Devoir surveillé 7 - Correction

Problème
d'après BCE (EM Lyon) 2008

Partie 1 : polynômes d'Hermite

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $w(x) = e^{-x^2}$, $w'(x) = -2xe^{-x^2}$, $w''(x) = (4x^2-2)e^{-x^2}$ et $w'''(x) = (-8x^3+12x)e^{-x^2}$ donc
$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2-2 \text{ et } H_3(x) = 8x^3-12x.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a $H_n(x) = (-1)^n w^{(n)}(x)e^{x^2}$ et donc
$$H_n'(x) = (-1)^n w^{(n+1)}(x)e^{x^2} + 2x(-1)^n w^{(n)}(x)e^{x^2}.$$
Or $H_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}w^{(n+1)}(x)e^{x^2}$ et donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x).}$

3. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété suivante.
$$\mathcal{P}_n : \ H_n \text{ est une fonction polynomiale de degré } n \text{ et de terme dominant } 2^n.$$
• **Initialisation :** C'est vrai au rang 0 (et même aux rangs 1,2,3).
• **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.
Alors H_n' est de degré $n-1$ (ou $-\infty$ si $n=0$) et donc $H_{n+1}(X) = 2XH_n(X) - H_n'(X)$ est de degré $1+\deg(H_n) = n+1$.
Son terme dominant est 2 fois celui de H_n, c'est-à-dire $2.2^n = 2^{n+1}$. Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.
• **Conclusion :** par le principe de récurrence, on a
$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ H_n \text{ est une fonction polynomiale de degré } n \text{ et de terme dominant } 2^n.}$$

4. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $w(-x) = w(x)$ et en dérivant n fois $(-1)^n w^{(n)}(-x) = w^{(n)}(x)$.
En multipliant par e^{x^2}, on trouve $\forall x \in \mathbb{R}, \quad H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$.
Et donc : $\boxed{\text{si } n \text{ est pair, } H_n \text{ est pair et si } n \text{ est impair, } H_n \text{ est impair.}}$

Partie 2 : un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

5. L'application $t \longmapsto P(t)Q(t)e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et, par croissances comparées, on a :
$$|P(t)Q(t)e^{-t^2}| = \underset{t\to+\infty}{o}(e^{-t}) \qquad \text{et} \qquad |P(t)Q(t)e^{-t^2}| = \underset{t\to-\infty}{o}(e^{t}).$$
Or $t \longmapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $t \longmapsto e^t$ est intégrable sur $]-\infty,0]$ donc, par comparaison, $t \longmapsto P(t)Q(t)e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Et donc $\boxed{\langle P|Q\rangle \text{ existe pour tous } P,Q \in \mathbb{R}[X].}$

6. La symétrie et la bilinéarité sont immédiates (à écrire). On a aussi $\langle P|Q\rangle \in \mathbb{R}$.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P^2(t)e^{-t^2} \geq 0$ et donc, par positivité de l'intégrale
$$\langle P|P\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{-t^2}dt \geq 0.$$
De plus, puisque $t \longmapsto P^2(t)e^{-t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, si $\langle P|P\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{-t^2}dt = 0$, on a :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ P^2(t)e^{-t^2} = 0 \quad \text{et donc} \quad \forall t \in \mathbb{R},\ P(t) = 0.$$
Et donc, puisqu'il a une infinité de racines, P est le polynôme nul.
L'application $(P,Q) \longmapsto \langle P|Q\rangle$ est donc définie positive et finalement :
$$\boxed{(P,Q) \longmapsto \langle P|Q\rangle \text{ définit un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$$

7. (a) On a $\|1\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$ et donc $\|1\| = \pi^{1/4}$, et $\langle X|1\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$.

