Devoir surveillé 4*

le mercredi 6 décembre (14h-18h)

Les calculatrices, les téléphones portables et objets connectés (montres...) ne sont pas autorisés.

Problème 1

On note F la fonction zeta alternée de Riemann, définie par $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$,

et ζ la fonction zeta de Riemann, définie par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Ce problème propose une étude croisée de quelques propriétés de F et ζ.

I. Question de cours

1. Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction zeta de Riemann définie ci-dessus, montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et exprimer $\zeta'(x)$ à l'aide d'une série.

II. Généralités sur la fonction F

2. Déterminer l'ensemble de définition de F.
3. On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ définies sur $[0,1[$ par $g_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-t)^k$.
   (a) Déterminer la limite simple g de $(g_n)_{n\geq 1}$ puis, en utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que :
   $$F(1) = \int_0^1 g(t)\ \mathrm{d}t.$$
   (b) En déduire la valeur de $F(1)$.
4. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[2,+\infty[$.
   En déduire la limite de F en $+\infty$.
5. *Dérivabilité de F*
   (a) Soit $x > 0$. Étudier les variations sur $]0,+\infty[$ de la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}$ et en déduire que la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ est monotone à partir d'un certain rang (dépendant de x) que l'on précisera.
   (b) Pour $n \geq 1$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.
   Si a est un réel strictement positif, démontrer que la série des dérivées $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$. En déduire que F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

III. Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de ζ au voisinage de 1

6. *Lien entre F et ζ*
   Calculer, pour $x > 1$, $F(x) - \zeta(x)$ en fonction de x et de $\zeta(x)$.
   En déduire que pour $x > 1$, $F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$.

7. *Développement asymptotique en 1*

   (a) Écrire en fonction de $\ln(2)$ et de $F'(1)$ le développement limité à l'ordre 1 et au voisinage de 1 de la fonction F, puis déterminer le développement limité à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de la fonction $x \longmapsto 1 - 2^{1-x}$.

   (b) En déduire deux réels a et b, qui s'écrivent éventuellement à l'aide de $\ln(2)$ et $F'(1)$, tels que l'on ait, pour x au voisinage de 1^+ :
$$\zeta(x) = \frac{a}{x-1} + b + \underset{x\to 1^+}{o}(1).$$

8. *Développement asymptotique en 1 (bis)*

   On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$, où v_n est définie sur $[1,2]$ par
$$\forall x \in [1,2], \quad v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

   (a) Justifier que, pour $n \geq 1$ et $x \in [1,2]$, on a : $0 \leq v_n(x) \leq \dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{(n+1)^x}$.

   (b) Justifier que, pour $x \in [1,2]$, la série $\sum_{n\geq 1} v_n(x)$ converge.

   On note alors $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1)$ (c'est la constante d'Euler).

   (c) Exprimer, pour $x \in]1,2]$, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ à l'aide de $\zeta(x)$ et $1-x$.

   (d) Démontrer que la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge uniformément sur $[1,2]$.

   On pourra utiliser 11(a) pour majorer les restes partiels de la série.

   (e) En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ est continue en 1, et que, pour x au voisinage de 1^+, on a :
$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + \underset{x\to 1^+}{o}(1).$$

9. *Application*

   Déduire des résultats précédents une expression, à l'aide de $\ln 2$ et γ, de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\ln n}{n}$.

Problème 2

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un entier naturel supérieur ou égal à 2, $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a \leq b$, $[\![a,b]\!]$ désigne l'ensemble $\{a, a+1, \ldots, b-1, b\}$. $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si $(t_{-n+1}, \ldots, t_0, \ldots, t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1}$, on note $T(t_{-n+1}, \ldots, t_0, \ldots, t_{n-2}, t_{n-1})$ la matrice
$$T(t_{-n+1}, \ldots, t_0, \ldots, t_{n-2}, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & \cdots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \ddots & & \vdots \\ t_{-2} & t_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 & t_2 \\ \vdots & & \ddots & t_{-1} & t_0 & t_1 \\ t_{-n+1} & \cdots & \cdots & t_{-2} & t_{-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

Une telle matrice est appelée *matrice de Toeplitz* d'ordre n. On nomme $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de Toeplitz d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$:
$$\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exists (t_{-n+1}, \ldots, t_0, \ldots, t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1},\ M = T(t_{-n+1}, \ldots, t_0, \ldots, t_{n-2}, t_{n-1})\}$$

Une matrice N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0$. On admettra qu'une telle matrice vérifie $N^n = 0$.
Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique défini par $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$.
Si $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p$ ($p \in \mathbb{N}$) est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $P(M)$ désigne la matrice

$$P(M) = a_0I_n + a_1M + \cdots + a_pM^p$$

Le but de ce problème est l'étude de certaines propriétés des matrices de Toeplitz. La partie I traite de généralités sur les matrices de Toeplitz et de quelques exemples. La partie II, indépendante de la partie I, étudie un type particulier de matrices de Toeplitz — les matrices circulantes — en s'intéressant à leur structure et à leur diagonalisabilité. Enfin, la partie III, indépendante des précédentes, aborde l'étude des matrices cycliques et les relie aux matrices de Toeplitz.

