Devoir surveillé 7*

le mercredi 21 février (14h-18h)

Les calculatrices, les téléphones portables et objets connectés (montres...) ne sont pas autorisés.

Exercice

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles.
Dans tout l'exercice, E est l'espace vectoriel euclidien usuel $\mathbb{R}^n$ dont le produit scalaire est noté $\langle\, , \rangle$.
Soit $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

   (i) $\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T A X \geqslant 0$
   (ii) $\forall\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\lambda \geqslant 0$
   (iii) $\exists\, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

   On dit dans ce cas que la matrice A est symétrique positive et on note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble de telles matrices.
2. Soient J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les termes sont égaux à 1 et α un réel. On pose $M = -J + (\alpha+1)I_n$ où I_n est la matrice de l'endomorphisme identité de E.

   (a) Déterminer les éléments propres de J. En déduire ceux de M.
   (b) Pour quelles valeurs de α a-t-on $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$? Montrer qu'alors $\mathrm{rg}(M) \geqslant n-1$.
3. Soient $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et a l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{C}$ est A.

   (a) Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ de E constituée de vecteurs propres de l'endomorphisme a.

   On notera pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, λ_i la valeur propre associée au vecteur propre u_i.
   (b) Soit b l'endomorphisme de E défini par : $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $b(u_i) = \sqrt{\lambda_i}\, u_i$.
   Justifier que b est un endomorphisme symétrique.
   (c) Démontrer que : $\mathrm{Ker}(a) = \mathrm{Ker}(b)$.
4. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que : $\forall\, (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $(i \neq j \Longrightarrow a_{i,j} < 0)$.
   a est toujours l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{C}$ est A et b l'endomorphisme de E tel que défini à la question **3.(b)**.

   (a) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $z_i = b(e_i)$. **On va montrer que la famille $(z_1, \ldots, z_{n-1})$ est libre.**

   Dans ce but, on considère des scalaires $(\gamma_i)_{i \in [\![1, n-1]\!]}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i z_i = 0$.

   i. Montrer que l'on a aussi : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i = 0$.

   ii. En utilisant le produit scalaire $\left\langle \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i \,,\, z_n \right\rangle$, conclure.

   (b) Prouver que : $\mathrm{rg}(A) \geqslant n-1$.

Problème

Dans ce problème, on se propose de définir la notion d'image d'une matrice réelle symétrique par une fonction d'une variable réelle, puis d'étudier quelques propriétés de cette notion (en particulier, relativement à la continuité et à la convexité). Ces notions présentent un intérêt en sciences physiques (statistique ou quantique).

Notations

Dans tout le problème :

- n désigne un entier naturel non nul ;
- si p et q sont des entiers naturels, l'ensemble des entiers k tels que $p \leq k \leq q$ est noté $[\![p, q]\!]$;
- si i et j sont des entiers naturels, alors $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ sinon ;
- B_n désigne l'ensemble des bijections de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même ;
- I est un intervalle de $\mathbf{R}$ qui n'est ni vide ni réduit à un singleton ;
- $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbf{R}$;
- une fonction φ de I dans $\mathbf{R}$ est dite polynomiale s'il existe P un polynôme réel tel que, pour tout $x \in I, \varphi(x) = P(x)$;
- $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$(respectivement $D_n(\mathbf{R})$, resp. $S_n(\mathbf{R})$, resp. $O_n(\mathbf{R})$), désigne l'ensemble des matrices carrées (resp. diagonales, resp. symétriques, resp. orthogonales) d'ordre n à coefficients réels, et on confond un élément de $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ avec son unique coefficient ;
- on note Tr l'application trace définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$;
- si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note M^T sa transposée, on note $\mathrm{Sp}(M)$ son spectre réel, et si $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2, [M]_{i,j}$ est le coefficient de M situé à la i-ème ligne et j-ème colonne ;
- on munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de sa norme infinie, notée $\|\cdot\|$ et définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad \|M\| = \max\{|[M]_{i,j}|,\ 1 \leq i, j \leq n\}$$

- $S_n(I)$ désigne l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbf{R})$ dont le spectre réel est inclus dans I ;
- si $u = (u_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{R}^n$, on dit que ce n-uplet est croissant si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$(i \leq j) \Longrightarrow (u_i \leq u_j)$$

- si $i_0 \in [\![1, n]\!]$, on appelle nombre d'occurrences de u_{i_0} dans u le cardinal de l'ensemble $\{i \in [\![1, n]\!]; u_i = u_{i_0}\}$
- enfin $\mathrm{Diag}\left((u_i)_{1 \leq i \leq n}\right)$ désigne l'élément D de $D_n(\mathbf{R})$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ [D]_{i,i} = u_i$$

  on pourra noter cet élément en extension $D = \mathrm{Diag}\,(u_1, \ldots, u_n)$.