(b) L'application $t \longmapsto t^{2n+1}e^{-t^2}$ est impaire et donc

$$I_{2n+1} = \int_{-\infty}^{0} t^{2n+1}e^{-t^2}dt = -\int_{0}^{+\infty} t^{2n+1}e^{-t^2}dt.$$

On a par conséquent, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{2n+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n+1}e^{-t^2}dt = 0.}$

(c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{2n} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n}e^{-t^2}dt$. On effectue une intégration par parties (hypothèses à écrire).

$$\int_A^B t^{2n+2}e^{-t^2}dt \;=\; \int_A^B t^{2n+1}.te^{-t^2}dt \;=\; \left[-\frac{t^{2n+1}}{2}e^{-t^2}\right]_A^B + \frac{2n+1}{2}\int_A^B t^{2n}e^{-t^2}dt.$$

Lorsque $A \to -\infty$ et $B \to +\infty$, on obtient l'égalité suivante.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2}I_{2n}.}$$

(d) On a donc $I_{2n} = \frac{2n-1}{2}I_{2n-2} = \cdots = \frac{(2n-1)\times(2n-3)\times\cdots\times 1}{2^n}I_0$.
En multipliant par $(2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 2 = 2^n n!$ les numérateur et dénominateur, on trouve

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{2n} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n}e^{-t^2}dt = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}.}$$

8. On note F le sous-espace vectoriel des polynômes pairs, et G celui des polynômes impairs.
Soient $P \in F$ et $Q \in G$. Alors $P(X)Q(X)$ est un polynôme impair et donc il s'écrit :

$$P(X)Q(X) = \sum_{i=0}^{N} a_i X^{2i+1}.$$

Par linéarité de l'intégrale, on a donc $\langle P|Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}dt = \sum_{i=0}^{N} a_i \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2i+1}e^{-t^2} = 0$,

d'après la question **3(b)** de la partie **2**. Et donc, $\boxed{F \perp G.}$

9. **Construction de P_0 :** On a vu que $\|1\| = \pi^{1/4}$, on pose donc $\boxed{P_0 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\pi^{1/4}}.}$

Construction de P_1 : On pose $Q_1 = X - \langle X|P_0\rangle P_0$.
On a vu que $\langle X|1\rangle = 0$, donc $\langle X|P_0\rangle = 0$. Ainsi, $Q_1 = X$.
De plus, $\|Q_1\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{-t^2}dt = I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On pose donc $\boxed{P_1 = \frac{Q_1}{\|Q_1\|} = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}}X.}$

Construction de P_2 : On pose $Q_2 = X^2 - \langle X^2|P_0\rangle P_0 - \langle X^2|P_1\rangle P_1$.
Or $\langle X^2|1\rangle = I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\langle X^2|X\rangle = I_3 = 0$, donc il reste :

$$Q_2 = X^2 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\langle X^2|1\rangle 1 = X^2 - \frac{1}{2}.$$

Enfin, $\|Q_2\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(t^2 - \frac{1}{2}\right)^2 e^{-t^2}dt = I_2 - I_1 + \frac{1}{4}I_0 = \sqrt{\pi}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On pose donc pour finir $\boxed{P_2 = \frac{Q_2}{\|Q_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}}\left(X^2 - \frac{1}{2}\right).}$

10. On a $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t^2-a-bt)^2 e^{-t^2}dt = \inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|X^2-(a+bX)\|^2 = d(X^2,\mathbb{R}_1[X])^2$.
Soit $P(X)$ le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.
Or, (P_0,P_1) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ et d'après la question précédente :

$$P(X) = \langle X^2|P_0\rangle P_0 + \langle X^2|P_1\rangle P_1 = X^2 - Q_2(X).$$

On a donc $\boxed{d(X^2,\mathbb{R}_1[X])^2 = \|X^2-P(X)\|^2 = \|Q_2(X)\|^2 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}.}$

Partie 3 : construction d'une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

Dans cette partie, $\mathbb{R}_n[X]$ est muni du produit scalaire introduit dans la partie 2. On travaille avec les polynômes de Hermite H_k définis dans la partie 1.

