Devoir surveillé 4* - Correction

Problème 1
à partir de CCP PC 2010

à partir d'un corrigé de P. Patte

I. Généralités sur la fonction ζ

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$x \in D_\zeta \iff \zeta(x)$ existe $\iff \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^x}$ converge $\iff x > 1$ (Riemann).

Donc $\boxed{D_\zeta =]1, +\infty[.}$

On définit $f_n : x > 1 \longmapsto \frac{1}{n^x} = e^{-x\ln(n)}$ et on applique le théorème de dérivation terme à terme.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a :

$$\forall x \in]1, +\infty[,\ f_n'(x) = \frac{-\ln(n)}{n^x}$$

.

• Soit $a \in]1, +\infty[$. On a alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq 1,\ \forall x > a,\ |f_n'(x)| \leq \frac{\ln(n)}{n^a}$.

Ainsi, $\|f_n'\|_{\infty,[a+\infty[} \leq \frac{\ln(n)}{n^a}$.

Or $\frac{\ln(n)}{n^a} = \frac{\ln(n)}{n^{(a-1)/2}} \frac{1}{n^{(a+1)/2}} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{(a+1)/2}}\right)$ et la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{(a+1)/2}}$ converge (car $(a+1)/2 > 1$).

Donc, par comparaison, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^a}$ converge, et la série $\sum \|f_n'\|_{\infty,[a+\infty[}$ aussi.

Ainsi la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement, donc **uniformément**, sur $[a, +\infty[$.

• **Conclusion :** Par le théorème de dérivation terme à terme, la fonction ζ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur sur tout $[a, +\infty[\subset]1, +\infty[$, elle l'est donc sur $]1, +\infty[$, et on a :

$$\boxed{\forall x > 1\ \zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln(n)}{n^x}.}$$

II. Généralités sur la fonction F

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

• si $x > 0$, alors la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ tend vers 0 en décroissant ; donc la série alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge.

• si $x \leq 0$, la suite $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ diverge (grossièrement).

Et donc $\boxed{F \text{ est définie sur }]0, +\infty[.}$

4. Comme $|-t| < 1$, la série géométrique $\sum (-t)^n$ converge et sa somme vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} (-t)^k = \frac{1}{1-(-t)} = \frac{1}{1+t}$.

Donc $\boxed{\text{la suite } (g_n) \text{ converge simplement vers la fonction } g : t \mapsto \frac{1}{1+t} \text{ sur } [0, 1[.}$

- La suite (g_n) converge simplement vers la fonction g sur $[0,1[$;
- la fonction g et les fonctions $g_n,\ n\in\mathbb{N}$ sont continues (par morceaux) ;
- **Hypothèse de domination** : $\forall t\in[0,1[,\ |g_n(t)| = \left|\dfrac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\right| = \dfrac{1-(-t)^{n+1}}{1+t} \leq \dfrac{2}{1+t} \overset{\text{def}}{=} \phi(t)$; la fonction ϕ est indépendante de n, continue (même sur $[0,1]$) et intégrable sur $[0,1[$.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 g_n\right)$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 g(t)dt$.

Or, $\displaystyle\int_0^1 g_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$, donc $\boxed{F(1) = \displaystyle\int_0^1 g = \Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 = \ln(2).}$

5. $\forall n\geq 1,\ \forall x\geq 2,\ \left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$.

   Or la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge donc, $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \text{ converge normalement sur } [2,+\infty[.}$

   On en déduit qu'elle converge uniformément sur $[2,+\infty[$. Comme, pour tout $n\geq 2$, $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et que, pour $n=1$, $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} = 1$, le théorème de double limite permet d'affirmer que

$$\boxed{F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = 1.}$$

6. *Dérivabilité de F*

   (a) Soit $x>0$. La fonction $h_x : t\mapsto \dfrac{\ln t}{t^x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $h_x'(t) = \dfrac{t^{x-1}(1-x\ln t)}{t^{2x}}$. Donc h_x' est négative sur l'intervalle $[\mathrm{e}^{1/x},+\infty[$ et positive sur $]0,\mathrm{e}^{1/x}]$. Donc h_x est décroissante sur $[\mathrm{e}^{1/x},+\infty[$ et croissante sur $]0,\mathrm{e}^{1/x}]$.

