# Devoir surveillé 3*

*le mercredi 15 novembre (14h-18h)*

**Les calculatrices, les téléphones portables et objets connectés (montres...) ne sont pas autorisés.**

## Problème 1 (Bases de Lagrange)

Dans ce problème, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on note $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à $n-1$. On note $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^{n-1})$ la base canonique de $E$.

On se donne également $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ un $n-$uplet de réels tels que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

**1.** Montrer que l'application $\varphi : P \longmapsto (P(a_1), \ldots, P(a_n))$ est un isomorphisme de $E$ dans $\mathbb{R}^n$.

**2.** On note $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on pose $L_i = \varphi^{-1}(e_i)$.

(a) Justifier que $\mathcal{B}' = (L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $E$.

(b) Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, déterminer $L_j(a_i)$.

(c) Soit $P \in E$, déterminer les coordonnées de $P$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Dans toute la suite, on note $M = [m_{i,j}]_{i,j \in [\![1,n]\!]}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

**3.** Un premier exemple : dans cette question, on suppose que $n = 3$ et on pose $a_1 = 0, a_2 = 1$ et $a_3 = 3$.

(a) En utilisant 2(b), déterminer les polynômes $L_1, L_2$ et $L_3$, puis écrire la matrice $M$.

(b) Montrer que 1 est valeur propre de $M$ et déterminer son sous-espace propre associé.

(c) Si $P(X) = a + bX + cX^2 = a'L_1(X) + b'L_2(X) + c'L_3(X)$, donner une relation entre $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et $M$.

(d) En déduire tous les polynômes $P$ de $\mathbb{R}_2[X]$ tels que $P(X) = P(0) + P(1)X + P(3)X^2$.

**4. On revient au cas général**.

(a) On rappelle que $M = [m_{i,j}]_{i,j \in [\![1,n]\!]}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
Justifier que $M$ est inversible et déterminer son inverse.

(b) Que valent $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i(X)$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i L_i(X)$ ?

(c) Pour $j \in [\![1, n]\!]$, appliquer la formule de Taylor en 0 au polynôme $L_j(X)$. En déduire une expression de $m_{i,j}$ en fonction des dérivées successives de $L_j$.

(d) Montrer alors que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{1,j} = 1$ puis, que pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 0$.

**5. Un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.**

Dans cette partie, on considère l'application linéaire : $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \boxed{\mathbb{R}[X]} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ P & \longmapsto & (P(a_1), \ldots, P(a_n)) \end{array} \right.$

(a) Déterminer un polynôme $P_0$ de degré $n$ tel que $\mathrm{Ker}(\psi) = \{P_0 \times Q,\ Q \in \mathbb{R}[X]\}$.

(b) Montrer que $\mathrm{Ker}(\psi)$ et $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

(c) On considère l'endomorphisme $f$ de $E = \mathbb{R}[X]$ défini par : $\forall P \in E, \quad f(P) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i$.

Démontrer que $f$ est un projecteur et donner ses éléments caractéristiques.

**Problème 2**

**Notations et rappels**

Dans tout le problème, $n$ est un entier naturel non nul. On identifie un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et la matrice colonne à $n$ lignes formée de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. L'élément nul de $\mathbb{R}^n$ est noté $0_{\mathbb{R}^n}$.

L'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'ensemble des matrices inversibles d'ordre $n$ est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On désigne par $I_n$ la matrice identité d'ordre $n$ et par $0_n$ la matrice nulle d'ordre $n$

Pour toute matrice $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle image de $M$, notée $\operatorname{Im} M$ l'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $M$ et on appelle noyau de M, noté $\ker M$, le noyau de cet endomorphisme.

Pour toute matrice $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ sa transposée, $\det(M)$ son déterminant, $\mathrm{rg}(M)$ son rang, $\mathrm{tr}(M)$ sa trace, $\chi_M$ son polynôme caractéristique et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres complexes. On rappelle que $M$ et $M^\top$ ont le même rang et le même déterminant.

On note $\mathcal{T}$ la transposition dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'application qui à toute matrice $M$ associe $M^\top$.

Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ sont deux bases de $\mathbb{R}^n$ et si $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ la matrice dont, pour tout entier $j \in [\![1, n]\!]$, la $j$-ième colonne est formée des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Lorsque $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on simplifie la notation $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ en $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ qui désigne la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, de l'endomorphisme $f$. On définit la suite des puissances de $f$ en posant

$$\begin{cases} f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}, \\ \forall k \in \mathbb{N}, \qquad f^{k+1} = f \circ f^k. \end{cases}$$

Si $\Pi = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, on rappelle que $\Pi(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k f^k$.

Lorsque $M_1, \ldots, M_k$ désignent des matrices carrées d'ordres respectifs $n_1, \ldots, n_k$, on note $\mathrm{diag}\,(M_1, \ldots, M_k)$ la matrice carrée d'ordre $n_1 + \ldots + n_k$, diagonale par blocs, égale à

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & M_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_k \end{pmatrix}.$$

On dit qu'un endomorphisme $\Phi$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- conserve le rang si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{rg}\left(\Phi(M)\right) = \mathrm{rg}(M)$ ;
- conserve le déterminant si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det\left(\Phi(M)\right) = \det(M)$ ;
- conserve la trace si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}\left(\Phi(M)\right) = \mathrm{tr}(M)$ ;
- conserve le polynôme caractéristique si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\chi_{\Phi(M)} = \chi_M$.