11. Soient $P\in\mathbb{R}[X]$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on effectue une intégration par parties.

$$\langle P'|H_{n-1}\rangle \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)H_{n-1}(t)e^{-t^2}dt \;=\; \underbrace{\left[P(t)H_{n-1}(t)e^{-t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)(H'_{n-1}-2tH_{n-1})(t)e^{-t^2}dt.$$

Or, d'après la question 2 de la partie 1, on a $H_n(x) = -H'_{n-1}(x) + 2xH_{n-1}(x)$ et donc

$$\boxed{\forall P\in\mathbb{R}[X],\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \langle P'|H_{n-1}\rangle \;=\; \langle P|H_n\rangle.}$$

12. En appliquant le résultat précédent avec $P, P', \ldots$, on obtient :

$$\langle P|H_n\rangle \;=\; \langle P'|H_{n-1}\rangle = \langle P''|H_{n-2}\rangle \;=\; \cdots \;=\; \langle P^{(n)}|H_0\rangle.$$

Or $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $P^{(n)}=0$ et on a bien : $\boxed{\forall P\in\mathbb{R}_{n-1}[X],\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \langle P|H_n\rangle = 0.}$

13. Soient $i,j\in\{0,\ldots,n\}$ distincts. Supposons par exemple que $i<j$. On a donc $\deg(H_i)=i<j$ et $H_i\in\mathbb{R}_{j-1}[X]$.
D'après la question précédente avec $n=j$ et $P=H_i$ on a : $\langle H_i|H_j\rangle = 0$. Ainsi

$$\boxed{\text{La famille } (H_0,H_1,\ldots,H_n) \text{ est orthogonale.}}$$

14. (a) On reprend le raisonnement de la question **2** avec $P=H_n$.

$$\|H_n\|^2 = \langle H_n|H_n\rangle \;=\; \langle H'_n|H_{n-1}\rangle = \langle H''_n|H_{n-2}\rangle \;=\; \cdots \;=\; \langle H_n^{(n)}|H_0\rangle.$$

Et donc $\boxed{\|H_n\|^2 = \langle H_n^{(n)}|H_0\rangle.}$

(b) On sait que H_n est de degré n et de terme dominant 2^n. Donc $H_n^{(n)} = n!2^n$.
Or $H_0=1$ donc

$$\|H_n\|^2 = \langle H_n^{(n)}|H_0\rangle = n!2^n\langle 1|1\rangle = \sqrt{\pi}n!2^n.$$

On obtient $\boxed{\|H_n\| = \pi^{1/4}\sqrt{n!}\sqrt{2}^n.}$
$(H_0,H_1,\ldots,H_n)$ est une famille orthogonale dont les vecteurs sont non nuls. Ainsi elle est libre.
Comme elle est de cardinal $n+1=\dim(\mathbb{R}_n[X])$, on a bien $\boxed{(H_0,H_1,\ldots,H_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$

Finalement la famille suivante est une base orthonormée.

$$\left(\frac{H_0}{\|H_0\|}, \frac{H_1}{\|H_1\|}, \ldots, \frac{H_n}{\|H_n\|}\right).$$

Partie 4 : un endomorphisme symétrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application f définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = -P'' + 2XP' + P.$$

1. Par propriété des degrés, on a clairement $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ f(P) = -P'' + 2XP' + P \in \mathbb{R}_n[X]$.
   Et par linéarité de la dérivation, f est linéaire. Donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

2. (a) Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned}
\langle P'|Q'\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q'(t)e^{-t^2}dt \\
&= \underbrace{\left[P'(t)Q(t)e^{-t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)(P''(t) - 2tP'(t))e^{-t^2}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)(f(P)(t) - P(t))e^{-t^2}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)f(P)(t)e^{-t^2}dt - \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t^2}dt
\end{aligned}$$

   On a donc démontré $\boxed{\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \langle P'|Q'\rangle = \langle f(P)|Q\rangle - \langle P|Q\rangle.}$