   On en déduit que $\boxed{\text{la suite } \left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geq 1} \text{ est décroissante à partir du rang } \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{1/x}\right)+1.}$

   (b) $f_n : x\mapsto (-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-x\ln n}$ est de $\mathcal{C}^1$ et $f_n'(x) = (-1)^n\dfrac{\ln n}{n^x}$.

   Soit $a>0$. On pose $N_a = \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{1/a}\right)+1$. Pour tout $x\geq a$, la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geq N_a}$ tend vers 0 en décroissant ; donc la série alternée $\displaystyle\sum_{n\geq N_a} f_n'(x)$ converge et, pour $n\geq N_a$, son reste d'ordre n, $\rho_n(x)$, vérifie :

$$|\rho_n(x)| \leq \left|(-1)^{n+1}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x}\right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}.$$

   Donc $\displaystyle\sup_{x\geq a}|\rho_n(x)| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$.

   - Pour tout $n\geq 1$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$;
   - la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et sa somme est F ;
   - la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$.

   D'après le théorème de dérivation terme à terme, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et

$$\boxed{\forall x>0,\ F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n^x}.}$$

III. Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de ζ au voisinage de 1

6. *Lien entre F et ζ*

   Pour $x > 1$, $F(x) - \zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2k)^x} = -2^{1-x} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} = -2^{1-x}\zeta(x)$.

   On en déduit l'égalité : $\boxed{F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x).}$

7. *Développement asymptotique en 1*

   (a) On pose $h = x - 1$. Comme F est dérivable en 1, au voisinage de 1, on a :

   $$F(x) = F(1+h) = F(1) + hF'(1) + o(h) = \ln 2 + hF'(1) + o(h).$$

   On a aussi : $1 - 2^{1-x} = 1 - 2^{-h} = 1 - \mathrm{e}^{-h\ln 2} = h\ln 2 - \dfrac{\ln^2 2}{2}h^2 + o(h^2)$ au voisinage de $x = 1$.

   (b)

   $$\begin{aligned}
   \zeta(x) &= \frac{F(x)}{1 - 2^{1-x}} = \frac{\ln 2 + hF'(1) + o(h)}{h\ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2}h^2 + o(h^2)} = \frac{1}{h\ln 2}\frac{\ln 2 + hF'(1) + o(h)}{1 - \frac{\ln 2}{2}h + o(h)} \\
   &= \frac{1}{h\ln 2}\left(\ln 2 + hF'(1) + o(h)\right)\left(1 + \frac{\ln 2}{2}h + o(h)\right) \\
   &= \frac{1}{h\ln 2}\left(\ln 2 + h\left(F'(1) + \frac{\ln^2 2}{2}\right) + o(h)\right) \\
   &= \frac{1}{h} + \left(\frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2}\right) + o(1)
   \end{aligned}$$

   Et donc $\boxed{\zeta(x) = \dfrac{a}{x-1} + b + o(1) \text{ avec } a = 1 \text{ et } b = \dfrac{F'(1)}{\ln 2} + \dfrac{\ln 2}{2}.}$

8. *Développement asymptotique en 1 (bis)*

   (a) Pour $n \geq 1$ et $x \in [1,2]$, $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[n, n+1]$ (qui est un intervalle de longueur 1), donc $1.\dfrac{1}{(n+1)^x} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq 1.\frac{1}{n^x}$. On en déduit que :

   $$\boxed{0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}.}$$

   (b) Pour $x \in [1,2]$, la suite $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ converge (vers 0) ; comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^x}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right)$ converge. De l'encadrement du (a), on déduit que $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1} v_n(x) \text{ converge.}}$

   (c) Pour $x \in]1,2]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x} - \int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \zeta(x) - \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \zeta(x) - \frac{1}{x-1}$.

   (d) La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ converge simplement sur $[1,2]$. On note $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x)$ le reste d'ordre n de la série. D'après (a), $0 \leq R_n(x) \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x}\right) = \frac{1}{(n+1)^x} - \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k^x} = \frac{1}{(n+1)^x}$.