L'objectif du problème est de caractériser les endomorphismes réalisant l'une de ces propriétés.

# I Résultats préliminaires

***I.A*** – On suppose que $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont trois bases de $\mathbb{R}^n$ et que $f$ et $g$ sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

1. *Question de cours.* Démontrer que

$$\mathrm{M}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(g \circ f) = \mathrm{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g)\mathrm{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f).$$

2. En déduire qu'il existe deux matrices $P$ et $Q$ appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathrm{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(f) = P\mathrm{M}_{\mathcal{E}}(f)Q.$$

***I.B –*** On suppose que $M$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $M$ et $X$ un vecteur propre associé. Montrer que, pour tout entier naturel $k$, $M^k X = \lambda^k X$.

4. En déduire que, si $\Pi \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme annulateur de $M$, alors toute valeur propre complexe de $M$ est une racine dans $\mathbb{C}$ de $\Pi$.

# II Étude de quelques endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

***II.A – Multiplication à gauche par une matrice donnée***

L'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\Gamma_A$ l'application

$$\Gamma_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$$

5. Vérifier que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\Gamma_A$ appartient à $\mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)$.

6. Démontrer que, si $A$ appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $\Gamma_A$ conserve le rang.

7. Démontrer que l'application

$$\Gamma : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big) \\ A & \mapsto & \Gamma_A \end{array} \right.$$

est linéaire et injective.

Dans la suite de cette sous-partie II.A, $A$ est un élément fixé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

8. Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\Gamma_{A^k} = (\Gamma_A)^k$.

9. En déduire que, pour tout polynôme $\Pi$ de $\mathbb{R}[X]$, $\Gamma_{\Pi(A)} = \Pi\left(\Gamma_A\right)$.

10. À l'aide du résultat précédent, démontrer que $A$ est diagonalisable si et seulement si $\Gamma_A$ est diagonalisable.

11. Démontrer que $\chi_A$ est un polynôme annulateur de $\Gamma_A$ et que $\chi_{\Gamma_A}$ est un polynôme annulateur de $A$.

12. En déduire que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\left(\Gamma_A\right) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

***II.B – Multiplication à gauche et à droite par des matrices inversibles avec ou sans transposition préalable***

Pour toutes matrices $P$ et $Q$ appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on considère les applications

$$\Phi_{P,Q} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & PMQ \end{array} \right.$$

$$\Psi_{P,Q} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & PM^\top Q \end{array} \right.$$

On admet que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ sont des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ \Phi_{P,Q} \mid (P,Q) \in \big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\big)^2 \right\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}_2 = \left\{ \Psi_{P,Q} \mid (P,Q) \in \big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\big)^2 \right\}.$$

13. Démontrer que $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ est stable par composition, c'est-à-dire que

$$\forall \left(\Theta, \Theta'\right) \in \left(\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2\right)^2, \qquad \Theta \circ \Theta' \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2.$$

**II.B.1)** Soient $P$ et $Q$ deux matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

14. Montrer que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ sont des automorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser leurs applications réciproques.

15. Montrer que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ conservent le rang.

16. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $P$ et $Q$ pour que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ conservent le déterminant.

17. Montrer que $\Phi_{P,P^{-1}}$ et $\Psi_{P,P^{-1}}$ conservent le polynôme caractéristique.

**II.B.2)** Dans cette section, on prend $n \geq 2$.

18. Montrer que $\mathcal{T} \in \mathcal{L}_2$ et $\mathcal{T} \notin \mathcal{L}_1$.

19. En déduire que les ensembles $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont disjoints.

# III Endomorphismes de rang donné

On suppose que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Son noyau est noté $\ker(f)$.

***III.A*** – On suppose dans cette sous-partie que $f$ est un isomorphisme. On se donne une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{B}'$ la base

$$\mathcal{B}' = \big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big).$$

20. Déterminer $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

***III.B*** – On suppose dans cette sous-partie que $f$ n'est pas l'endomorphisme nul et que $\ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
Soit $\mathcal{B}_2$ une base de $\ker(f)$, que l'on complète (à gauche) en une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_k, \mathcal{B}_2)$ de $\mathbb{R}^n$.

21. Montrer que la famille $\big(f(e_1), \ldots, f(e_k)\big)$ est libre.

22. Justifier que $k < n$.

    On complète la famille $\big(f(e_1), \ldots, f(e_k)\big)$ en une base $\mathcal{B}' = \big(f(e_1), \ldots, f(e_k), f_{k+1}, \ldots, f_n\big)$ de $\mathbb{R}^n$.

23. Déterminer $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

***III.C*** – Dans toute la suite du problème, pour tout entier entier naturel $r \in [\![0, n]\!]$, on note

$$J_{n,r} = \operatorname{diag}\left(I_r, 0_{n-r}\right)$$

en convenant que $J_{n,n} = I_n$ et $J_{0,n} = 0_n$.
Soit $M$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang $r$.

24. Montrer qu'il existe deux matrices $P$ et $Q$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$M = \Phi_{P,Q}\left(J_{n,r}\right).$$

***III.D*** – On suppose dans cette sous-partie que $n = 2$ et que $A$ et $B$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de rang 1.
On suppose que $\operatorname{Im} A$ et $\operatorname{Im} B$ sont distinctes.

25. Montrer qu'il existe deux matrices $P_2$ et $Q_2$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$A = P_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2 \qquad \text{et} \qquad B = P_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} Q_2$$

    où $\alpha$ et $\beta$ sont des réels, non tous deux nuls.