   (b) On a pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\langle f(P)|Q\rangle \ = \ \langle P'|Q'\rangle + \langle P|Q\rangle \ = \ \langle Q'|P'\rangle + \langle Q|P\rangle \ = \ \langle f(Q)|R\rangle \ = \ \langle R|f(Q)\rangle.$$

   Et donc $\boxed{f \text{ est un endomorphisme symétrique de } \mathbb{R}_n[X].}$

3. (a) On a $H_0 = 1$ et $H_1 = 2X$ donc $\boxed{f(H_0) = 1 = H_0 \text{ et } f(H_1) = 6X = 3H_1.}$

   (b) Soit $k \in \{0, \ldots, n\}$. En dérivant l'égalité $H_{k+1} = 2XH_k - H_k'$, on trouve

$$\boxed{H_{k+1}' = 2H_k + 2XH_k' - H_k'' = H_k + f(H_k).}$$

   (c) Le résultat est vrai pour $n = 0$ (et pour $n = 1$).
   Supposons qu'il soit vrai pour un entier $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.
   On a donc $H_{k+1}' = H_k + f(H_k) = (2k+2)H_k$.

$$f(H_{k+1}) = -H_{k+1}'' + 2XH_{k+1}' + H_{k+1} = (2k+2)(-H_k' + 2XH_k) + H_{k+1} = (2k+3)H_{k+1}.$$

   Par le principe de récurrence, on a montré que

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \{0, \ldots, n\}, \text{ on a } f(H_k) = (2k+1)H_k.}$$

   (d) Ainsi, $(H_0, \ldots, H_n)$ est une famille orthogonale formée de vecteurs propres de f. Par suite :

$$\boxed{\left(\frac{H_0}{\|H_0\|}, \frac{H_1}{\|H_1\|}, \ldots, \frac{H_n}{\|H_n\|}\right) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}_n[X] \text{ formée de vecteurs propres de } f.}$$

Exercice 1
E3A PSI 2018

à partir d'un corrigé de Castella

1. On rappelle que si l'on identifie $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$, alors l'application $(X,Y) \mapsto X^TY$ définit le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
   - Montrons (1) $\Rightarrow$ (2).
     On suppose que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^TAX \geqslant 0$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Par définition, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel $AX = \lambda X$. On a alors $X^TAX = \lambda X^TX = \lambda\|X\|^2 \geqslant 0$, et donc $\lambda \geqslant 0$ puisque $\|X\|^2 > 0$.
   - Montrons (2) $\Rightarrow$ (3).
     On suppose que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\lambda \geq 0$.
     Par théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $A = P^T\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)P$, où $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont les valeurs propres (positives) de A. On peut alors poser $B = P^T\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_n})P$, de sorte que $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que $B^2 = A$.
   - Montrons (3) $\Rightarrow$ (1).
     On suppose que il exsite $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A = B^TB$.
     Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^TAX = X^TB^2X = X^TB^TBX = (BX)^TBX = \|BX\|^2 \geqslant 0$, ce qu'on voulait.

   L'équivalence des trois propositions est ainsi démontrée.

2. (a) C'est un **(E1)**...
   La matrice J est symétrique réelle donc elle est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.
   On remarque que $\mathrm{rg}(J) = 1 < n$ donc 0 est valeur propre de J et par le théorème du rang $\dim(E_0(J)) = n-1$.
   Puisque J est diagonalisable, $m_0 = \dim(E_0(J)) = n-1$.
   Il reste donc une valeur propre $\lambda \neq 0$ de multuplicité 1.
   On a $\mathrm{tr}(J) = n = 0 + \cdots + 0 + \lambda$ et finalement :
   $$\mathrm{Sp}(J) = \{0, n\} \text{ avec } m_0 = n-1 \text{ et } m_n = 1.$$
   $E_0(J) = \mathrm{Ker}(J)$ est l'hyperplan d'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$.
   Et $E_n(J) = E_0(J)^\perp$ est la droite dirigée par la colonne $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

   Or pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a manifestement $JX = \lambda X \iff MX = (\alpha+1-\lambda)X$.
   D'où $\mathrm{Sp}(M) = \{\alpha+1, \alpha+1-n\}$, avec $E_{\alpha+1}(M) = E_0(J) = \mathrm{Ker}(J)$ et $E_{\alpha+1-n}(M) = E_n(J) = \mathrm{Vect}\{U\}$.