   Donc $\displaystyle\sup_{x\in[1,2]} |R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1} v_n \text{ converge uniformément sur } [1,2].}$

(e) Pour $x \in]1,2]$, $v_n(x) = \dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{1-x}\left(\dfrac{1}{n^{x-1}} - \dfrac{1}{(n+1)^{x-1}}\right)$; $v_n(1) = \dfrac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n$.

v_n est continue, sauf peut-être en 1.

En 1 : en posant $h = x-1$, $\dfrac{1}{n^x} = \dfrac{1}{n} + o(1)$ par continuité de l'exponentielle $x \mapsto n^{-x}$ en 1 et

$\dfrac{1}{1-x}\left(\dfrac{1}{n^{x-1}} - \dfrac{1}{(n+1)^{x-1}}\right) = \dfrac{1}{h}\left(\mathrm{e}^{-h\ln n} - \mathrm{e}^{-h\ln(n+1)}\right) = \dfrac{1}{h}\Big((1 - h\ln n + o(h)) - (1 - h\ln(n+1) + o(h)\Big) =$ $\ln(n+1) - \ln n + o(1)$; donc $v_n(x) = \dfrac{1}{n} + \ln(n+1) - \ln n + o(1)$.

Donc v_n est continue en 1.

On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ est une série de fonctions continues sur $[1,2]$. La convergence uniforme sur $[1,2]$ entraîne donc la continuité de sa somme sur $[1,2]$.

On en déduit que $\zeta(x) - \dfrac{1}{x-1} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1)\right) + o(1) = \gamma + o(1)$ au voisinage de 1^+. D'où

$$\boxed{\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1) \text{ au voisinage de } 1^+.}$$

9. *Application*

Par unicité du développement limité en 1^+ (éventuellement en multipliant par $(x-1)$), on déduit de 8.(b) et 9.(e) les égalités $a = 1$ et $\dfrac{F'(1)}{\ln 2} + \dfrac{\ln 2}{2} = b = \gamma$. D'où $F'(1) = \ln 2\left(\gamma - \dfrac{\ln 2}{2}\right)$.

D'après **I.**5.(b), $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\ln n}{n} = -F'(1) = \ln 2\left(\frac{\ln 2}{2} - \gamma\right).}$

Problème 2
Autour des matrices de Toeplitz
Centrale PSI 2018 Maths 1 (début)

un corrigé de S. Gonnord

I - Généralités et quelques exemples

I.A - Généralités

Question 1 :

Notons, pour $k \in [\![-(n-1), n-1]\!]$, $D^{(k)}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $D^{(k)}_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Les matrices de Toeplitz sont alors les matrices de la forme

$$t_{-(n-1)}D^{(-(n-1))} + \cdots + t_0 D^{(0)} + \cdots + t_{n-1}D^{(n-1)}$$

avec les t_i décrivant $\mathbb{C}$. Bref : $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$ est l'espace engendré par les $D^{(k)}$. Comme cette famille est clairement libre (prendre une combinaison linéaire libre ; regarder le coefficient $(1, 1+k)$ si $k \geq 0$ et $(1-k, 1)$ sinon...) elle en constitue une base, et il ne reste plus qu'à compter sur ses petits doigts :

$$\boxed{\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C}) \text{ est un sous-espace de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ de dimension } 2n-1.}$$

Question 2 : Supposons que A et B commutent. On a alors $A^2B = A.AB = A.BA = AB.A = BA.A = BA^2$ puis par récurrence immédiate, $AB^k = B^kA$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par distributivité, A commute ensuite avec tout polynôme en B. On peut ensuite retourner l'argument : si $Q \in \mathbb{C}[X]$ alors $Q(B)$ commute avec A d'après ce qui précède, donc avec tout polynôme en A !

$$\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ commutent et } P, Q \in \mathbb{C}[X], \text{ alors } P(A) \text{ et } P(B) \text{ commutent.}}$$

I.B - Cas de la dimension 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ une matrice de Toeplitz de taille 2×2, où (a, b, c) sont des complexes.

