k!}$.

Exercice 293 (❄❄)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ calculer les intégrales

$$I_n = \int_0^{2\pi} e^{\cos(t)} \cos(nt - \sin(t))dt \text{ et}$$
$$J_n = \int_0^{2\pi} e^{\cos(t)} \sin(nt - \sin(t))dt.$$

Exercice 294 (CCP MP 2016 - ❄❄)

1. Montrer que pour tout $a \in]0,1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^a \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\mathrm{d}x$ converge.
2. Montrer que pour tout $a \in]0,1[$, on a
$$\int_0^a \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n(n+1)}.$$
3. En déduire la convergence et la valeur de
$$\int_0^1 \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\mathrm{d}x.$$

Exercice 295 (CCP PC 2016 - ❄❄)

1. Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction S : $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n$.
2. Montrer que pour tout $x \in D$, on a
$$(1-x)S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n+1}.$$
3. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de $\ln(1-x)$.
4. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right)$.
5. Montrer que $u : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right)x^{n+1}$ est continue sur $[-1,1]$.
6. Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que
$$(1-x)S(x) = -x\ln(1-x) + \ell + \underset{x\to 1^-}{o}(1).$$
7. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 296 (IMT PC 2018 - ❄❄)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Minorer le rayon de convergence de convergence de $\sum \mathrm{tr}(A^k)x^k$.
2. Exprimer $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{tr}(A^k)x^k$ en fonction de χ_A.
   On pourra considérer $\dfrac{\chi_A'}{\chi_A}$.

Exercice 297 (ENSIIE MP 2009 - ❄❄)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?
2. On pose $t_n = \mathrm{tr}(A^n)$.
   Exprimer t_n en fonction de $t_{n-1}, t_{n-2}, t_{n-3}$.
   On pourra utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n$ et calculer sa somme.

Exercice 298 (Centrale PSI 2018 - ❄❄❄)

Soit $\sum a_n$ une série convergente de somme S. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles.

1. Déterminez les rayons de convergence des séries entières :
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}x^n \text{ et } g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!}x^n.$$
2. Montrer que $f' = g' - g$.
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^x f(u)e^{-u}du = (g(x) - f(x))e^{-x}$.
4. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(u)e^{-u}du$.

Exercice 299 (Mines-Ponts PSI 2017 - ❄❄❄)

On note p_n le nombre de partition de $\{1,\ldots,n\}$ et $p_0 = 1$.

1. Montrer que $p_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k$.
2. Vérifier que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p_n}{n!}x^n$ est définie au voisnage de 0 et expliciter $f(x)$.

Exercice 300 (Mines-Ponts PSI 2018 - ❄❄)

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$.

1. Calculer rayon de convergence R de cette série entière et étudier la convergence en ± 1.
2. Déterminer la limite en 1 de $(1-x)f(x)$.

Exercice 301 (CCP MP 2017 - ❄❄❄)

1. Trouver le rayon de convergence R de $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$.
2. Étudier la convergence en $-R$ et en $+R$.
3. Trouver la limite de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$ lorsque $x \to 1^-$ et déterminer un équivalent de $(1-x)f(x)$ quand $x \to 1^-$.

Exercice 302 (Mines-Ponts PSI 2018 - ❄❄❄)

1. Précisez le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2^n}$.
2. Montrer que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ et déterminer un équivalent de f en 1.

Exercice 303 (Centrale - Supélec PSI 2015 - ❄❄❄)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$.

1. Montrer que $f(x) = \sum a_n x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1.
2. Montrer que $f(x) = \underset{x\to 1^-}{\mathrm{o}} \Big(\ln(1-x)\Big)$.
3. Réciproquement, si $f(x) = \underset{x\to 1^-}{\mathrm{o}} \Big(\ln(1-x)\Big)$, a-t-on
$$\lim_{n\to+\infty} na_n = 0\,?$$

Exercice 304 (Mines-Ponts PSI 2021 - ❄❄❄)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln(t)}{1-t^2}dt$.

1. Justifier la convergence de I_n. Exprimer I_n sous forme de somme.
2. Déterminer un équivalent de I_n.

Exercice 305 (ENSAM PSI 2018 (Loïc M.)- ❄❄❄)

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières dont on note R_a et R_b les rayons de convergence, et f, g les sommes.
On suppose que $b_n > 0$ et que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R}$.

1. Comparer R_a et R_b.
   On suppose désormais que $R_b = 1$, que $\ell \neq 0$ et que $\sum b_n$ diverge.
2. Montrer que g est croissante sur $[0, 1[$.
3. Montrer que $\lim_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$.
4. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tel que :
$$|f(x) - \ell g(x)| \leq \sum_{n=0}^{n_0} |a_n - \ell b_n| x^n + \varepsilon g(x).$$
5. En déduire que $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \ell g(x)$.

Exercice 306 (Centrale PSI 2021 - ❄❄(❄))

1. Montrer la convergence de la suite de terme
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n).$$
2. On pose $a_1 = -1$ et pour $n \geq 2$, $a_n = -\dfrac{1}{n} - \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.
   Déterminer les rayons de convergence de :
$$f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n \text{ et } g : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n.$$
3. Que peut-on dire de g en 1 ? En déduire un équivalent simple de f en 1.

Exercice 307 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄❄)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels convergente. On note ℓ sa limite.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière
$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$
2. Déterminer la limite de $x \longmapsto e^{-x} f(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 308 (Centrale PSI 2022 - ❄❄❄)

Soit $A > 0$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-A, A[$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$.

1. Montrer que f est développable en série entière.
2. Montrer que $\exp \circ f$ est développable en série entière.

Feuille 12

Probabilités

Extraits de rapports de jury :

- **Oral CCINP 2022 :** *La maîtrise globale de ce sujet progresse avec les années. Les conditions pour qu'une famille de réels puisse définir une loi de probabilité sont plus ou moins bien connues et beaucoup de candidats ne voient pas que lorsqu'une somme (finie ou infinie) de nombres positifs est égale à 1, prouver que chaque nombre est lui-même inférieur ou égal à 1 est superflu. On voit souvent des confusions entre l'évènement « A inter B » et l'évènement « A sachant B ». Les propriétés de l'espérance sont le plus souvent bien connues, c'est moins le cas pour la variance : variance de $aX + B$, condition pour que la variance soit additive.*
- **Oral CCP 2018 :** *En probabilités, les lacunes sur le cours sont fréquentes.*
- **Oral Mines Telecom 2022 :** *Le cours de probabilités, surtout celui de deuxième année, avec une mention particulière pour la formule des probabilités totales et les systèmes complets d'événements, a parfois fait l'objet d'une impasse pure et simple*
- **Oral ex-ENSAM 2018 :** *Certains étudiants doivent progresser sur leurs connaissance en probabilités : incompatibilité, indépendance, expression d'un évènement à l'aide d'évènements élémentaires pour permettre le calcul de la probabilité.*
- **Oral Centrale 2021 :** *Pour les questions théoriques, la principale difficulté reste l'utilisation de la formule des probabilités totales. La quasi-totalité des candidats n'a pas le réflexe de citer un système complet d'évènements. Lorsque la précision est demandée, il est très souvent incomplet. Pour finir, les probabilités conditionnelles intervenant dans cette formule sont le plus souvent parachutées.*
- **Oral Centrale 2018 et 2019 :** *Le chapitre des probabilités semble avoir un statut particulier pour les candidats : les théorèmes n'ont pas d'hypothèses ! Qu'il est difficile d'avoir celles de l'inégalité de Markov, ou la définition d'un système complet d'événements. Bien évidement, la traduction d'une probabilité conditionnelle passe souvent par des explications en français, ce qui d'ailleurs permet d'évaluer la compétence à expliquer une modélisation. Mais il ne faudrait pas que la rigueur disparaisse : il faut vérifier les hypothèses des théorèmes de probabilités.*
- **Mines-Ponts 2019 :** *La modélisation des situations en probabilités en probabilité pose problème pour une bonne moitié des candidats, l'autre parvenant en général à représenter la situation. Penser à introduire de nouvelles variables aléatoires pour modéliser. Trop théoriser le contexte probabiliste sans réfléchir à l'interpréter mène souvent à écrire des inepties.*

  Certains candidats confondent encore indépendance et incompatibilité, ainsi qu'union et intersection pour décrire de manière ensembliste les évènements avec des difficultés pour justifier les étapes de calcul, notamment l'emploi de la formule des probabilités totales souvent mal utilisée. Les liens entre les quantificateurs existentiel et universel, d'une part, et les symboles réunion et intersection d'autre part, ne sont pas toujours clairs.
- **Oral Mines-Ponts 2018 :** *Les justifications lors de calculs de probabilités de réunions ou d'intersections d'événements sont trop rarement spontanées. Certains candidats confondent indépendance et incompatibilité.*

  La formule des probabilités totales n'est pas toujours connue et souvent mal utilisée.

  Les théorèmes de continuité croissante et décroissante sont souvent méconnus. Beaucoup de candidats affirment que la probabilité d'une intersection dénombrable est égale à une limite sans aucune justification.

  La propriété de sous-additivité des probabilités est parfois bien utile et peu de candidats l'utilisent spontanément.

Exercice 309 (Coefficients binomiaux - ❄)

1. Expliciter $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
2. Expliciter $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.
3. Expliciter $S_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$.

Exercice 310 (Coefficients binomiaux - ❄❄)

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 311 (E3A - maths 1 - 2015 - ❄)

On note $E_1 = \{u \in \mathbb{R}^+ /\ u^2 \notin \mathbb{N}\}$ et E_2 son complémentaire dans $\mathbb{R}^+$. Prouver que E_2 est un ensemble dénombrable.

Exercice 312 (Dénombrements - ❄)

Dénombrer les anagrammes des mots : TAUPIN, PREPA, CONCOURS et BAOBAB.

Exercice 313 (❄❄)

On veut distribuer 7 prospectus dans 10 boîtes à lettres nominatives. De combien de façons peut-on le faire si :

1. On met au plus un prospectus par boîte et les prospectus sont identiques ?
2. On met au plus un prospectus par boîte et les prospectus sont tous différents ?
3. On met un nombre quelconque de prospectus par boîte et les prospectus sont tous différents ?
4. On met un nombre quelconque de prospectus par boîte et les prospectus sont identiques ?

Exercice 314 (Dénombrement - ❄)

Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Dénombrer les couples (X, Y) de $(\mathcal{P}(E))^2$ tels que X et Y soient disjoints.
2. Dénombrer les couples (X, Y) de $(\mathcal{P}(E))^2$ tels que : $X \subset Y$.
3. Dénombrer les couples (X, Y) de $(\mathcal{P}(E))^2$ tels que $\operatorname{Card}(X \cap Y) = 1$.

Exercice 315 (Dénombrements - ❄❄)

Une urne contient n boules distinctes numérotées de 1 à n. On effectue un tirage de p boules avec $p \in [\![1, n]\!]$.

1. On suppose dans cette question et dans la suivante, que les p boules sont extraites simultanément. Combien y a -t-il de tirages possibles ?
2. Soit $k \in [\![p, n]\!]$. Déterminer le nombre de tirages tels que :
   (a) toutes les boules obtenues ont un numéro inférieur ou égal à k.
   (b) Le plus grand numéro est k.
   (c) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$.
3. On suppose dans cette question que les tirages sont successifs et sans remise.
   (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien y a-t-il de tirages commençant par la boule 2 ?
4. On suppose dans cette question que les tirages sont successifs et avec remise.
   (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien y a-t-il de tirages pour lesquels deux numéros seulements sont apparus ?
   (c) Combien y a-t-il de tirages pour lesquels le premier numéro est strictement inférieur au dernier ?