   (b) Avec la question précédente et en utilisant la caractérisation (ii), on a
   $$M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} \alpha+1-n \geq 0 \\ \alpha+1 \geq 0 \end{cases}$$
   $$\iff \alpha \geqslant n-1$$
   De plus toujours par la question précédente :
   - si $\alpha > n-1$, alors 0 n'est pas valeur propre de M, donc $\mathrm{rg}(M) = n$.
   - si $\alpha = n-1$, alors $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Ker}(J - nI_n)$ est de dimension 1, donc $\mathrm{rg}(M) = n-1$.

   Dans tous les cas, on a donc bien $\boxed{\mathrm{rg}(M) \geqslant n-1.}$

3. (a) Le théorème spectral assure que a est diagonalisable en base orthonormale, d'où l'existence demandée.

   (b) Par définition de b, sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique (et même diagonale). Et comme la base $\mathcal{B}$ est orthonormale, on a bien :
   $$\boxed{b \text{ est un endomorphisme symétrique.}}$$

(c) • Si $\mathrm{Ker}(a) = \{0\}$ alors 0 n'est pas valeur propre de a, et pas non plus de b a fortiori (car $\mathrm{Sp}(b) = \{\sqrt{\lambda}, \lambda \in \mathrm{Sp}(a)\}$). Donc $\mathrm{Ker}(b) = \{0\} = \mathrm{Ker}(a)$.
• Si $\mathrm{Ker}(a) \neq \{0\}$ alors 0 est valeur propre de a, et par construction de b, 0 est aussi valeur propre de b et par construction de b, une base de $E_0(a)$ est aussi une base de $E_0(b)$. On a donc $E_0(a) = E_0(b)$ ou encore

$$\boxed{\mathrm{Ker}(a) = \mathrm{Ker}(b).}$$

4. (a) Remarquons que l'on a $a = b^2$, puisque ces deux endomorphismes coïncident sur la base $\mathcal{B}$ de la question **3(a)**. Ainsi puisque b est symétrique (**3(b)**), on a

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle z_i, z_j\rangle = \langle b(e_i), b(e_j)\rangle \underset{b\in\mathcal{S}(E)}{=} \langle e_i, b^2(e_j)\rangle \underset{a=b^2}{=} \langle e_i, a(e_j)\rangle = a_{i,j}.$$

En particulier, par hypothèse sur A, on a :

$$\text{si } i \neq j, \text{ alors } \langle z_i, z_j\rangle < 0.$$

Remarque. Une famille $(z_1, \dots, z_n)$ d'éléments d'un espace préhilbertien telle que $\forall\, i \neq j$, $\langle z_i, z_j\rangle < 0$ est dite *strictement obtusangle*. Les deux questions ci-dessous montrent qu'une telle famille est de rang $\geqslant n-1$.