Question 3 : Le calcul est sans finesse : $\boxed{\chi_A = (X-a)^2 - bc}$

Question 4 : Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique, c'est-à-dire les λ tels que $(\lambda - a)^2 = bc$.

On évite de sortir les racines de complexes, sauf à vouloir faire rire l'examinateur.

- Si $bc \neq 0$ alors il existe deux complexes dont le carré vaut bc, donc A possède deux valeurs propres donc (dimension) est diagonalisable.
- Si $bc = 0$, alors A possède a comme unique valeur propre. Elle est donc diagonalisable si et seulement si elle est semblable à aI_2, donc **égale** à aI_2, ce qui est vrai si et seulement si $b = c = 0$.

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable si et seulement si } b \text{ et } c \text{ sont tous les deux non nuls ou tous les deux nuls.}}$$

Réduction d'une matrice sous forme de Toeplitz

Question 5 : Discutons (bien entendu) sur le nombre de valeurs propres de A. Puisque le corps de base est $\mathbb{C}$ il y en a au moins une, et puisque qu'on est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, il y en a au plus 2.

- Si A possède deux valeurs propres $\alpha \neq \beta$, alors A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.
- Si A possède une seule valeur propre α, on se contente de trigonaliser A (rappel : c'est possible car on est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$), et A est bien semblable à une matrice triangulaire supérieure avec sur la diagonale l'unique valeur propre.

$$\boxed{\text{Toute matrice de } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \text{ est semblable à une matrice de la forme } \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ (avec } \alpha \neq \beta) \text{ ou } \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}}$$

Question 6 : La question précédente nous invite à ne traiter que les deux matrices de la conclusion précédente (si A et B sont semblables ainsi que B et C, alors A et C sont semblables [1]).

- La deuxième $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ est directement une matrice de Toeplitz.
- La première a pour polynôme caractéristique $(X-\alpha)(X-\beta) = \cdots = \left(X - \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \gamma$,

  avec $\gamma = \left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \alpha\beta$. Considérons alors $\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} & \gamma \\ 1 & \frac{\alpha+\beta}{2} \end{pmatrix}$: cette matrice est de Toeplitz et a pour polynôme caractéristique $\left(X - \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \gamma = (X-\alpha)(X-\beta)$, donc $(\alpha \neq \beta)$ est diagonalisable, et même semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$; c'est ce qu'on voulait montrer.

$$\boxed{\text{Toute matrice de } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \text{ est semblable à une matrice de Toeplitz.}}$$

I.C - Un autre cas particulier : les matrices tridiagonales

Question 7 : La relation $AX = \lambda X$ fournit n équations scalaires. La première et la dernière sont respectivement $ax_1 + bx_2 = \lambda x_1$ et $cx_{n-1} + ax_n = \lambda x_n$; les autres sont, pour $i \in [\![2, n-1]\!]$: $cx_{i-1} + ax_i + bx_{i+1} = \lambda x_i$. En ayant posé $x_0 = x_{n+1} = 0$, les deux équations aux bords s'unifient à l'équation générique, à savoir $(k = i-1)$:

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \qquad bx_{k+2} + (a-\lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$$

Il reste à noter que la famille finie $(x_0, ..., x_{n+1})$ s'étend en une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant la récurrence souhaitée, en posant pour tout $k \geq n$: $x_{k+2} = \dfrac{1}{b}\left((\lambda - a)x_{k+1} - bx_k\right)$ (on avait bien entendu noté que la condition $bc \neq 0$ impose $b \neq 0$...)

1. On peut aussi plisser les yeux et dire que la relation de similitude est transitive...

Question 8 : Il s'agit évidemment de discuter selon le nombre de racines.