Exercice 316 (Dénombrement - ❄)

J'ai 51 paires de chaussettes. Quel est le nombre de façons de les répartir dans une commode ayant 4 tiroirs.

Exercice 317 (Dénombrement - ❄)

Un cadenas possède un code à 3 chiffres, chacun des chiffres pouvant être un chiffre de 1 à 9.

1. (a) Combien y-a-t-il de codes possibles ?
   (b) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre pair ?
   (c) Combien y-a-t-il de codes contenant au moins un chiffre 4 ?
   (d) Combien y-a-t-il de codes contenant exactement un chiffre 4 ?
2. Dans cette question on souhaite que le code comporte obligatoirement trois chiffres distincts.
   (a) Combien y-a-t-il de codes possibles ?
   (b) Combien y-a-t-il de codes se terminant par un chiffre impair ?
   (c) Combien y-a-t-il de codes comprenant le chiffre 6 ?

Exercice 318 (Familles sommables - ❄)

On donne $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

1. Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et calculer $S = \displaystyle\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2q^2}$.
2. Calculer $S' = \displaystyle\sum_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ p\mid q}} \frac{1}{p^2q^2}$.

Exercice 319 (Sommabilité- ❄❄)

Étudier, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la sommabilité de $\left(\dfrac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.

Exercice 320 (Familles sommables - ❄❄)

Les familles suivantes sont-elles sommables ? Si oui, calculer leur somme.

$$\left(\frac{1}{(n-\frac{1}{2})^3}\right)_{n\in\mathbb{Z}} \qquad \left(\frac{2^m}{3^n}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \qquad \left(\frac{1}{2^m3^n}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$$

$$\left(z^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}} \text{ où } |z| < 1 \qquad \left(\frac{1}{(m+n+1)^2}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$$

Exercice 321 (Familles sommables - ❄❄)

Calculer les sommes doubles suivantes en justifiant leur existence.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.
2. $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.

Exercice 322 (Tribus - ❄)

On considère un univers $\Omega = \{a, b, c\}$.

1. Quelle est la plus petite tribu contenant $\{a\}$?
2. Quelle est la plus petite tribu contenant $\{a\}$ et $\{b\}$?

Exercice 323 (Tribus - ❄)

Soit $\Omega = \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

1. Déterminer la plus petite tribu contenant $\{0,1\}$ et $\{3,4\}$.
2. Déterminer la plus petite tribu contenant $\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}$ et $\{5\}$.
3. Déterminer la plus petite tribu contenant $\{1,2,3\}$ $\{3,4\}$ et $\{4,5\}$.

Exercice 324 (Tribus - ❄❄)

Soit $\Omega = \mathbb{N}$.

1. Déterminer la plus petite tribu contenant $\{1,2\}$ et $\{3,4\}$.
2. Déterminer la plus petite tribu contenant $\{1,2\}$ et $\{2,4\}$.

Exercice 325 (❄❄)

Soit Ω un univers muni d'une tribu $\mathcal{A}$. On se donne un sous-ensemble Ω' de Ω et on note

$$\mathcal{A}' = \{A \cap \Omega',\ A \in \mathcal{A}\}.$$

Montrer que $\mathcal{A}'$ est une tribu sur Ω'.
On dit que $\mathcal{A}'$ est la tribu trace, ou la tribu induite par $\mathcal{A}$ sur Ω'.

Exercice 326 (❄)

Déterminer une probabilité sur $\Omega = \{1,2,\dots,n\}$ telle que la probabilité de l'évènement $\{1,2,\dots,k\}$ soit proportionnelle à k^2.

Exercice 327 (❄)

Les fonctions suivantes définies sur les singletons, permettent-elles de construire une loi de probabilité sur Ω ?

1. $\Omega = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(\{k\}) = \dfrac{1}{2^k}$.
2. $\Omega = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(\{k\}) = \dfrac{1}{k(k+1)}$.
3. $\Omega = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(\{k\}) = \sqrt{1+k}\tan\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

Exercice 328 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui tend vers 0 en décroissant strictement.
Trouver un réel λ pour lequel il existe une probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P([\![n,+\infty[\![) = \lambda a_n.$$

Exercice 329 (❄)

Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé.
Montrer que pour deux événéments A, B on a

$$P(A\cup B) + P(A\cup \bar{B}) + P(\bar{A}\cup B) + P(\bar{A}\cup\bar{B}) = 3.$$

Exercice 330 (❄)

Si A, B, C sont mutuellement indépendants et si $P(A\cap B) \neq 0$, montrer que $P_{A\cap B}(C) = P(C)$.

Exercice 331 (CCP PSI 2017 - ❄)

Soit $(A_k)_{1\le k\le n}$ une famille d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. Montrer que :
$P(A_1\cup\cdots\cup A_n) \le P(A_1)+\cdots+P(A_n) \le P(A_1\cap\cdots\cap A_n)+n-1.$

Exercice 332 (❄❄)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et A, B deux éléments de $\mathcal{A}$. Montrer que

- $\big[P(A\cap B)\big]^2 \le P(A)P(B)$.
- Si $P(A) > 0$ alors $P_{A\cup B}(A\cap B) \le P_A(A\cap B)$.
- Si $P(A)P(B) > 0$ alors on a
$$P_B(A) > P(A) \quad\Longrightarrow\quad P_A(B) > P(B).$$
- A et B sont indépendants si et seulement si
$$P(A\cap B)P(\bar{A}\cap\bar{B}) = P(\bar{A}\cap B)P(A\cap\bar{B}).$$

Exercice 333 (ENTPE-EIVP MP 2015 - ❄❄)

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $(A_1,\dots,A_n)$ des événements mutuellement indépendants d'un espace probabilisé.
Montrer que la probabilité qu'aucun de ces événements ne soit réalisé est au plus égale à $\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\right)$.

Exercice 334 (Lemme de Bonferroni - ❄❄)

1. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $A_1,\dots,A_n$ des événements. Démontrer que :
$$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n) \ge \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1).$$
2. À la suite d'une bataille, 75% des soldats ont perdu un bras, 75% des soldats ont perdu une jambe et 75% des soldats ont perdu un œil. Donner une minoration du pourcentage de soldats ayant perdu à la fois un bras, une jambe et un œil.

Exercice 335 (Continuité décroissante - ❄❄)

Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants.
Démontrer que $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \prod_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

Exercice 336 (❄❄)

Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on ait $P(A_n) = 1$.
Montrer que $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$.

Exercice 337 (Mines-Ponts PC 2018 - ❄❄)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements incompatibles d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$.

Exercice 338 (❄)

Dans l'univers Ω correspondant au lancer infini d'une pièce de monnaie, lesquelles de ces familles forment un système complet d'événements ?

1. A « le premier lancer a donné *pile* » et B « le second lancer a donné *face* » et C « le second lancer a donné *pile* ».
2. pour $i = 1, 2, 3, 4$, A_i « on a obtenu i *piles* parmi les 4 premiers lancers ».
3. pour $n \in \mathbb{N}^*$, A_n « on a obtenu *face* pour la première fois au n-ième lancer » et A_0 « aucun lancer n'a donné *face*.
4. pour $n \in \mathbb{N}^*$, A_n « on a obtenu *face* au n-ième lancer » et A_0 « aucun lancer n'a donné *face*.

Exercice 339 (❄)

Deux joueurs A et B lance chacun leur tour une pièce truquée : on obtient *Face* avec la probabilité $p \in [0, 1]$.
Le joueur A commence. Le premier joueur qui obtient *Face* gagne le jeu.

1. Quel est l'univers des résultats possibles ?
2. Quelle est la probabilité pour que A gagne lors de son n-ième lancer ?
3. Quelle est la probabilité pour que A gagne ?
4. Quelle est la probabilité pour que le jeu ne s'arrête pas ?
5. Exixte-t-il une valeur de p pour laquelle A et B ont autant de chance de gagner ?

Exercice 340 (❄)

Un lot de dés contient une proportion p de dés pipés de sorte que la probabilité d'avoir 6 est $1/2$. Les autres dés sont parfaits. On prend un dé au hasard et on le jette. On obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

Exercice 341 (❄)

On fixe un entier $N \geq 2$.
Un athlète saute sucessivement par-dessus des barres numérotées de 1 à N. Il s'arrête au premier échec ou bien lorsqu'il a passé la barre N.
Lorsqu'il passe la barre i, il a une chance sur i de réussir.
Pour $i \in \{1, \dots, N\}$, on définit l'événement A_i : « l'athlète a franchi la barre i » et l'événement B_i : « la dernière barre franchie par l'athlète est la barre i ».

1. Pour $i \in \{1, \dots, N\}$, calculer $P(A_i)$.
2. Démontrer que pour tout $i \in \{1, \dots, N-1\}$, on a
$$P(B_i) = \frac{1}{i!} - \frac{1}{(i+1)!}.$$
3. Que vaut $P(B_N)$?

Exercice 342 (❄)

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. L'urne i contient i boules numérotées de 1 à i. On choisit une urne au hasard et on y prend une boule.
Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, calculer la probabilité d'obtenir une boule portant le numéro i.

Exercice 343 (Le « paradoxe » des anniversaires - ❄)

Dans une classe de 41 élèves, quelle est la probabilité que deux étudiants aient la même date d'anniversaire (jour et mois) ?

Exercice 344 (EIVP PSI 2017 - ❄)

On lance une infinité de fois une pièce qui fait pile avec une probabilité $p \in]0, 1[$.
On définit les événements suivants :
A : « on obtient pile pour la première fois au bout d'un nombre pair de lancers ».
B : « on obtient pile pour la première fois au bout d'un nombre de lancers multiples de 3 ».
Calculer $P(A)$ et $P(B)$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 345 (ENTPE-EIVP PC 2015 - ❄)

1. Montrer que, en supposant égale à $\dfrac{1}{2^n}$ la probabilité de tirer un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit bien une probabilité.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement « l'entier n tiré est un multiple de k ».
Exprimer $P(A_k)$ en fonction de k.
Calculer $P(A_2 \cup A_3)$.
3. Montrer que, si B est l'événement « l'entier n tiré est un nombre premier », alors $\dfrac{13}{32} \leq P(B) \leq \dfrac{209}{504}$.

Exercice 346 (CCP PC 2016 - ❄)

On considère deux urnes. La première contient 4 boules noires et 2 blanches, la deuxième 2 noires et 4 blanches. On choisit une urne au hasard, on tire successivement 3 boules sans remise. Donner la probabilité de tirer une troisième boule noire sachant que l'on a déjà tiré 2 boules noires avant.

Exercice 347 (❄❄)

Une urne contient des boules numérotées de 1 à n.

1. Soient $i, k \in \{1, \dots, n\}$. On tire k boules simultanément. Quelle est la probabilité d'obtenir la boule i ?
2. Soient $i, k \in \{1, \dots, n\}$. On tire k boules successivement et sans remise.
   (a) Soit $r \in \{1, \dots, k\}$. Quelle est la probabilité d'obtenir la boule i au r-ième tirage ?
   (b) Quelle est la probabilité de tirer la boule i ?

Exercice 348 (❄❄)

Une urne contient a boules blanches et b boules rouges et donc un total de $N = a + b$ boules.
On tire successivement n boules ($n \leq N$) en remettant à chaque tirage la boule si elle est rouge et en ne la remettant pas si elle est blanche.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 1 boule blanche ?
2. La deuxième boule est rouge. Quelle est la probabilté que la première ait été blanche.