i. Posons $I_1 = \{i \in [\![1, n-1]\!] \mid \gamma_i \geqslant 0\}$ et $I_2 = \{i \in [\![1, n-1]\!] \mid \gamma_i < 0\}$, de sorte que I_1 et I_2 forment une partition de $[\![1, n-1]\!]$ telle que $\forall\, i \in I_1$, $\gamma_i = |\gamma_i|$, et que $\forall\, i \in I_2$, $\gamma_i = -|\gamma_i|$.
Alors l'égalité $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \gamma_i z_i = 0_E$ se récrit $\sum\limits_{i\in I_1} |\gamma_i| z_i - \sum\limits_{i\in I_2} |\gamma_i| z_i = 0_E$, ou encore $\sum\limits_{i\in I_1} |\gamma_i| z_i = \sum\limits_{i\in I_2} |\gamma_i| z_i$.
En notant z ce dernier élément, on a $\langle z, z\rangle = \langle \sum\limits_{i\in I_1} |\gamma_i| z_i, \sum\limits_{i\in I_2} |\gamma_i| z_i\rangle = \sum\limits_{(i,j)\in I_1\times I_2} |\gamma_i||\gamma_j|\langle z_i, z_j\rangle$.
Or $\langle z, z\rangle \geqslant 0$ et puisque I_1 et I_2 sont disjoints, on a $\forall\,(i,j) \in I_1 \times I_2$, $\langle z_i, z_j\rangle < 0$, donc $|\gamma_i||\gamma_j|\langle z_i, z_j\rangle \leqslant 0$.
D'où nécessairement $\langle z, z\rangle = 0$, i.e. $z = 0_E$, et ainsi $\sum\limits_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i = \sum\limits_{i\in I_1} |\gamma_i| z_i + \sum\limits_{i\in I_2} |\gamma_i| z_i = z + z = 0_E$.

ii. On a alors $\langle \sum\limits_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i, z_n\rangle = \langle 0_E, z_n\rangle = 0$ mais par linéarité, $\langle \sum\limits_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i, z_n\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| \langle z_i, z_n\rangle$ est une somme de termes négatifs. Donc $\forall\, i \in [\![1, n-1]\!]$, $|\gamma_i|\langle z_i, z_n\rangle = 0$, i.e. $\gamma_i = 0$ puisque $\langle z_i, z_n\rangle < 0$.
On a montré que $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \gamma_i z_i = 0_E \Longrightarrow \forall\, i \in [\![1, n-1]\!]$, $\gamma_i = 0$, i.e. que la famille $(z_1, \dots, z_{n-1})$ est libre.

(b) On vient de montrer que la famille $(b(e_1), \dots, b(e_{n-1}))$ est libre, donc que $\mathrm{rg}(b) \geqslant n-1$. Or par **3.3** et le théorème du rang, on a $\mathrm{rg}(b) = \mathrm{rg}(a)$. Donc $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(A) \geqslant n-1$.

Exercice 2
CCP PSI 2017

Un corrigé de C. Devulder

1. On a

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + t^2$$

Les valeurs propres étant les racines de χ_A, on a : $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{it, -it\}.}$

2. On vérifie par calcul que

$$(I_2 - A)^{-1} = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$R = \frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 1-t^2 & 2t \\ -2t & 1-t^2 \end{pmatrix}$$

Les colonnes de R sont clairement orthogonales. Leur norme vaut 1 (car $(1-t^2)^2 + 4t^2 = (1+t^2)^2$) et donc R est orthogonale. Son déterminant étant égal à 1, on en déduit que

$$\boxed{R \in SO_2(\mathbb{R}).}$$

3. Un calcul permet de vérifier que

$$(I_2 + R_\theta)^{-1} = \frac{1}{2(1+\cos(\theta))} \begin{pmatrix} 1+\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 1+\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Le calcul matriciel donne alors : $\boxed{M = \frac{1}{1+\cos(\theta)} \begin{pmatrix} 0 & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}.}$

Partie II - Matrices antisymétriques et matrices orthogonales

4. On suppose $BC = CB$. En multipliant à gauche et droite par C^{-1}, on obtient $\boxed{C^{-1}B = BC^{-1}.}$
5. On a

$$(AX)^T\overline{X} = (\lambda X)^T\overline{X} = \lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

et par ailleurs, en utilisant le fait que A est réelle,

$$(AX)^T\overline{X} = X^T A^T \overline{X} = -X^T A\overline{X} = -X^T\overline{(AX)} = -\overline{\lambda} X^T\overline{X} = -\overline{\lambda}\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