I - Matrices de permutations

On considère l'application ω de B_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\forall \sigma \in B_n,\ \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ [\omega(\sigma)]_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$$

Ainsi, par exemple si $n = 2$, il existe deux éléments de B_2, c'est-à-dire deux permutations de $[\![1, 2]\!]$:

- Id : l'application identité
- τ : l'application qui échange 1 et 2.

On vérifiera que $[\omega(\mathrm{Id})]_{i,j} = \delta_{i,j}$ donc $\omega(\mathrm{Id}) = I_2$. Et de même, $\omega(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

I.A - Quelques exemples

On suppose que $n = 3$. On oriente l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^3$ par sa base canonique $\mathcal{C}_3$.

1. Soit σ_1 la permutation de $[\![1, 3]\!]$ définie par :

$$\sigma_1(1) = 3,\ \sigma_1(2) = 2 \ \text{ et } \sigma_1(3) = 1.$$

   Écrire la matrice $M_1 = \omega(\sigma_1)$ et reconnaître l'endomorphisme f_1 dont la matrice dans $\mathcal{C}_3$ est M_1.

2. Déterminer la permutation σ_2 de B_2 telle que $\omega(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Reconnaître l'endomorphisme f_2 dont la matrice dans $\mathcal{C}_3$ est $M_2 = \omega(\sigma_2)$ et donner ses éléments caractéristiques.

I.B - Généralités

3. Soit $\mathcal{C}_n = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\sigma \in B_n$.
   On note h_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathcal{C}_n$ est $\omega(\sigma)$.
   Pour $j \in [\![1, n]\!]$, quelle est l'image de e_j par h_σ ?
4. Démontrer que pour tout $\sigma \in B_n$, on a $\omega(\sigma) \in O_n(\mathbf{R})$. Quel est l'inverse de $\omega(\sigma)$?
5. Démontrer aussi que pour tout $(\sigma, \sigma') \in B_n^2,\ \omega(\sigma \circ \sigma') = \omega(\sigma)\omega(\sigma')$

I.C - Action sur les matrices diagonales

Le but de cette partie est d'étudier l'action sur les matrices diagonales de la conjugaison par des matrices de permutations.

6. Soit $\sigma \in B_n$ et $(d_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{R}^n$. Vérifier que :

$$\operatorname{Diag}\left((d_i)_{1 \leq i \leq n}\right) \omega(\sigma) = \omega(\sigma) \operatorname{Diag}\left(\left(d_{\sigma(i)}\right)_{1 \leq i \leq n}\right)$$

7. En déduire l'équivalence suivante concernant deux éléments D et D' de $D_n(\mathbf{R})$,
   i) D et D' ont le même ensemble de coefficients diagonaux, chacun ayant le même nombre d'occurrences dans D et D'.
   ii) il existe $M \in \omega(B_n)$ telle que $D' = M^T D M$.

II - Fonctions de matrices symétriques

Cette partie a pour objectif de définir une correspondance entre l'espace des fonctions de I dans $\mathbf{R}$ et l'espace des fonctions de $S_n(I)$ dans $S_n(\mathbf{R})$, puis d'en démontrer quelques propriétés. Dans cette partie, f est une fonction de I dans $\mathbf{R}$.

8. Soit $S \in S_n(I)$. Justifier l'existence de $\Omega \in O_n(\mathbf{R})$ et de $(s_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$ tels que :

$$S = \Omega^T \operatorname{Diag}\left((s_i)_{1 \leq i \leq n}\right) \Omega$$

9. Pour tout $(s_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$, justifier l'existence d'un élément P de $\mathbf{R}[X]$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P(s_i) = f(s_i)$$

Soit $S \in S_n(I)$. On suppose que l'on dispose des deux écritures :

$$S = \Omega^T \operatorname{Diag}\left((s_i)_{1 \leq i \leq n}\right) \Omega \text{ et } S = \Omega'^T \operatorname{Diag}\left((s'_i)_{1 \leq i \leq n}\right) \Omega'$$

avec $\Omega, \Omega' \in O_n(\mathbf{R})$ et $(s_i)_{1 \leq i \leq n}, (s'_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n$.