- Si (I.1) possède deux racines $r_1 \neq r_2$, alors il existe $K_1, K_2 \in \mathbb{C}$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k = K_1 r_1^k + K_2 r_2^k$.
- Si (I.1) possède une racine double r_0, alors il existe $K_1, K_2 \in \mathbb{C}$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k = (K_1 + K_2 k) r_0^k$.

$$\boxed{\text{Et on vient de montrer qu'on se souvient du cours de première année.}}$$

Question 9 : Supposons par l'absurde que $(*)$ possède une unique racine r_0. Avec les notations précédentes, la condition $x_0 = 0$ donne $K_1 = 0$; la condition $x_{n+1} = 0$ fournit alors $K_2 r_0^{n+1} = 0$. On s'inquiète alors de la nullité éventuelle de r_0. Mais 0 n'est pas solution de $(*)$ (car $c \neq 0$), donc $r_0 \neq 0$, puis $K_2 = 0$. On a alors tous les x_i nuls, donc X aussi, ce qui n'est pas raisonnable pour un vecteur propre.

$$\boxed{(*) \text{ possède deux racines distinctes.}}$$

Question 10 : On a déjà vu que 0 n'est pas racine de $(*)$, donc r_1 et r_2 sont non nuls. Ensuite, les conditions $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$ fournissent successivement (avec les notations vues plus haut) : $K_2 = -K_1$, puis $K_1(r_1^{n+1} - r_2^{n+1}) = 0$. Puisque $X \neq 0$, on a $K_1 \neq 0$, donc $r_1^{n+1} = r_2^{n+1}$ puis : $\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} = 1$.

$$\boxed{r_1 \text{ et } r_2 \text{ sont non nuls et } \frac{r_1}{r_2} \in \mathbb{U}_{n+1}.}$$

Question 11 : Si par malheur on a oublié son cours de terminale/sup/spé/whatever, ça doit pouvoir se retrouver, en partant de la factorisation d'un polynôme (et pas d'un réel, bien entendu...) dont on connaît le coefficient dominant et les racines :

$$bX^2 + (a - \lambda)X + c = b(X - r_1)(X - r_2) = bX^2 - b(r_1 + r_2)X + br_1r_2,$$

et en identifiant les coefficients de ces polynômes (et toujours grâce au fait que $b \neq 0$) :

$$\boxed{r_1 + r_2 = \frac{\lambda - a}{b} \text{ et } r_1 r_2 = \frac{c}{b}.}$$

Puisque $\dfrac{r_1}{r_2} \in \mathbb{U}_{n+1}$, il existe $\ell \in [\![0, n]\!]$ tel que $r_1 = r_2 \mathrm{e}^{2i\ell\pi/(n+1)}$; le produit $r_1 r_2$ vaut alors d'une part $r_1^2 \mathrm{e}^{-2i\ell\pi/(n+1)}$ et d'autre part $\dfrac{c}{b}$, donc :

$$r_1^2 = \frac{c}{b}\mathrm{e}^{2i\ell\pi/(n+1)} = \frac{bc}{b^2}\mathrm{e}^{2i\ell\pi/(n+1)} = \left(\frac{\rho_0}{b}\mathrm{e}^{i\ell\pi/(n+1)}\right)^2,$$

où on a choisi ρ_0 un complexe dont le carré vaut bc (et un tel complexe existe bien). Il existe donc $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $r_1 = \varepsilon \dfrac{\rho_0}{b}\mathrm{e}^{i\ell\pi/(n+1)}$. On a alors :

$$\lambda = a + b(r_1 + r_2) = a + \varepsilon\rho_0 \underbrace{\left(\mathrm{e}^{i\ell\pi/(n+1)} + \mathrm{e}^{-i\ell\pi/(n+1)}\right)}_{2\cos(\ell\pi/(n+1))},$$

et il reste à poser $\rho = \varepsilon\rho_0$ (dont le carré vaut toujours bc). Remarquons enfin que $r_2 \neq r_1$, donc $\dfrac{r_1}{r_2} \neq 1$ donc $\ell \neq 0$.

$$\boxed{\text{Il existe } \ell \in [\![1, n]\!] \text{ et } \rho \in \mathbb{C} \text{ tels que } \rho^2 = bc \text{ et } \lambda = a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)}$$