Exercice 349 (❄❄)

Une urne contient une boule blanche. On dispose d'une pièce truquée, la probabilité d'obtenir *Pile* étant égale à $p \in]0,1[$. On effectue des lancers successifs de cette pièce et on suit le protocole suivant.
• Si on obtient *Pile*, on place une boule rouge dans l'urne.
• Si on obtient *Face*, on tire une boule de l'urne et le jeu s'arrête.

1. Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir la boule blanche à la fin du jeu ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier *Face* au $n$ième lancer sachant que l'on a tiré la boule blanche ?

Exercice 350 (CCP MP 2016 - ❄❄)

Marcel effectue N tirages dans une urne contenant b boules blanches en ivoire et n boules noires en chocolat. Lorsque il tire une boule en chocolat, il la mange.

1. Quelle est la probabilité pour que Marcel mange au moins une boule en chocolat ?
   Quelle est la probabilité pour que Marcel mange une et une seule boule en chocolat ?
2. Marcel mange une et une seule boule en chocolat, quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la dernière boule tirée ?

Exercice 351 (Banque CCP MP 2015 - ❄)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes.

- On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
- On note sa couleur et on la remet dans son urne. Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1, sinon il se fait dans l'urne U_2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule obtenue au n-ième tirage est blanche ».
On pose aussi $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire la valeur de p_n.

Exercice 352 (La rumeur - ❄)

Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec la probabilité p, c'est l'information est bien transmise. Avec la probabilité $1-p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1. Donner une relation entre p_n et p_{n+1}.
2. En déduire p_n en fonction de p et de n.
3. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$? Qu'en pensez-vous ?

Exercice 353 (ENSAM PT 2016 - ❄❄)

Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets A, B, C d'un triangle :
• À $n = 0$, il est en A.
• S'il est en A ou en C à un étape n, alors, il sera en B à l'étape $n+1$.
• S'il est en B à un étape n, alors à l'étape $n+1$, il sera en A (resp. en C) avec une probabilité $\dfrac{1}{4}$ et il restera en B avec une probabilité $\dfrac{1}{2}$.
On note respectivement a_n, b_n, c_n les probabilité qu'il soit en A, B ou C à l'étape n, et T_n le vecteur colonne de coordonnées a_n, b_n, c_n.

1. Montrer qu'il existe une matrice M telle que $T_{n+1} = MT_n$ et déterminer ses éléments caractéristiques.
2. Déterminer les limites de a_n, b_n et c_n.

Exercice 354 (❄❄)

Un promeneur reveur oscille entre deux maisons A et B. A l'instant 0, il est en A. A chaque étape, il joue au dé la maison vers laquelle il va :

> S'il obtient 1 ou 6, il change de maison, sinon, il reste.

On note A_n l'événement « à l'étape n, le promeneur est dans la maison A et B_n l'événement « à l'étape n, le promeneur est dans la maison B et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = P(A_n) \quad \text{et} \quad b_n = P(B_n).$$

1. Etablir une relation entre a_{n+1}, b_{n+1}, a_n et b_n.
   En déduire $P(A_n)$ et $P(B_n)$.
2. Soit $i < j$ deux entiers naturels. Calculer $P_{A_i}(A_j)$.
   Les événements A_i et A_j sont-ils indépendants ?

Exercice 355 (Banque CCP MP 2015 - ❄)

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C. A l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On note :
• A_n l'événement « l'animal est en A après son n-ième trajet ».
• B_n l'événement « l'animal est en B après son n-ième trajet ».
• C_n l'événement « l'animal est en C après son n-ième trajet ».
On pose aussi, $a_n = P(A_n), b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. (a) Exprimer a_{n+1} en fonction de b_n et c_n.
   (b) Exprimer de même b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.
   Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $D = P^{-1}AP$.
3. Expliquer comment on pourrait obtenir explicitement a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 356 (Mines-Ponts PSI 2022 (Justin A.) - ❄❄)

Une puce saut sur les sommets d'un triangle ABC. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :
A_n : « la puce se trouve en A après n sauts »,
B_n : « la puce se trouve en B après n sauts »,
C_n : « la puce se trouve en C après n sauts ».
Si la puce se trouve en A ou en B, alors la probabilité qu'elle saute sur un sommet à l'étape suivante est la même pour tous les sommets. Si la puce se trouve au sommet C, alors elle y reste.
À l'instant initial, la puce est en A. On note :
$a_n = P(A_n), b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$ et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = MX_n$.
2. M est-elle diagonalisable. Si oui, la diagonaliser.
3. Donner une expression de X_n.
4. Soit $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Calculer $P(G)$.

Exercice 357 (❄❄)

Une puce se promène sur l'axe des entiers relatifs : elle se trouve au départ en position $k = 0$. Puis, elle se met à sauter de son abscisse k à $k+1$ avec la probabilité $1/2$, et de son abscisse k à $k-1$ avec la probabilité $1/2$.

1. Calculer la probabilité qu'àprès 18 sauts, la puce retourne à sa position initiale.
2. Calculer la probabilité qu'àprès 18 sauts, la puce se trouve à k cases de sa position initiale avec $k \in [\![-18, 18]\!]$.
3. Reprendre les deux questions précédentes quand la puce se déplace d'un saut vers la droite, d'un saut vers la gauche et reste sur place de façon équiprobable à chaque saut.

Exercice 358 (CCP MP 2016 - ❄❄)

On considère un fumeur qui désire arrêter de fumer.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_n l'événement : « le fumeur fume le jour n » et $p_n = P(F_n)$.
Lorsque le fumeur fume un certain jour, il ne fume pas le jour suivant avec une probabilité $\frac{1}{4}$.
S'il ne fume pas un certain jour, il fume le lendemain avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

1. Traduire ces hypothèses en termes de probabilité.
2. Trouver une relation de récurrence vérifiée par (p_n).
   En déduire une expression de p_n en fonction de p_1 et n, et la limite de (p_n).
3. On suppose que $p_1 = \frac{11}{12}$. On fait de plus les deux hypothèses supplémentaires suivantes.
   Si le fumeur fume le premier jour, il fume les deux jours suivants avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.
   S'il fume le premier jour, il fume le troisième jour avec une probabilité de $\frac{1}{4}$.
   (a) Calculer la probabilité que le fumeur fume le premier et le troisième jours.
   (b) Calculer la probabilité qu'il fume les trois premiers jours.
   (c) Calculer la probabilité qu'il fume l'un des trois premiers jours.

Exercice 359 (ENSAM PSI 2018 (Faël T.) - ❄)

Trois enfants A, B, C jouent à la balle.
• Lorsque A a la balle, la probabilité qu'il la lance à B est $\dfrac{3}{4}$, la probabilité qu'il la lance à C est $\dfrac{1}{4}$.
• Lorsque B a la balle, la probabilité qu'il la lance à A est $\dfrac{3}{4}$, la probabilité qu'il la lance à C est $\dfrac{1}{4}$.
• C envoie toujours la balle à B.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par A_n (resp. B_n, C_n) l'événement « A (resp. B,C) a la balle à l'issue du n-ème lancer. On pose

$$a_n = P(A_n), \quad b_n = P(B_n) \quad \text{et} \quad c_n = P(C_n).$$

Au départ, la balle est lancée à l'un des trois joueurs, c'est par convention le lancer numéro 0. On pose $a_0 = P(A_0), b_0 = P(B_0)$ et $c_0 = P(C_0)$.

1. Que vaut $a_n + b_n + c_n$?
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
   Déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :
   $$X_{n+1} = MX_n.$$
3. En déduire l'expression de X_n en fonction de n.
4. Calculer les limites de a_n, b_n et c_n lorsque n tend vers $+\infty$. Ces limites dépendent-elles de qui a le ballon initialement ?

Exercice 360 (CCP PSI 2016 - ❄❄)

Soit $(An)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants.

1. Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que la probabilité qu'aucun des événements $A_n, \ldots, A_{n+p}$ ne se réalise est inférieure ou égale à $\exp\left(-\sum_{k=n}^{n+p} P(A_k)\right)$.
2. On suppose que la série de terme général $P(A_n)$ est divergente. Montrer qu'il est presque impossible qu'il n'y ait qu'un nombre fini d'entiers n pour lesquels A_n est réalisé.

Exercice 361 (Centrale - Supélec PSI 2016 - ❄❄❄)

On se donne une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on note $A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n \right)$.

1. Montrer que $P(A) = \lim_{k \to +\infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n \right)$.
2. On suppose que la série $\sum P(A_n)$ converge. Déterminer $P(A)$.
3. Déterminer $P(B)$ où B est l'ensemble des $\omega \in \Omega$ appartenant à une infinité de A_n.
4. On suppose que la série $\sum P(A_n)$ diverge et les événements A_n sont mutuellement indépendants. Déterminer $P(A)$. On pourra s'intéresser à $P(\overline{A})$.

Exercice 362 (❄❄❄)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'une tribu $\mathcal{A}$ sur un univers Ω. On pose

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m \right) \qquad \text{et} \qquad C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m \right).$$

1. Justifier que B et C sont des événements de $\mathcal{A}$.
   C est appelé *limite supérieure* des A_n et B *limite inférieure* des A_n et on note usuellement :
   $$C = \limsup(A_n) \qquad \text{et} \qquad B = \liminf(A_n).$$
2. Décrire B et C en langage courant et démontrer que $B \subset C$.

Exercice 363 (❄❄)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants.

1. Démontrer que $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} (1 - P(A_k))$.
2. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(A_n) \neq 1$. Démontrer l'équivalence suivante.
   $$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 \iff \sum P(A_n) \text{ diverge}$$

Exercice 364 (Centrale - Supélec PSI 2016 - ❄❄❄)

1. Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
   Calculer l'intégrale $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p (1-x)^q dx$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dispose de p urnes numérotées de 1 à p. Chaque urne contient p boules et pour tout i l'urne numéro i contient i boules noires et $p - i$ boules blanches. On effectue l'expérience suivante : choisir au hasard une urne puis effectuer des tirages avec remise dans l'urne choisie. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, A_n l'événement : « on a effectué 2n tirages et obtenu le même nombre de boules blanches que de noires ».
   (a) Exprimer $P(A_n)$ sous forme d'une somme.
   (b) On note $b_{n,p}$ la probabilité de réaliser A_n puis de tirer une boule blanche.
   Calculer $b_{n,p}$ en fonction de $P(A_n)$.
3. Calculer $\lim_{p\to+\infty} b_{n,p}$

Exercice 365 (Mines-Ponts - ❄❄❄)

Soit $f : [0, 1] \longmapsto \mathbb{R}$ une fonction positive et dérivable en 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t) dt$.
Démontrer que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une distribution de probabilité si et seulement si $f(1) = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1-t} = 1$.

Feuille 13

Variables aléatoires

Extraits de rapports de jury :

- **Oral CCINP 2019 :** *Les lois usuelles de probabilités sont dans l'ensemble connues.*

  On assiste à des confusions entre variable aléatoire et nombre et il n'est pas rare de voir écrit $E(X) = \sum XP(X = k)$.