Comme $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \neq 0$ (car X est non nul) on a $\lambda = -\overline{\lambda}$ ce qui prouve que λ est imaginaire pur. On a ainsi

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) \subset i\mathbb{R}.}$$

6. En particulier, -1 n'est pas valeur propre de A et $I_n + A$ est donc inversible. Comme $I_n - A$ et $I_n + A$ commutent, la question 4 donne

$$(I_n - A)(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$$

On a de plus (puisque $(MN)^T = N^T M^T$ et $(M^{-1})^T = (M^T)^{-1}$)

$$RR^T = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)(I_n + A)(I_n - A)^{-1}$$

Comme $(I_n - A)$ et $(I_n + A)$ commutent, on conclut que $RR^T = I_n$ et donc $\boxed{R \in O_n(\mathbb{R}).}$
7. Par propriétés du déterminant, on a :

$$\det(R) = \frac{\det(I_n - A)}{\det(I_n + A)} = \frac{\chi_A(1)}{(-1)^n \chi_A(-1)}$$

On note k la multiplicité de 0 comme valeur propre de A (éventuellement nulle). On a donc l'existence d'un polynôme Q tel que $\chi_A = X^k Q$ et Q est sans racine réelle. On a alors $Q(1)$ et $Q(-1)$ de même signe et $\det(R)$ est du signe de $(-1)^{n-k}$. Or, $n-k$ est le degré de Q et est donc pair (car Q est un polynôme réel sans racine réelle). $\det(R)$ est donc positif.
Comme R est une matrice orthogonale, $\boxed{\det(R) = 1.}$
8. On a

$$A^T = (I_n - R)((I_n + R)^{-1})^T = (I_n - R^T)(I_n + R^T)^{-1} = (I_n - R^{-1})(I_n + R^{-1})^{-1}$$

Un calcul simple montre que

$$(I_n + R)(I_n - R^{-1}) = I_n + R - R^{-1} - I_n = (R - I_n)(I_n + R^{-1})$$

en multipliant par l'inverse de $(I_n + R^{-1})$ à droite et l'inverse de $(I_n + R)$ à gauche, on en déduit que

$$A^T = (I_n + R)^{-1}(R - I_n) = -A$$

ce qui montre que A est antisymétrique.

9. Dans une base orthonormée directe de premier vecteur orientant et dirigrant l'axe, on connaît la matrice de la rotation r. En notant P la matrice de passage de la base canonique à cette base adaptée, on a $P \in O_3(\mathbb{R})$ (changement de b.o.n.) et

$$P^{-1}RP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$$

Posons $t = \tan(\theta/2)$ (qui existe puisque $\theta \neq 0[\pi]$) et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $C = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$. Un calcul par blocs montre que $I_3 - B$ est inversible et que

$$(I_3 + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (I_2 + C)^{-1} \end{pmatrix}$$

puis que

$$(I_3 + B)^{-1}(I_3 - B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (I_2 + C)^{-1}(I_2 - C) \end{pmatrix}$$

Avec la première partie, on obtient (il faut changer B en $-B$ et donc t en $-t$ et $(I_3 + B)^{-1}$ et $(I_3 - B)$ commutent)

$$(I_3 + B)^{-1}(I_3 - B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-t^2}{1+t^2} & -\frac{2t}{1+t^2} \\ 0 & \frac{2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{pmatrix}$$

Or, $\dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \cos(\theta) = \cos(\theta)$ et $\dfrac{2t}{1+t^2} = \sin(\theta)$ et donc

$$(I_3 + B)^{-1}(I_3 - B) = P^{-1}RP$$

On en déduit que

$$R = P(I_3 + B)^{-1}(I_3 - B)P^{-1} = (I_3 + A)^{-1}(I_3 - A) \quad \text{avec} \quad A = PBP^{-1}$$

On conclut en remarquant que puisque B est antisymétrique et P orthogonale, A est antisymétrique.