Question 12 : Avec les notations précédentes,

$$x_k = K_1(r_1^k - r_2^k) = K_1\left(\left(\frac{\varepsilon\rho_0}{b}\mathrm{e}^{i\ell\pi/(n+1)}\right)^k - \left(\frac{\varepsilon\rho_0}{b}\mathrm{e}^{-i\ell\pi/(n+1)}\right)^k\right) = K_1\frac{\rho^k}{b^k}\underbrace{\left(\mathrm{e}^{i\ell k\pi/(n+1)} - \mathrm{e}^{-i\ell k\pi/(n+1)}\right)}_{=2i\sin(\ell k\pi/(n+1))}.$$

$$\boxed{\text{Il existe } \alpha \in \mathbb{C} \text{ tel que pour tout } k \in [\![0, n+1]\!],\ x_k = 2i\alpha\frac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right).}$$

Question 13 : Il s'agit de faire la synthèse, en fixant ρ de carré bc puis en montrant que pour tout $\ell \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_\ell = a + 2\rho\cos\left(\dfrac{\ell\pi}{n+1}\right)$ est effectivement valeur propre de A $(= A_n(a,b,c))$.
On fixe donc un tel ℓ, et une géniale intuition nous conduit à définir

$$x_k = 2i\frac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)$$

pour $0 \leq k \leq n+1$, considérer le vecteur $X = (x_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et essayer de montrer que X est vecteur propre pour la valeur propre λ_ℓ. Tout d'abord, X est non nul[2] ; il s'agit alors de vérifier : $AX = \lambda_\ell X$.
Cette équation est équivalente (grâce aux valeurs aux bords) aux n équations $bx_{k+2} + (a-\lambda_\ell)x_{k+1} + cx_k = 0$ $(0 \leq k \leq n-1)$. Mais $x_k = \left(\underbrace{\dfrac{\rho e^{i\ell\pi/(n+1)}}{b}}_{t_1}\right)^k - \left(\underbrace{\dfrac{\rho e^{-i\ell\pi/(n+1)}}{b}}_{t_2}\right)^k$ avec $t_1t_2 = \dfrac{\rho^2}{b^2} = \dfrac{c}{b}$ et $t_1 + t_2 = \dfrac{2\rho\cos(\ell\pi/(n+1))}{b} = \dfrac{\lambda_l - a}{b}$, donc $b(X-t_1)(X-t_2) = bX^2 + (a-\lambda_\ell)X + c$, donc t_1 et t_2 sont les racines (oui, elles sont différentes) de (I.1), donc la relation de récurrence souhaitée est bien vérifiée, ce qui achève la synthèse : les λ_ℓ sont toutes valeurs propres de A.
Il reste tout de même à noter que lorsque $\ell \in [\![1,n]\!]$, on a $\dfrac{\ell\pi}{n+1} \in [0,\pi]$, intervalle sur lequel la fonction cos est injective, donc les λ_ℓ sont distincts.

$$\boxed{A(a,b,c) \text{ est diagonalisable avec } n \text{ valeurs propres distinctes : } a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right), \text{ pour } 1 \leq \ell \leq n.}$$

II - Matrices circulantes

Question 14 : Chaque multiplication par M_n « remonte les diagonales »(ou les décale vers la droite) :

$$\boxed{M_n^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \end{pmatrix}, \ldots M_n^n = I_n.}$$

Pour les grincheux, M_n^k est constitué de zéros, sauf en les positions $(i, i+k)$ (pour $1 \leq i \leq n-1-k$) et $(i-k, i)$ (pour $i+1 \leq k \leq n$) où il y a des 1.
La question 30 donnera l'occasion de « prouver »ce genre de choses.
La relation $M_n^n = I_n$ fournit pour le même prix :

$$\boxed{M_n \text{ est inversible (d'inverse } M_n^{n-1} = {}^tM_n) \text{ et } X^n - 1 \text{ est un polynôme annulateur de } M_n.}$$

Question 15 : Puisqu'on travaille sur $\mathbb{C}$, $X^n - 1$ est scindé à racines simples (les n racines $n$èmes de l'unité) donc :

$$\boxed{M_n \text{ est diagonalisable.}}$$

Ensuite, on peut calculer le polynôme caractéristique de M_n en développant par rapport à la première colonne : $\chi_{M_n} = X^n - 1$ (ce n'est pas très surprenant, sans être évident : une matrice diagonalisable peut avoir des polynômes annulateurs de degré n qui ne sont pas le polynôme caractéristique). Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M_n) = \mathbb{U}_n = \{1, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}\}}$$

2. Je fais le pari que sur beaucoup de copies il aura été question de $x_k = 2i\alpha\dfrac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\dfrac{\ell k\pi}{n+1}\right)$ avec hélas α potentiellement nul...