  Les probabilités conditionnelles ne sont pas maîtrisées. Au-delà des problèmes de nature d'objet fréquemment rencontrés, beaucoup tentent d'exprimer $P(X = k)$ *en fonction de* $P(X = k|Y = n)$ *en utilisant la définition d'une probabilité conditionnelle, mais ne pensent pas à utiliser la formule des probabilités totales.*
- **Oral CCP 2017 :** *Les candidats se contentent souvent de donner des résultats qu'ils ont obtenus intuitivement mais sont incapables de formaliser et encore moins de modéliser des situations très simples. En probabilités, on conseille d'utiliser le vocabulaire spécifique à cette partie du programme, par exemple évènements disjoints, indépendants, élémentaires.*
- **Oral Mines-Télécom 2019 :** *Le cours de probabilités, surtout celui de deuxième année avec une mention particulière pour la formule des probabilités totales a parfois fait l'objet d'une impasse pure et simple. Certains candidats ne connaissent pas la formule de Bienaymé-Tchebychev.*
- **Oral Centrale 2022 :** *Le chapitre des probabilités semble avoir un statut particulier pour les candidats qui oublient trop souvent les hypothèses des théorèmes employés : ainsi il est difficile d'avoir celles de l'inégalité de Markov ou la définition d'un système complet d'événements. Il va sans dire que nous attendons une bonne connaissance des lois usuelles (notamment de leur interprétation pour la binomiale et la géométrique).*

  La définition et les propriétés de la covariance n'étaient pas connues de beaucoup d'étudiants, dont certains d'un bon niveau par ailleurs. Les étudiants doivent savoir comparer pour une variable aléatoire X *et une application croissante* f *les ensembles* $(X \geq a)$ *et* $(f(X) \geq f(a))$.

  Il est préférable de ne pas commencer par une égalité de probabilités mais par une égalité entre événements. Ceci permet d'éviter les fréquentes confusions entre les différents objets en probabilités De nombreuses inversions des inégalités dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev montrent que des étudiants n'ont pas réfléchi sur le sens de cette formule, pourtant cruciale.
- **Oral Centrale 2021 :** *Le chapitre des probabilités semble avoir un statut particulier pour les candidats qui oublient trop souvent les hypothèses des théorèmes employés : ainsi est-il difficile d'avoir celles de l'inégalité de Markov ou la définition d'un système complet d'événements. Bien évidement, la traduction, par exemple d'une probabilité conditionnelle, passe souvent par des explications en français, ce qui d'ailleurs permet d'évaluer la compétence à expliquer une modélisation. Mais cela ne doit pas se faire au détriment de la rigueur. De nombreuses inversions des inégalités dans l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev montrent que des étudiants n'ont pas réfléchi sur le sens de cette formule, pourtant cruciale. La loi faible des grands nombres ne nécessite pas la mutuelle indépendance des variables aléatoires comme l'affirment beaucoup de candidats, mais leur indépendance deux à deux comme le stipule le programme.*

  La loi faible des grands nombres ne nécessite pas la mutuelle indépendance des variables aléatoires comme l'affirment beaucoup de candidats, mais leur indépendance deux à deux comme le stipule le programme.
- **Oral Mines-Ponts 2021 :** *En probabilités, savoir utiliser les fonctions indicatrices (qui sont de simples variables aléatoires de Bernoulli) peut s'avérer pratique, par exemple pour des exercices utilisant des compteurs.*
- **Oral Mines-Ponts 2019 :** *La connaissance précise des espérances et variances des lois usuelles permet de ne pas perdre du temps à refaire le calcul. Concernant les inégalités de Markov, Bienaymé-Tchebytchev, la loi faible des grands nombres, les hypothèses sont souvent oubliées. Pour calculer l'espérance d'une somme, il peut être plus judicieux de faire appel à la linéarité de l'espérance.*
- **Oral Mines-Ponts 2018 :** *La formule des probabilités totales n'est pas toujours connue et souvent mal utilisée. Les lois usuelles ne sont pas toujours reconnues, certains candidats perdant un temps précieux à calculer à la main l'espérance d'une variable aléatoire de loi de Poisson ou de loi géométrique au lieu d'utiliser les formules du cours.*

  Trop peu de candidats pensent à utiliser les fonctions génératrices pour les sommes de variables aléatoires mutuellement indépendantes. La formule de transfert n'est pas le seul moyen de calculer une espérance.

Exercice 366 (EIVP PSI 2016 - ❄)

On lance deux dés à 6 faces de façon indépendante, jusqu'à obtenir au moins un 6.
Déterminer la variable aléatoire N donnant le nombre de lancers nécessaires.

Exercice 367 (CCP PC 2018 - ❄)

On considère deux distributeurs à café. Le nombre de pannes durant un mois du premier (resp. second) suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ (resp. $\beta > 0$). Le mois dernier, il y a eu n pannes.
Quelle est la probabilité qu'exactement r d'entre elles soient dues au premier distributeur ?

Exercice 368 (❄)

Montrer qu'il existe une variable aléatoire réelle X sur un espace Ω telle que $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et telle que

$$P(X = k) = \frac{2k}{n(n+1)},$$

pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 369 (CCP PSI 2015 - ❄)

1. Une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p. Trouver la nature de la suite de terme général $u_n = \dfrac{P(X > n)}{P(X = n)}$.
2. Même question avec un loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 370 (IMT PC 2016 - ❄❄)

Déterminer la loi de la variable aléatoire X vérifiant $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$\exists \alpha \in]0, 1[, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ P(X = n) = \alpha P(X \geq n).$$

Exercice 371 (CCINP PSI 2019 - ❄)

On considère deux variables de Poisson indépendantes X et Y , de paramètres λ et μ.

1. **Question de cours :** On pose $Z = X + Y$. Montrer que $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer et reconnaître la loi conditionnelle de X sachant que $Z = n$.

Exercice 372 (CCP PSI 2017 - ❄)

Soit $n \geq 2$. On considère n variables aléatoires indépendantes X_1, X_2, ... et X_n, suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètres respectifs 1, $\dfrac{1}{2}$, ... et $\dfrac{1}{n}$.
Trouver la loi de la variable aléatoire N qui vaut 0 si :

$$X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 1$$

et qui vaut $\min\{k \in [\![1, n]\!], X_k = 0\}$ sinon.

Exercice 373 (Fonction de variable aléatoire - ❄)

Soit X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = \frac{\alpha}{n(n+1)(n+2)}.$$

1. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ est convergente et calculer sa somme.
2. Déterminer la valeur de α.
3. Soit Y est une variable aléatoire réelle définie par $Y = X + 1$. Montrer que Y est une variable aléatoire réelle discrète et déterminer sa loi.
4. Soit Z est une variable aléatoire réelle définie par $Z = X^2 - 4X + 4$. Montrer que Z est une variable aléatoire réelle discrète et déterminer sa loi.

Exercice 374 (❄❄)

Dans le bassin aux raies de l'aquarium de Nausicaa, une raie R pique avec son dard chacun des visiteurs qui veulent la caresser avec une probabilité $p \in]0, 1[$. Le nombre N de visiteurs qui veulent caresser cette raie suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Soit X le nombre de visiteurs piqués. Déterminer la loi de X en remarquant que $(N = n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
2. Soit Y le nombre de visiteurs qui caressent R sans être piqués. Déterminer la loi de Y.
3. Montrer que pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $(X = n)$ et $(Y = m)$ sont des événements indépendants.

Exercice 375 (Loi binomiale et loi de Poisson - ❄)

1. Soient $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
   Donner la loi, l'espérance et la variance de X et de Y.
2. Montrer que si $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} np_n = \lambda$ et si $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(X_n = k) = P(Y = k)$.
3. **Application 1 :** Un médecin envisage d'installer un cabinet de traumatologie dans une station de sports d'hiver. Il estime que son cabinet sera rentable à partir de 10 patients par jour. En moyenne, on sait que 5000 personnes skient par jour et que chaque skieur a une probabilité de $0,001$ de faire une mauvaise chute. Calculer la probabilité que le cabinet soit rentable.
4. **Application 2 :** Des études effectuées par une compagnie aérienne montrent qu'il y a une probabilité de $0,05$ qu'un passager ayant fait une réservation sur un vol ne se présente pas à l'embarquement. Dès lors, elle décide naïvement de vendre 5 pour cent de places en plus (on suppose que le nombre de places disponibles M dans un avion est un multiple de 20). Quelle est la probabilté qu'il y ait un problème à l'embarquement ?

Exercice 376 (IMT PSI 2021 - ❄)

On estime qu'il y a une chance sur 10^6 pour qu'un élève soit un génie. On dispose d'un échantillon de 500000 élèves. Soit X le nombre d'élèves qui sont des génies.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Par quelle autre loi peut-on approcher X ?

Exercice 377 (CCINP PSI 2019 - ❄❄)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p.
Soit N une variable aléatoire telle que $N+1$ suive la loi géométrique de paramètre p. On pose $Y=\displaystyle\sum_{n=1}^{N} X_n$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Donner la loi de $S_n = X_1+\cdots+X_n$.
2. **À retenir** : Soit $x\in]-1,1[$.
   Calculer pour $k\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k}$.
3. On suppose que N et S_n sont indépendantes pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y=k)$ et donner la loi de $Y+1$.

Exercice 378 (CCINP PSI 2022 (Franck-Arthur E.) - ❄

Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que pour tout $(k,n)\in\mathbb{N}^2$ on ait :

$$\mathbb{P}(X=k, Y=n) \;=\; \begin{cases} \dbinom{n}{k}\dfrac{1}{2^n}p(1-p)^n & \text{si } k\leq n \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1. Quelle est la loi de Y ?
   Donner rapidement son espérance et sa variance.
2. Soit $k\in\mathbb{N}$.
   Démontrer que pour tout $x\in]-1,1[$ on a
   $$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k}.$$
3. En déduire la loi de X.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 379 (ENSAM PSI 2017 - ❄)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
On note T la variable aléatoire égale au plus petit entier n tel qu'on ait deux 1 consécutifs aux expériences de rangs n et $(n+1)$. On note :
A_n : « pas deux 1 consécutifs jusqu'au rang n et $X_n=0$ ».
B_n : « pas deux 1 consécutifs jusqu'au rang n et $X_n=1$ ».
On pose $p_n = P(A_n)$ et $q_n = P(B_n)$.

1. Calculer $P(T=0), P(T=1)$ et $P(T=2)$.
2. Montrer que :
   $$\forall n\in\mathbb{N},\quad \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n \\ q_n\end{pmatrix}.$$
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(T=n)=\dfrac{F_n}{2^{n+2}}$ où $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Fibonacci vérifiant :
   $$F_0=F_1=1 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$$
   En déduire $P(T=n)$.

Exercice 380 (TPE PSI 2019 - ❄❄)

Une information booléenne est transmise grâce à n relais notés $\mathcal{R}_1,\ldots,\mathcal{R}_n$. La probabilité qu'un relai transmette correctement l'information est p. Les relais sont indépendants.
Calculer la probabilité que l'information transmise par $\mathcal{R}_n$ soit la même que celle reçue par $\mathcal{R}_1$.
Application numérique $n=100$ et $p=0,999$.

Exercice 381 (Centrale PC 2021 - ❄❄❄)

On lance indéfiniment une pièce donnant Pile avec la probabilité $p\in]0,1[$.
On s'intéresse au temps d'apparition du motif *Face-Pile*, modélisé par une variable aléatoire X (on a $X=n$ lorsque on a obtenu Face au $(n-1)$-ème lancer et Pile au n-ème, et que le motif *Face-Pile* n'est pas apparu avant).
De même, on modélise le temps d'apparition du motif *Pile-Pile* par une variable aléatoire Y. Déterminer la loi de X et celle de Y.