I - Généralités et quelques exemples

I.A - Généralités

Question 1 : Montrer que $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
En donner une base et en préciser la dimension.

Question 2 : Montrer que si deux matrices A et B commutent ($AB = BA$) et si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, alors $P(A)$ et $Q(B)$ commutent.

I.B - Cas de la dimension 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ une matrice de Toeplitz de taille 2×2, où (a, b, c) sont des complexes.

Question 3 : Donner le polynôme caractéristique de A.

Question 4 : Discuter, en fonction des valeurs de (a, b, c), de la diagonalisabilité de A.

Réduction d'une matrice sous forme de Toeplitz

Question 5 : Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que M est semblable à une matrice de type $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ou de type $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, où α, β et γ sont des complexes avec $\alpha \neq \beta$.

Question 6 : En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de Toeplitz.

I.C - Un autre cas particulier : les matrices tridiagonales

Une matrice tridiagonale est une matrice de Toeplitz de la forme $T(0, \ldots, 0, t_{-1}, t_0, t_1, 0, \ldots, 0)$, i.e. une matrice de la forme

$$A_n(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & & (0) \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{pmatrix}$$

où (a, b, c) sont des complexes.
On fixe (a, b, c) trois nombres complexes tels que $bc \neq 0$. On se propose de chercher les éléments propres de $A_n(a, b, c)$.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A_n(a, b, c)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé.

Question 7 : Montrer que si l'on pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$, alors $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les termes de rang variant de 1 à n d'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 0$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad bx_{k+2} + (a - \lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$$

Question 8 : Rappeler l'expression du terme général de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en fonction des solutions de l'équation

$$bx^2 + (a-\lambda)x + c = 0 \qquad (*)$$

Question 9 : À l'aide des conditions imposées à x_0 et x_{n+1}, montrer que $(*)$ admet deux solutions distinctes r_1 et r_2.

Question 10 : Montrer que r_1 et r_2 sont non nuls et que r_1/r_2 appartient à $\mathbb{U}_{n+1}$.

Question 11 : En utilisant l'équation $(*)$ satisfaite par r_1 et r_2, déterminer r_1r_2 et r_1+r_2.
En déduire qu'il existe un entier $\ell \in [\![1,n]\!]$ et un nombre complexe ρ vérifiant $\rho^2 = bc$ tels que

$$\lambda = a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)$$

Question 12 : En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout k dans $[\![0,n+1]\!]$, $x_k = 2\mathrm{i}\alpha\dfrac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\dfrac{\ell k\pi}{n+1}\right)$.

Question 13 : Conclure que $A_n(a,b,c)$ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

II - Matrices circulantes

Une matrice *circulante* est une matrice de Toeplitz $T(t_{-n+1},\dots,t_0,\dots,t_{n-2},t_{n-1})$, pour laquelle

$$\forall k \in [\![1,n-1]\!], \quad t_k = t_{-n+k}$$

Elle est donc de la forme

$$T(t_1,t_2,\dots,t_0,t_1,\dots,t_{n-2},t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} \\ t_{n-1} & t_0 & \ddots & & t_{n-2} \\ t_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 \\ t_1 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

On pose $M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et $\omega_n = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$.

Question 14 : Calculer $M_n^2,\dots,M_n^n$.
Montrer que M_n est inversible et donner un polynôme annulateur de M_n.

Question 15 : Justifier que M_n est diagonalisable.
Préciser ses valeurs propres (exprimées à l'aide de ω_n) et donner une base de vecteurs propres de M_n.

Question 16 : On pose $\Phi_n = (\omega_n^{(p-1)(q-1)})_{1\le p,q\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Justifier que Φ_n est inversible et donner sans calcul la valeur de la matrice $\Phi_n^{-1}M_n\Phi_n$.

Question 17 : Soit A une matrice circulante. Donner un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P(M_n)$.

Question 18 : Réciproquement, si $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer, à l'aide d'une division euclidienne de P par un polynôme bien choisi, que $P(M_n)$ est une matrice circulante.

Question 19 : Montrer que l'ensemble des matrices circulantes est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$, stable par produit et par transposition.

Question 20 : Montrer que toute matrice circulante est diagonalisable.
Préciser ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.