Pour obtenir des vecteurs propres, on peut résoudre $M_nX = \omega_n^k X$, ou bien regarder la question suivante, et être pris d'une furieuse envie de considérer (pour $0 \leq k \leq n-1$) $X_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_n^k \\ \omega_n^{2k} \\ \vdots \\ \omega_n^{(n-1)k} \end{pmatrix}$: il vérifie $M_nX_k = \omega_n^k X_k$! (Et bien entendu il est non nul).

$$\boxed{(X_k)_{0\leq k\leq n-1} \text{ constitue une base de vecteurs propres de } M_n.}$$

Ben oui c'est une base : n vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes, en dimension n.

Question 16 : Bien entendu, Φ_n est la matrice dont les colonnes sont les X_k. Il s'agit donc de la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ vers la base de diagonalisation vue plus haut. On a alors directement :

$$\boxed{\Phi_n^{-1} M_n \Phi_n = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \omega_n & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \omega_n^{n-1} \end{pmatrix}}$$

Question 17 : D'après la valeur de M_n^k :

$$T(t_1, t_2, ..., t_{n-1}, t_0, t_1, ..., t_{n-1}) = t_0 I_n + t_1 M_n + t_2 M_n^2 + \cdots t_{n-1} M_n^{n-1}$$

$$\boxed{\text{Avec les notations précédentes, il suffit donc de prendre } P = t_0 + t_1 X + \cdots + t_{n-1} X^{n-1}}$$

Question 18 : Écrivons la division euclidienne de $P \in \mathbb{C}[X]$ par $X^n - 1$: $P = (X^n - 1)Q + R$ avec $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. On a alors :

$$P(M_n) = \underbrace{(M_n^n - I_n)}_{=0} Q(M_n) + R(M_n);$$

et on a vu à la question précédente que $R(M_n)$ est une matrice circulante.

$$\boxed{\text{Si } P \in \mathbb{C}[X], \text{ alors } P(M_n) \text{ est une matrice circulante.}}$$

Question 19 : En combinant les faits suivants :

- toute matrice circulante est de la forme $P(M_n)$;
- $\lambda P_1(M_n) + P_2(M_n) = (\lambda P_1 + P_2)(M_n)$;
- $P_1(M_n)P_2(M_n) = (P_1P_2)(M_n)$;
- toute matrice de la forme $P(M_n)$ est circulante...

on obtient le fait que l'ensemble des matrices circulantes est stable par combinaison linéaire et produit ; il contient par ailleurs la matrice nulle et est inclus dans $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$ par définition.
Enfin, ${}^t(P(M_n)) = P({}^tM_n) = P(M_n^{n-1}) = Q(M_n)$ avec $Q = P(X^{n-1})$, ce qui nous donne la stabilité par transposition.

$$\boxed{\text{Les matrices circulantes constituent un sous-espace de } \mathrm{Toep}_n(\mathbb{C}) \text{ stable par produit et transposition.}}$$

Question 20 : Puisque $M_nX_k = \omega_n^k X_k$, on a $M_n^2 X_k = \omega_n^{2k} X_k$, puis $M_n^r X_k = \omega_n^{rk} X_k$ et enfin (pour $P \in \mathbb{C}[X]$) :

$$P(M_n)X_k = P(\omega_n^k)X_k$$

La famille $(X_0, ..., X_{n-1})$ est donc une base de vecteurs propres pour la matrice circulante $P(M_n)$, associée aux valeurs propres $\left(P(\omega_n^k)\right)_{0\leq k\leq n-1}$.

$$\boxed{\text{Toute matrice circulante est diagonalisable.}}$$