Exercice 382 (Mines-Ponts PSI 2018 - ❄❄)

Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telle que $P(Y=k)=P(Y=-k)$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$ et que $|Y|$ suive une loi de Poisson.
On pose $A=\begin{pmatrix} 0 & Y & 1 \\ Y & 0 & 1 \\ Y & 1 & 0\end{pmatrix}$.

1. Donnez la loi du rang de A.
2. Calculez la probabilité que A soit diagonalisable.

Exercice 383 (❄❄)

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. Dans une urne, on place n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise et pour tout $j\in\mathbb{N}^*$, on note N_j le numéro de la j^{ieme} boule tirée. On note X le nombre j de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois $N_{j+1}\geq N_j$.

1. Pour tout $j\in\mathbb{N}^*$, Calculer $P(X>j)$.
2. En déduire, pour tout $j\in\mathbb{N}^*$, la valeur de $P(X=j)$.
3. Pour tout $j\in\mathbb{N}^*$, calculer la limite, si elle existe, de $P(X=j)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 384 (CCP MP 2018 - ❄)

Une urne contient a boules blanches et b noires. Lors d'un tirage avec remise, on note X_1 et X_2 les rangs d'apparition de la première et de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de X_2, son espérance et sa variance. Interpréter le résultat.

Exercice 385 (IMT PSI 2019 - ❄)

On considère une pièce équilibrée et on réalise une série de lancers indépendants. On s'intéresse à l'apparition du deuxième pile. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de faces avant l'apparition du deuxième pile. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

Exercice 386 (Navale MP 2018 - ❄❄)

Déterminer la loi du temps d'attente du r-ième pile, sachant que la probabilité d'avoir pile est p.

Exercice 387 (CCINP PSI 2019 - ❄)

On considère $2n$ lapins sélectionnés aléatoirement dans un enclos à lapins. La probabilité qu'un lapin soit mâle est $\frac{1}{2}$.
On note M la variable aléatoire égale au nombre de lapins mâles obtenus et C la variable aléatoire égale au le nombre de couples possibles (un lapin mâle + un lapin femelle).

1. Donner la loi de M.
2. Donner une relation entre C et M.
3. Donner la loi de C.
4. Calculer l'espérance de C.

Exercice 388 (CCINP PC 2021 - ❄❄)

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé Ω.
On suppose que X suit la loi binomiale de paramètres n et p avec $p \in]0,1[$ et que Y suit la loi uniforme sur $\{0,1,\dots,n\}$.
On définit la variable aléatoire Z par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = \left\{ \begin{array}{l} X(\omega) \text{ si } X(\omega) \neq 0 \\ Y(\omega) \text{ si } X(\omega) = 0 \end{array} \right.$$

Déterminer la loi de Z et son espérance.

Exercice 389 (TPE PSI 2019 (Davy L.) - ❄❄)

Une urne contient $n \geq 3$ pièces numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs avec remise.
On note T_n le numéro de tirage au bout duquel on a obtenu 2 numéros différents.

1. On suppose d'abord que $n = 3$. Déterminer la loi et l'espérance de T_3.
2. On revient au cas général.
   (a) Déterminer le support de T_n.
   (b) Calculer $P(T_n = 2), P(T_n = 3)$ et $P(T_n = n+1)$.
   (c) Déterminer la loi de T_n.

Exercice 390 (Mines-Ponts PSI 2023 (Yassine N.) - ❄❄)

On note N le nombre d'étudiants dans une classe de PSI, et n le nombre de ceux qui proviennent de PCSI.
On envoie les étudiants au tableau successivement, et de manières indépendantes. Un même étudiant peut donc passer plusieurs fois.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité que k anciens de PCSI soient appelés pour les k premiers passages ?
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité que k anciens de PCSI soient appelés pour les $k+i$ premiers passages ?
3. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On note X_i le nombre d'appels nécessaires pour que i anciens PCSI soient appelés.
   Déterminer la loi de X_i.

Exercice 391 (IMT PSI 2022 - ❄❄)

On lance une pièce donnant pile avec probabilité $\frac{2}{3}$. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux piles consécutifs. On pose $a_n = P(X = n)$.

1. Calculer a_1 et a_2.
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer : $a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{2}{9}a_{n-2}$.
3. Montrer que le jeu se termine presque sûrement.
4. L'espérance de X est-elle finie ? Si oui, la calculer.

Exercice 392 (CCP PSI 2018 - ❄❄)

Trois individus A_1, A_2 et A_3 se présentent dans un bureau de poste comportant 2 guichets. Les individus A_1 et A_2 sont pris en charge dès leur arrivée, A_3 doit attendre que A_1 ou A_2 ait fini pour passer à son tour au guichet.
Le temps (par exemple nombre de minutes) passé au guichet par A_i est noté X_i ($1 \leq i \leq 3$).
On suppose que chaque X_i suit une loi géométrique de paramètre p.
On note Y le temps d'attente de A_3 avant son passage au guichet.

1. Pour $k \in N$, déterminez $P(Y > k)$.
2. Soit Z le temps total passé par A_3 à la poste.
   Donnez la loi de Z.
3. Déterminez le temps moyen passé par A_3 à la poste.

Exercice 393 (Centrale - Supélec PSI 2016 - ❄❄)

Une urne contient n boules numérotées. On y pioche avec remise, jusqu'à obtenir une deuxième fois une boule déjà tirée. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Soit $i \in \{2,\dots,n+1\}$. Déterminer $P(X > i | X > i-1)$.
2. Soit $k \in \{1,\dots,n+1\}$.
   Montrer que $P(X > k) = \prod_{i=2}^{k} P(X > i | X > i-1)$.
3. Soit $k \in \{2,\dots,n+1\}$. Calculer $P(X = k)$.

Exercice 394 (Centrale PSI 2017 - ❄❄)

1. On joue à pile ou face avec une pièce truquée tombant sur pile avec une probabilité p. On note X_n le nombre de piles obtenus au bout de n lancers. Donner la loi de X_n.
2. On considère maintenant deux pièces M_1 et M_2 donnant pile avec des probabilités p_1 et p_2.
   On joue de la manière suivante : à chaque lancer, on joue avec la pièce M_1 si le lancer précédent a donné pile, avec M_2 sinon. Au premier lancer, on choisit l'une des deux pièces au hasard. Soit A_n l'événement : on obtient pile au n-ème lancer et $u_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(\overline{A_n}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Exprimer u_n en fonction de u_{n-1}.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   (b) Déterminer le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 395 (❄)

Soit X une variable aléatoire telle que :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } P(X = n) = \lambda \frac{n}{2^n}.$$

Déterminer λ et calculer l'espérance de X.

Exercice 396 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = a\binom{n+k}{k}p^k$.

1. Déterminer a.
2. Existence et valeur de $E(X)$ et $V(X)$?

Exercice 397 (❄❄)

Soit X une variable aléatoire réelle discrète telle que $X(\Omega) = \{1, ..., n\}$ et :

$$\forall k \in \{1, ..., n\}, \quad P(X = k) = \alpha k(n - k).$$

1. Pour quelle valeur de α a-t-on défini une loi de probabilité ?
2. En déduire la loi de X.
3. Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire réelle discrète X.

Exercice 398 (Mines Télécom PSI 2017 - ❄)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ telle que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad P(X = k) = a\binom{n}{k}.$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 399 (CCP PSI 2015 - ❄❄)

1. Pour tout $\alpha \geq 0$, on pose $p_k = \dfrac{e^{-2}4^k(1 + \alpha k)}{(2k)!}$.
   Trouver une condition sur α pour que $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définisse une distribution de probabilité.
2. On suppose cette condition vérifiée et on donne une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que
   $$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = p_k.$$
   Déterminer l'espérance de X.

Exercice 400 (❄❄)

Une urne opaque contient n boules blanches et n boules noires. On effectue dans cette urne des tirages d'une boule sans remise jusqu'à l'obtention de toutes les boules noires.
Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires c'est-à-dire le rang du tirage de la dernière boule noire.

1. Déterminer la loi de X.
2. Conjecturer la valeur de l'espérance.
3. Calculer l'espérance de X.

Exercice 401 (Mines Télécom PSI 2017 - ❄❄)

On lance 6 dés simultanément. On note Y la variable aléatoire comptant nombre de lancers nécessaire pour obtenir le premier 6. Ensuite, lorsqu'un dé au moins donne 6, on le(s) met de côté et on relance les dés jusqu'à ce que tous les dés aient donnés 6. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de lancers nécessaires.

1. (a) Donner la loi de la variable aléatoire Y.
   (b) Montrer que Y admet une espérance et la calculer.
2. (a) Donner la loi de la variable aléatoire X.
   (b) Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 402 (❄❄)

Soit X une variable aléatoire discrète suivant la loi de Poisson de paramètre λ. On définit Y de la façon suivante :
• Si X prend une valeur impaire, alors Y prend la valeur 0.
• Si X prend une valeur paire, alors Y prend la valeur $X/2$.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Calculer $E(Y)$ si elle existe.
3. Calculer $V(Y)$ si elle existe.

Exercice 403 (❄)

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi binômiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$.

1. Calculer $E\left(X^2\right)$.
2. Calculer $E\left(X^3\right)$.

Exercice 404 (ENSEA PSI 2016 - ❄❄)

Soient X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.
Calculer $E(X - \lambda)$ puis $E(|X - \lambda|)$.

Exercice 405 (CCP PSI 2015 - ❄)

Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

Exercice 406 (Mines-Ponts PC 2021 - ❄❄)

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Donner la loi, l'espérance et la variance de $X - Y$.

Exercice 407 (CCINP PSI 2019 (Nicolas V.) - ❄)

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_k = p^2k(1 - p)^{k-1}$.

1. Montrer que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = p_k$.
   Calculer l'espérance de $X - 1$ et de $(X - 1)(X - 2)$.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 408 (ENSAM PSI 2017 - ❄❄)

On considère un jeu dans lequel le joueur doit répondre à plusieurs questions numérotées et indépendantes. On note p_k la probabilité de répondre juste à la $k$ème question, et $r_n = p_1 \dots p_n$.

1. Soit X le nombre de bonnes réponses avant le premier échec. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général r_n converge.
   Montrer qu'on a alors $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} r_n$.
3. Discuter l'existence de l'espérance de X et la calculer lorsque c'est possible dans les cas suivants :
   (a) $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_k = 1/2$;
   (b) $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_k = 1/k$;
   (c) $p_1 = 1$ et $\forall k \geq 2,\ p_k = 1 - 1/k^2$.

Exercice 409 (Centrale PSI 2022 - ❄❄)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$. On pose $S_n = \max_{1\leq k\leq n}(X_k)$ et $T_n = \min_{1\leq k\leq n}(X_k)$.

1. Les variables S_n et T_n sont-elles indépendantes ?
2. Exprimer $E(T_n)$ à l'aide d'une somme que l'on ne calculera pas.
3. En déduire sa limite quand $n \to +\infty$.

Exercice 410 (Centrale PSI 2022 - ❄❄)

1. Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance. Montrer que $E(U) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(U \geq n)$.
2. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $F_k = \sum_{i=0}^{k} P(X_1 = i)$, et, pour $\in \mathbb{N}^*$, $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Exprimer $P(M_n \leq k)$ en fonction de F_n et de n.
3. On lance trois dés équilibrés à 6 faces. Quelle est la probabilité que le plus grand résultat soit égal à 4 ?
4. Trois joueurs jouent à pile ou face jusqu'à obtenir pile. Soit X le nombre de lancers du dernier joueur à obtenir pile. Calculer $P(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 411 (Mines Telecom PSI 2019 (Jade C.) - ❄)

Une puce se déplace sur la droite réelle. Ses positions possibles sont les entiers naturels. A l'instant 0 elle est à l'origine, et à chaque instant entier, il se déplace d'une ou deux cases vers la droite de manières équiprobables. On note X_n son abscisse après n pas.