10. Montrer que l'on a alors :

$$\Omega'^T \operatorname{Diag}\left(\left(f(s'_i)\right)_{1 \leq i \leq n}\right) \Omega' = \Omega^T \operatorname{Diag}\left(\left(f(s_i)\right)_{1 \leq i \leq n}\right) \Omega$$

    puis que $\Omega^T \operatorname{Diag}\left(\left(f(s_i)\right)_{1 \leq i \leq n}\right) \Omega \in S_n(\mathbf{R})$.

Dans la suite du problème, on note u l'application qui, à toute fonction φ de I dans $\mathbf{R}$, associe $u(\varphi)$ la fonction de $S_n(I)$ dans $S_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\forall S \in S_n(I), \quad u(\varphi)(S) = \Omega^T \operatorname{Diag}\left((\varphi(s_i))_{1\leq i\leq n}\right)\Omega$$

où $S = \Omega^T \operatorname{Diag}\left((s_i)_{1\leq i\leq n}\right)\Omega$, avec $\Omega \in O_n(\mathbf{R})$ et $(s_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n$.

Cette fonction est bien définie puisque, d'après la question précédente, $u(\varphi)(S)$ ne dépend pas du choix des matrices $\Omega \in O_n(\mathbf{R})$ et $D = \operatorname{Diag}\left((s_i)_{1\leq i\leq n}\right)$ avec $(s_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n$, tel que $S = \Omega^T D\Omega$.

Enfin, on désigne par v l'application $\operatorname{Tr} \circ u$.

11. Vérifier que u et v sont linéaires, puis calculer, pour toute fonction φ de I dans $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in I, u(\varphi)(xI_n)$.
12. Étudier l'injectivité et la surjectivité de u.
13. On suppose que f est polynomiale ; montrer qu'il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $S \in S_n(I), u(f)(S) = P(S)$.

    Réciproquement, est-il vrai que, s'il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $S \in S_n(I)$ $u(f)(S) = P(S)$, alors f est polynomiale ?

III - Norme et convexité

L'objectif de cette partie est de munir $S_n(\mathbf{R})$ d'une nouvelle norme qui permettra de compléter l'étude des fonctions de matrices symétriques.

14. On note $\Sigma = \left\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}); X^T X = 1\right\}$. Démontrer que si $S \in S_n(\mathbf{R})$ on a :

$$\min(\operatorname{Sp}(S)) = \min\left\{X^T SX; X \in \Sigma\right\} \text{ et } \max(\operatorname{Sp}(S)) = \max\left\{X^T SX; X \in \Sigma\right\}$$

15. Montrer finalement que $S_n(I)$ est une partie convexe de $S_n(\mathbf{R})$ et que l'application ρ, de $S_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$, qui à toute matrice $M \in S_n(\mathbf{R})$ associe

$$\max\{|\lambda|; \lambda \in \operatorname{Sp}(M)\}$$

    est une norme sur $S_n(\mathbf{R})$.

IV - Quelques questions choisies

On donne seulement quelques questions isolées de cette partie donnée au concours.

16. On suppose $S_n(\mathbf{R})$ muni de la norme ρ et on appelle χ l'application de $S_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}[X]$ qui, à tout élément de $S_n(\mathbf{R})$, associe son polynôme caractéristique.
    Démontrer que χ est continue.
17. On se donne une suite $(M_k)_{k\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans $S_n(\mathbf{R})$ qui converge vers M.
    Si $k \in \mathbf{N}$, on note $\Lambda_k = \operatorname{Sp}_\uparrow(M_k)$ le spectre croissant de M_k (c'est-à-dire le n-uplet croissant des valeurs propres de M_k dans lequel le nombre d'occurrences de chaque valeur propre coïncide avec son ordre de multiplicité).
    (a) Justifier que M est un élément de $S_n(\mathbf{R})$
    (b) Démontrer que la suite $(\rho(M_k))_{k\in\mathbf{N}}$ est convergente.
    (c) En déduire que la suite vectorielle $(\Lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est bornée.
18. Démontrer que $O_n(\mathbf{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$