1. On note X_n son abscisse après n pas.
   Donner la loi de X_1, son espérance et sa variance.
2. On note Y_n le nombre de fois où la puce s'est déplacée de 1 case en n sauts.
   Donner la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
3. En déduire l'espérance et la variance de X_n.

Exercice 412 (Mines-Télécom PSI 2017 - ❄❄)

On lance 6 dés simultanément. Lorsqu'un dé au moins donne 6, on le(s) met de côté et on relance les dés jusqu'à ce que tous les dés aient donnés 6.

1. Donner la loi de la variable aléatoire X qui compte le nombre de lancers nécessaires.
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 413 (Marche aléatoire - ❄)

Un point mobile se déplace de façon aléatoire sur un axe gradué par les entiers relatifs.
A l'instant 0 il est à l'origine, et à chaque instant entier, il se déplace d'une unité vers la droite avec la probabilité $p \in]0, 1[$ ou vers la gauche avec la probabilité $q = 1 - p$. On note X_n son abscisse après n pas.

1. Soit D_n la variable aléatoire égale au nombre de pas vers la droite. Quelle est la loi de D_n ?
   Exprimer X_n en fonction de D_n.
2. En déduire l'espérance et la variance de X_n.
3. Pour quelle valeur de p la variable aléatoire X_n est-elle centrée ?

Exercice 414 (CCP PSI 2015)

On tire un nombre $n \in \mathbb{N}^*$ avec la probabilité $P(X = n) = \dfrac{1}{2^n}$.
Si n est pair, on gagne n euros, si n est impair, on perd n euros.

1. Quelle est la probabilité que le joueur gagne de l'argent ?
2. On note G la variable aléatoire égale au gain du joueur (éventuellement négative).
   Calculer $E(G)$ et $V(G)$.

Exercice 415 (Centrale PSI 2017 - ❄❄)

Soit $p \in]0, 1[$. On se donne une pièce qui tombe sur pile avec la probabilité p. On la lance jusqu'à obtenir deux fois pile et on note X le nombre de faces obtenues.

1. Donner la loi de X.
2. Montrer l'existence et donner la valeur de l'espérance de X.
3. Si $X = n$, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne. On pioche une boule au hasard et Y désigne le numéro de la boule piochée. Donner la loi de Y et son espérance.

Exercice 416 (CCP PSI 2016 - ❄❄)

Soient X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ et $Y = X^2 + 1$.

1. Déterminer l'espérance de Y.
2. Quelle est la probabilité que $2X < Y$?
3. Comparer les probabilités que X soit paire et que X soit impaire.

Exercice 417 (CCEM PSI 2015 - ❄❄)

On admet que pour $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$, la série $\sum_{k \geq q} \binom{k}{q} p^{k-q}$ est convergente et que $\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} p^{k-q} = \frac{1}{(1-p)^{q+1}}$.

Pour une expérience, on place une bactérie dans une enceinte fermée à $t = 0$. Toutes les secondes à partir de $t = 1s$, on envoie un rayon laser dans l'enceinte. Chaque tir de laser est indépendant du précédent, et la probabilité du laser de toucher la bactérie est égale à p avec $p \in]0;1[$.

La bactérie ne peut survivre qu'à r tirs de laser avec $r \in \mathbb{N}^*$.

Soit X la variable aléatoire qui compte la durée de vie de la bactérie.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer son espérance.

Exercice 418 (CCP PC 2018 - ❄)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait :

$$4P(X = n+2) = -3P(X = n+1) + P(X = n).$$

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 419 (ENSEA MP 2017 - ❄❄)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes de même espérance m, de même variance σ^2 et de covariance λ.

Déterminer a de sorte que $Z = aX + (1-a)Y$ soit de variance minimale.

Exercice 420 (TPE PSI 2017 - ❄❄)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On note A l'événement « X prend une valeur paire ». On pose en outre $X_0 = X.\mathbb{1}_A$ et $X_1 = X.\mathbb{1}_{\overline{A}}$.

1. Calculer $P(A)$ et la comparer avec $1/2$.
2. Déterminer la fonction génératrice de X_0. Montrer que X_0 admet une espérance et la calculer.
3. Montrer que X_1 admet une espérance, la calculer et la comparer à $E(X_0)$.

Exercice 421 (Mines-Ponts 2018 (Sylvain R.) - ❄❄❄)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On note F l'ensemble des vard définies sur Ω et :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} F \times F & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X,Y) & \longmapsto & E(XY) \end{array} \right.$$

1. Montrer que (F, φ) est un espace préhilbertien réel (*enfin presque !).
2. On donne 1 (vard constante) et $\Delta =$Vect$\{1\}$.
   Pour $X \in F$, calculer le projeté orthogonal de X sur Δ.
   En déduire la distance de X à F.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $E((X-x)^2) \geq V(X)$.

Exercice 422 (❄❄)

Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et d'espérance finie.

1. Montrer que si X est positive et si $E(X) = 0$ alors X est presque sûrement nulle.
2. On suppose que X^2 est d'espérance finie.
   Montrer que si $V(X) = 0$ alors la variable aléatoire X est presque sûrement constante.

Exercice 423 (ENTPE-EIVP PSI 2015 - ❄)

Soit a un réel strictement positif. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait :

$$P(X = n) = \frac{a}{n(n+1)}.$$

1. Déterminer a.
2. X admet-elle une espérance, une variance ?
3. Expliciter la série génératrice de X.

Exercice 424 (❄)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la fonction génératrice est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = ae^{1+t^2}.$$

1. Déterminer a.
2. Donner la loi de X et calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 425 (CCP MP 2016 - ❄)

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{n^2+n+1}{n!} t^n$.
2. Donner le développement en série entière de la fonction exponentielle.
3. Expliciter $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} t^n$.
4. Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, admet pour fonction génératrice $G_X(t) = \lambda S(t)$ avec $\lambda > 0$.
   Déterminer λ, puis la loi de X.
   Rappeler l'expression $E(X)$ et de $V(X)$ en fonction de G_X.
   En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 426 (CCP PSI 2018 - ❄❄)

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de même loi. On suppose que la variable $Z = X+Y+1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Déterminer l'espérance de X.
2. Calculer la fonction génératrice de X.
3. « Reconnaître » la loi de X.

Exercice 427 (❄)

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P(X = n) = an^2 \frac{\lambda^n}{n!}.$$

1. Déterminer sa fonction génératrice G_X.
   En déduire la valeur de a.
2. Calculer l'espérance de X.

Exercice 428 (CCINP PSI 2021 - ❄)

Soit $f : t \longmapsto \dfrac{t}{2-t^2}$.

1. Développer f en série entière, préciser le rayon de convergence.
2. Donner la loi d'une variable aléatoire X dont la fonction génératrice est f.
3. Calculer l'espérance de X.
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \dfrac{X}{2}$.

Exercice 429 (IMT PSI 2023 (Pierre D.) - ❄❄)

Une urne contient des boules blanches avec une proportion $p \in]0,1[$ et des boules noires avec une proportion $q = 1-p$.
On effectue des tirages successifs avec remise.
On note X la longueur de la 1ère séquence d'une même couleur et Y la longueur de la deuxième séquence.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Déterminer la loi de X, sa fonction génératrice, son espérance et sa variance.
3. Mêmes questions pour Y.
4. Montrer que $E(X) \geq 2$.
   Pour quelle valeur de p a-t-on $E(X) = 2$?

Exercice 430 (CCINP PSI 2021, 2023 (Thibault H.) - ❄

1. Donner le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-x)^r}$ pour $r \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose :
$$p_k = \binom{k+r-1}{k} p^r q^k.$$
   Montrer que $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.
3. On se donne une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = p_k.$$
   Donner la fonction génératrice de X.
   Quel est son rayon de convergence ?
4. X admet-elle une espérance finie ? Si oui, quelle est-elle ?
   Même questions pour la variance.

Exercice 431 (ENTPE-EIVP PSI 2015 - ❄❄)

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, A, P))$ telle que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ P(X = k) = \frac{k-1}{2^k}.$$

1. Vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$.
2. Donner la fonction génératrice de X.
   Quel est son rayon de convergence ?
3. X admet-elle une espérance finie ? Si oui, quelle est-elle ?

Exercice 432 (CCINP PSI 2019 - ❄❄)

On considère une urne contenant des boules numérotées de 1 à n. On dispose d'un jeton mobile sur un axe gradué de 0 à n de la gauche vers la droite ; la position initiale du jeton est 0.

On effectue des tirages avec remise dans l'urne et à chaque tirage, si le numéro de la boule est inférieur ou égal à la position du jeton, on déplace le jeton d'une graduation vers la gauche, et si le numéro de la boule est strictement supérieur à la position du jeton, on le déplace d'une graduation vers la droite.

1. Donner les positions possibles du jeton après p lancers.
2. On note X_p la position du jeton après p lancers. Exprimer $\mathbb{P}(X_{p+1} = 0)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_p = 1)$ et $\mathbb{P}(X_{p+1} = n)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_p = n-1)$.
3. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, exprimer $\mathbb{P}(X_{p+1} = k)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_p = k-1)$ et $\mathbb{P}(X_p = k+1)$.
4. Rappeler pourquoi la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ est au moins définie sur l'intervalle $[-1, 1]$.
   On note G_p la fonction génératrice de X_p, pourquoi G_p est-elle polynomiale ?
5. On admet que $G_{p+1}(t) = tG_p(t) + \dfrac{1-t^2}{n} G_p'(t)$ pour tous t et p.
   Montrer que $\mathbb{E}(X_{p+1}) = 1 + \left(1 - \dfrac{2}{n}\right) \mathbb{E}(X_p)$.
6. Déterminer $\mathbb{E}(X_p)$.

Exercice 433 (CCINP PSI 2019 (Clémence H.) et 2021 - ❄

On dispose d'une urne qui contient trois jetons numérotés $1, 2, 3$, et dans laquelle on effectue des tirages avec remise. Soient Y la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois un chiffre différent du premier chiffre obtenu et Z la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage où l'on obtient pour la première fois un troisième chiffre.

1. Déterminer la loi de Y. Quelle est la loi de $Y - 1$?
2. En déduire l'espérance et la variance de Y .
3. Déterminer la loi de (Y, Z).
4. En déduire la loi de Z.

Exercice 434 (CCP PSI 2017 - ❄❄)

Soit X une variable suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a :
$$P(X \leq n) = \frac{1}{n!} \int_\lambda^{+\infty} e^{-t} t^n \mathrm{d}t.$$
2. En déduire un équivalent de $\displaystyle\int_\lambda^{+\infty} e^{-t} t^n \mathrm{d}t$ quand n tend vers $+\infty$.
3. Donner la fonction génératrice G_X de X. Que valent $G_X(1)$ et $G_X(-1)$? En déduire la probabilité que X soit paire.
4. Pour Y une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{1, 2\}$, calculer $P(XY$ est paire$)$.

Exercice 435 (Mines-Ponts PSI 2021 - ❄❄)

Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Déterminer la probabilité que toutes les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + (A-1)y' + By = 0$$

tendent vers 0 en $+\infty$..

Exercice 436 (CCP PC 2015 - ❄❄)

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}$ peut-elle être inversible ?

   À quelle condition sur x et y représente-t-elle un projecteur non nul ?
2. Deux variables indépendantes X et Y suivent une loi Binômiale de paramètres n et p.

   (a) Quelle est la probabilité que

   $$A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ X(\omega) & Y(\omega) \end{pmatrix}$$

   soit inversible ?

   (b) Quelle est la probabilité pour que A représente un projecteur non nul ?

Exercice 437 (❄❄)

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit une matrice de projecteur.
3. Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes, sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant une même loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On pose :

   $$\forall \omega \in \Omega,\ M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) & Z(\omega) \\ X(\omega) & Y(\omega) & Z(\omega) \\ X(\omega) & Y(\omega) & Z(\omega) \end{pmatrix}$$

   (a) Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?

   (b) Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projecteur ?

Exercice 438 (TPE PSI 2019 (Jade C.) - ❄)

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres $p > 0$. Quelle est la probabilité que la matrice $A = \begin{pmatrix} X & Y & 0 \\ 4Y & X & 0 \\ 0 & 0 & X-Y \end{pmatrix}$ soit inversible ?

Exercice 439 (Mines-Ponts PC 2017 - ❄❄)

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres p et $q > 0$. Quelle est la probabilité que la matrice $A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

Exercice 440 (CCINP PSI 2021 et 2023 (Yassine N.) - ❄)

On considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes et suivant toutes deux la loi binomiale de paramètres n et $1/2$.

Pour $\omega \in \Omega$, on pose $M(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) & 1 \\ 0 & X_2(\omega) \end{pmatrix}$.

1. En développant de deux manières le polynôme $(1+X)^{2n}$, montrer l'égalité $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
2. En déduire la probabilité que $M(\omega)$ soit diagonalisable.

Exercice 441 (IMT 2022 (Aubin G.) - ❄)

Deux variables indépendantes X et Y suivent une géométrique de paramètres p et q respectivement.

Quelle est la probabilité que $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$ soit inversible ?

Exercice 442 (Centrale PSI 2021 - ❄❄)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre p. Soit $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$. Soient I, S avec $I \leq S$ les valeurs propres de M.

1. Déterminer les expressions de I et S en fonction de X et Y.
2. Quelle est la probabilité que la matrice M soit inversible ?
3. Calculer la covariance de I et S. Ces variables sont-elles indépendantes ?
4. Montrer que, pour tout$k \geq 2$, $P(S = k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}$.

Exercice 443 (CCINP PSI 2019, 2023 (Franck-Arthur E. -

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

1. Déterminer la loi de $Z = X + Y$.
2. Calculer $P(X = k | Z = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Reconnaître la loi.
3. X et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 444 (IMT PC 2018 - ❄)

X et Y suivent une loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

Montrer que $Z = X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Pariez-vous que X est pair ou impair ?

Exercice 445 (CCINP PC 2021 - ❄❄)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On définit les événements A : « X est pair » et B : « X est un multiple de 3 ».

1. Calculer $P(A)$ et $P(B)$.
2. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 446 (CCP PSI 2018 (Mélissandre H.) - ❄❄)

Un élément chimique émet pendant une durée T des électrons. Soit N la variable aléatoire égale au nombre d'électrons émis. Un électron a, indépendamment des autres, une probabilité $p \in]0,1[$ d'être efficace. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'électrons efficaces, et Y celle égale au nombre d'électrons inefficaces.

1. Exprimer pour tout $k, j \in \mathbb{N}$, $P_{(N=j)}(X = k)$.
2. En déduire la loi marginale de X, puis donner sans calcul $E(X)$ et $V(X)$.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. En remarquant que $N = X + Y$, calculer $\text{cov}(X, N)$. En commenter le signe.

Exercice 447 (CCINP PSI 2021 - ❄❄)

Soient a et n deux entiers naturels. On considère an clients qui choisissent chacun un fournisseur. Il y a n fournisseurs et ils sont choisis au hasard. Soit X_i la variable aléatoire associée au nombre de clients du fournisseur i. Soit Y la variable associée au nombre de fournisseurs qui n'ont pas de clients.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de X_i.
2. Calculer $\text{Cov}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n, X_i)$.
   En déduire $E(X_jX_i)$ et $\text{Cov}(X_j, X_i)$.
3. Calculer l'espérance et la variance de Y .

Exercice 448 (IMT PSI 2018 (Mélissandre H.) - ❄❄)

Un détecteur de particules détecte une particule avec une probabilité $p_0 \in]0,1[$.
Soit P la variable aléatoire qui compte le nombre de particules envoyées, et D celle qui compte le nombre de particules effectivement détectées.
On suppose que $P \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

1. Calculer $P(D = d \mid P = p)$ puis $P\Big((D = d) \cap (P = p)\Big)$.
2. Déterminer la loi de D.
3. Les variables aléatoires P et $D - P$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 449 (CCP MP 2017 - ❄❄)

Les coefficients d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivent tous une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ et sont mutuellement indépendants.

1. Donner la loi de $\text{tr}(M)$. Calculer l'espérance de $\text{tr}(M)^2$.
2. Les coefficients de M^2 sont-ils indépendants ?

Exercice 450 (❄❄)

Une urne contient $2n$ boules de couleurs différentes, n boules sont numérotées 0 et les autres boules sont numérotées de 1 à n. On prend une poignée de n boules dans l'urne. Si $k \in [\![1, n]\!]$, on note U_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée k est dans la poignée et 0 sinon.

1. Déterminer la loi de U_k. Donner son espérance et sa variance, puis calculer $\text{cov}(U_i, U_j)$ pour $i \neq j$.
2. Soit $N = U_1 + \cdots + U_n$. Que représente N ? Calculer l'espérance et la variance de N.
3. Soit S la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules présentes dans la poignée. Exprimer S en fonction des U_k.
4. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de boules numérotées 0 présentes dans la poignée. Donner une expression de Z. Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$.

Exercice 451 (CCP PSI 2015 - ❄)

Deux variables aléatoires suivent une loi de Bernouilli de paramètres respectifs p et q.

1. On suppose que la covariance de (X, Y) est nulle.
2. Montrer que $P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 1)$.
   En déduire que X et Y sont indépendantes.

Exercice 452 (Mines - Ponts PSI 2016 - ❄❄)

Soient X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$ et Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose X et Y indépendantes. Calculer $P(X = Y)$ et $P(X < Y)$.

Exercice 453 (Mines-Ponts PSI 2018 - ❄❄)

Sot X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre p.
Déterminez la loi et l'espérance de $Z = |X - Y|$.

Exercice 454 (Couple de variables aléatoires - ❄❄)

On lance deux dés équilibrés, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On appelle $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

1. Donner la loi de X. En déduire $E(X)$.
2. Exprimer $X+Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire $E(Y)$.
3. Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2. En déduire $\text{Cov}(X, Y)$.

Exercice 455 (CCINP PC 2021 - ❄)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. Donner la loi de la variable $\min(X, Y)$ et calculer son espérance.
2. Donner la loi de la variable $\max(X, Y)$ et calculer son espérance.

Exercice 456 (CCINP PSI 2021 (Léa D.) - ❄❄)

Soit $n \geq 2$ un entier. On tire simultanément deux boules au hasard dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au plus petit (resp. au plus grand) des numéros des deux boules tirées.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y). En déduire les lois marginales de X et de Y.
2. Calculer $E(Y)$ puis $E(Y(Y-2))$. En déduire $V(Y)$.
3. Calculer $E(X)$ puis $E(X(X-2))$. En déduire $V(Y)$.
4. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.

Exercice 457 (Centrale PC 2017 - ❄❄)

Les n candidats $C_1, \ldots, C_n$ s'affrontent à une élection. On vote pour le candidat C_i avec une probabilité p_i, où :

$$p_1 + \cdots + p_n = 1.$$

1. Après N votes, déterminer la loi du nombre X_i de votes en faveur de C_i.
2. Déterminer la loi conjointe de (X_i, X_j) pour $1 \leq i < j \leq n$.

Exercice 458 (CCP PSI 2015 - ❄❄)

Soit n un entier naturel non nul.
On considère une urne contenant $n-1$ boules noires et 1 boule blanche. On procède à un tirage sans remise.
On note X le rang d'apparition de la boule blanche, Y le nombre de boules noires restantes dans l'urne après le tirage de la boule blanche.

1. Donner la loi de X, son espérance et sa variance (si elles existent)
2. Exprimer Y en fonction de X. Donner son espérance si elle existe.

Exercice 459 (❄❄)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
On suppose que la loi de X est donnée par :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = i) = \frac{i}{2^{i+1}}.$$

Une urne contient X boules numérotées de 1 à X. On tire une boule au hasard et on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Déterminer les moments d'ordre 1 et 2 de X et Y.
2. Déterminer la loi du couple (X, Y).
3. Déterminer la loi de Y.

Exercice 460 (❄)

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \ P((X, Y) = (p, q)) = \lambda \frac{p + q}{p!q!2^{p+q}}.$$

1. Déterminer λ et calculer les lois marginales.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 461 (CCP PSI 2015, IMT PSI 2017 - ❄❄)

Deux variables aléatoires X et Y suivent respectivement une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et une loi binomiale de paramètres n et p à condition que $X = n$.

1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y) et en déduire la loi de Y. La reconnaître.
2. Déterminer la loi de $Z = X - Y$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 462 (ENSEA MP 2017 - ❄❄)

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ telles que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = k)$ est la loi uniforme sur $[\![0, k]\!]$.

1. Déterminer la loi de (X, Y) puis la loi de X, en fonction de celle de Y.
2. Calculer l'espérance de X en fonction de celle de Y.

Exercice 463 (Mines-Ponts PSI 2019 - ❄❄)

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $]0, +\infty[$, indépendantes et de même loi. On pose :

$$Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2} \text{ et } Y_2 = \frac{X_2}{X_1 + X_2}.$$

1. Démontrer que Y_1 admet une espérance finie et calculer $\mathbb{E}(Y_1)$.
2. Démontrer que Y_1 admet une variance finie, puis montrer que $\text{cov}(Y_1, Y_2) = -\mathbb{V}(Y_1)$.

Exercice 464 (ENSAM PSI 2017 - ❄❄)

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (a) Trouver une relation entre $P(X > k-1), P(X > k)$ et $P(X = k)$.
   (b) En déduire l'égalité
   $$\sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$
   (c) On suppose que X admet une espérance.
   Montrer que la série de terme général $P(X > k)$ converge et que $nP(X > n)$ tend vers 0.
   (d) Réciproquement, on suppose que la série de terme général $P(X > k)$ converge. Montrer que X admet une espérance.
2. Application. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres p_1 et p_2 respectivement.
   Soit $Z = \max\{X, Y\}$.
   (a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(Z > k)$.
   (b) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

Exercice 465 (❄❄)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de même paramètre $p \in]0,1[$.

1. Déterminer la loi de $X+Y$.
2. Déterminer $P(X>n)$ pour $n\in\mathbb{N}$.
3. Déterminer la loi de $Z=\min(X,Y)$ et la loi de $T=\max(X,Y)$.
4. Calculer $E(Z)$ et $E(T)$.

Exercice 466 (CCP MP 2018 - ❄❄)

Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent une loi géométrique de même paramètre $p \in]0,1[$.
On note $U=\min(X,Y)$ et $V=|X-Y|$.

1. Exprimer le lien entre $P(U=k), P(U\geq k)$ et $P(U\geq k+1)$ pour $k>0$.
2. En déduire la loi de U et donner son espérance.
3. Donner la loi de V.
4. Montrer que U et V sont indépendantes.

Exercice 467 (❄❄)

Soient $p\in]0,1]$ et $q=1-p$.
Soient $X_1, X_2, \ldots, X_N$, des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p.

1. Calculer $P(X_i \leq n)$.
2. Soit $Y=\max(X_1,X_2,\ldots,X_N)$. Calculer $P(Y\leq n)$; en déduire $P(Y=n)$.
3. Montrer que Y admet une espérance.

Exercice 468 (ENSEA PSI 2021 (Andy D.) -❄❄)

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et soient $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant des lois géométriques de même paramètre $p\in]0,1[$.
On pose $Y=\min(X_1,\ldots,X_n)$.

1. Déterminer $P(Y\geq n)$ pour $k\in\mathbb{N}^*$
2. Trouver la loi de Y.

Exercice 469 (CCP PSI 2017 et 2019 - ❄❄)

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p\in]0,1[$. Soit N une variable aléatoire telle que $N+1$ suive une loi géométrique de paramètre p. On définit la variable aléatoire Y en posant $Y=Y_1+\cdots+Y_N$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Donner la loi de $S_n=X_1+\cdots+X_n$.
2. Soit $x\in]-1,1[$ et $k\in\mathbb{N}$. Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k}$.
3. On suppose que N et S_n sont indépendantes pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y=k)$ et donner la loi de $Y+1$.

Exercice 470 (Mines-Ponts PSI 2018 - ❄❄)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p\in]0,1[$. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ A_n l'événement $(X_n=\cdots=X_{2n-1}=1)$ et I l'événement « une infinité de A_n sont réalisés ». Montrez que $P(I)=0$.

Exercice 471 (ENSAM PSI 2016 - ❄❄❄)

Soit T une variable aléatoire telle que $T(\Omega)=[\![1;k]\!]$. On considère $k+1$ variables aléatoires $(X_i)_{0\leq i\leq k}$ suivant une même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que toutes ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes. On définit enfin une variable aléatoire Y par

$$\forall\omega\in\Omega,\qquad Y(\omega)=\sum_{i=0}^{T(\omega)}X_i(\omega).$$

1. Montrer que si les X_i admettent une espérance alors Y aussi.
2. Donner sous ces hypothèses une expression de $E(Y)$ en fonction de $E(X_i)$ et $E(T)$.

Exercice 472 (❄❄)

On considère n variables aléatoires mutuellement indépendantes notées $X_1,...,X_n$ de loi de Bernoulli de paramètre $p\in]0,1[$. On note :

$$\forall i\in[\![1,n-1]\!],\quad Y_i=X_iX_{i+1}.$$

1. Déterminer la loi de Y_i pour $i\in[\![1,n-1]\!]$.
2. Déterminer l'espérance et la variance de $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}Y_k$.

Exercice 473 (CCINP PC 2022 - ❄❄)

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables indépendantes deux-à-deux de lois de Bernoulli de paramètre p. On pose $Y_n=X_nX_{n+1}$.

1. Préciser la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
2. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, calculer la covariance de Y_n et Y_{n+k}.

Exercice 474 (ENSAM PSI 2016 - ❄❄)

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p. On pose $q=1-p$ et $Y=|X_1-X_2|$.

1. Calculer $P(Y=0)$. Soit $n\in N$.
   Montrer que $P(X_1-X_2=n)=\dfrac{pq^n}{1+q}$. En déduire la loi de Y.
2. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.
3. Montrer que $E((X_1-X_2)^2)=2V(X_1)$. En déduire que Y admet une variance et la calculer.

Exercice 475 (❄)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire réelle suivant une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{n}$.

1. Montrer que $P(X \geq n^2) \leq \frac{1}{n}$.
2. Montrer que $P(|X-n| \geq n) \leq 1 - \frac{1}{n}$.

   En déduire que $P(X \geq 2n) \leq 1 - \frac{1}{n}$.

Exercice 476 (CCP PC 2018 - ❄)

Soient $a > 0$ et X une variable aléatoire réelle discrète telle que $E(X) = V(X) = a$.

1. Donner un exemple de variable aléatoire vérifiant cette condition.
2. Montrer que $P(X \geq 2a) \leq P((X-a+1)^2 \geq (a+1)^2)$.
3. Montrer que $P(X \geq 2a) \leq \frac{1}{a+1}$.

Exercice 477 (❄)

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Montrer que $P(X \leq \lambda/2) \leq \frac{4}{\lambda}$.
2. Montrer que $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$.

Exercice 478 (Navale PSI 2017 - ❄❄)

Soit $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{4}\right)$, et $n \geq 5$.

À partir des inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev, déterminer un encadrement vérifié par $P(X \geq n)$.

Exercice 479 (❄)

On lance 3600 fois un dé et on appelle X le nombre de fois où apparaît le numéro 1.

1. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et sa variance.
2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, minorer la probabilité que X soit compris entre 480 et 720.

Exercice 480 (❄)

En utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchebichev : combien de fois doit-on lancer une pièce de monnaie non truquée pour que l'on ait une probabilité supérieure à $0,9$ que le nombre de *Pile* sur le nombre de lancers soit compris entre 0.4 et 0.6 ?

Exercice 481 (Mines-Ponts PC 2022 - ❄)

Soit X la variable aléatoire égale aux nombres de **Faces** obtenus lors de n lancers d'une pièce équilibrée.

Trouver n tel que $\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{100}\right)$ ait au moins 99% de chance de se produire.

Exercice 482 (❄)

Une usine confectionne des pièces dont une proportion p est défectueuse. On effectue un prélèvement de n pièces et Z_n est la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses dans ce prélèvement.
On souhaite faire une approximation de p par la proportion $\frac{Z_n}{n}$.

1. Quelle est la loi de Z_n ? En déduire son espérance et sa variance.
2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, déterminer une condition suffisante sur n pour que l'approximation proposée donne une valeur de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure à 95%.

Exercice 483 (Centrale PSI 2018 - ❄)

1. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov.
2. Soit X une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ telle que e^{2X} est d'espérance finie.
   Montrer que $P(X \geq x) \leq e^{-2x} E(e^{2X})$.

Exercice 484 (Mines-Télécom PSI 2016 - ❄❄)

On lance n fois 2 dés non truqués A et B. X est la variable aléatoire associée au nombre de fois où le chiffre de A est strictement supérieur à celui de B.

1. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Rappeler la formule de Bienaymé-Tchebychev.
3. Exprimer $p_n = P\left(0,9 \leq \frac{X}{E(X)} \leq 1,1\right)$ à l'aide de $|X - E(X)|$ et trouver n tel que $p_n \geq 0,99$.

Exercice 485 (IMT PC 2018 - ❄)

On note S_n la somme de n variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Donner l'espérance et la variance de $\frac{S_n}{n}$.
2. Pour $\varepsilon > 0$, montrer que $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$.

   Quel résultat de cours retrouve-t-on ?

Exercice 486 (❄❄)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_k = X_k X_{k+1}$.

1. Donner la loi de Y_k, son espérance et sa variance.
2. Soient $i, j \in \mathbb{N}^*$ distincts ($i < j$ par exemple).
   Discuter, suivant les valeurs de i et j de l'indépendance de Y_i et de Y_j. Déterminer $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$.
3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \frac{1}{n}(Y_1 + \cdots + Y_n)$.
   Calculer l'espérance et la variance de Z_n.
4. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$P(|Z_n - p^2| \geq \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 487 (IMT PSI 2017 - ❄❄)

1. Soient $Y_1, \dots, Y_n$ des variables aléatoires réelles discrètes deux-à-deux indépendantes, suivant une même loi et admettant un moment d'ordre 2 et $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Soit $a > 0$. Démontrer à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev que :
$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| > a\right) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}.$$
2. On effectue des tirages avec remise d'une boule dans un sac contenant deux boules rouges et trois boules blanches. Au bout de n tirages, on compte le nombre de boules rouges obtenues. Trouver n tel qu'on ait une probabilité d'au moins 95% d'avoir une proportion de boules rouges comprise entre $0,35$ et $0,45$.

Exercice 488 (Centrale PSI 2021 - ❄❄)

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, justifier que $\exp(tX_n)$ admet une espérance et la calculer. Montrer que $E(\exp(tX_n)) \leq e^{t^2/2}$ pour tout $(n, t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$.
2. Justifier que $\exp(tS_n)$ admet une espérance et la calculer. Déterminer la limite de $E(\exp(tS_n/\sqrt{n}))$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 489 (❄❄)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. On pose $Y_n = \dfrac{X_n + X_{n+1}}{2}$. Déterminer la loi de Y_n.
2. Les variables (Y_n) sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer l'espérance et la variance des Y_n.
4. On pose alors $T_n = \dfrac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}$.
Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} P(|T_n - p| \geq \varepsilon) = 0.$$

Exercice 490 (Mines-Ponts PC 2022 - ❄❄)

Soit $\alpha > 0$.

1. Montrer l'existence d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G_X telle que :
$$\forall t \in [0, 1],\ G_X(t) = \frac{1}{(2 - t)^\alpha}.$$
2. Soit $\lambda > 0$. Montrer que $P(X \geq \lambda + \alpha) \leq \dfrac{2\alpha}{\lambda^2}$.

Exercice 491 (Mines-Ponts PSI 2019 - ❄❄❄)

1. Soit X et Y des variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre 2.
Montrer que $(\mathbb{E}(XY))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$.
2. Soit Z une variable aléatoire discrètes à valeurs strictement positives, admettant un moment d'ordre 2 et $a \in]0, 1[$.
Montrer que $\mathbb{P}(Z > a\mathbb{E}(Z)) \geq \dfrac{\mathbb{E}(Z^2)}{(1 - a)^2(\mathbb{E}(Z))^2}$.

Exercice 492 (Centrale PSI 2021 - ❄❄❄)

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. (*identiquement distribuées et indépendantes*) de variables aléatoires de Rademacher c'est-à-dire telle que $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \dfrac{1}{2}$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $N = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{(S_n=0)}$.

1. Donner la signification des événements :
$$(S_n = 0),\ (N < +\infty),\ (N = +\infty).$$
Exprimer $(N < +\infty)$ et $(N = +\infty)$ à partir des événements $(S_k = 0)$.
2. Montrer que :
$$P(N < +\infty) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(S_n = 0)P(\forall k \in \mathbb{N}^*, S_k \neq 0).$$
3. On admet que la série $\sum P(S_n = 0)$ diverge.
En déduire $P(N = +\infty)$.
4. Montrer que la série $\sum P(S_n = 0)$ diverge.
Ind. Se ramener à des variables de Bernoulli.

Exercice 493 (Centrale PSI 2018 - ❄❄❄)

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit $\lambda > 0$.

1. Donnez la loi de S_n. Précisez son espérance et sa variance.
2. Calculez l'espérance de la variable $\exp\left(\lambda\left(X_1 - \dfrac{1}{2}\right)\right)$.
3. Déterminez l'espérance de la variable $\exp(\lambda(S_n - E(S_n)))$.
4. Soit $t > 0$. Trouvez une fonction f_t telle que :
$$P\Big((S_n - E(S_n)) > nt\Big) \leq e^{nf_t(\lambda)}.$$
5. Déterminez le maximum de $f_t(\lambda)$ pour $|t| \leq \dfrac{1}{2}$. .

Notes personnelles :