Devoir non surveillé 9 - Correction

Problème 1

Bases de Lagrange

Soit $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ un $n-$uplet de réels que l'on suppose tous **distincts deux-à-deux**.
Pour $i\in\{1,\dots,n\}$, on pose :

$$L_i(X)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{X-a_j}{a_i-a_j}.$$

1. (a) Par définition, on a $L_1(X)=\dfrac{X-a_2}{a_1-a_2}$ et $L_2(X)=\dfrac{X-a_1}{a_2-a_1}$. Comme $a_1=0$ et $a_2=1$, on obtient :

$$\boxed{L_1(X)=1-X \text{ et } L_2(X)=X.}$$

(b) Montrons que (L_1,L_2) est libre. Soit $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\lambda_1L_1+\lambda_2L_2 &\iff \lambda_1(1-X)+\lambda_2X=0\\ &\iff \lambda_1+(\lambda_2-\lambda_1)X=0\\ &\iff \lambda_1=\lambda_2-\lambda_1=0 \quad\iff\quad \lambda_1=\lambda_2=0\end{aligned}$$

Ainsi, la famille (L_1,L_2) est libre. Comme elle est de cardinal $2=\dim(\mathbb{R}_1[X])$, on a bien

$$\boxed{(L_1,L_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}_1[X].}$$

(c) Soit $F=\{P\in\mathbb{R}[X],\ P(0)=P(1)=0\}$. Il est clair que F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}[X]$ et qu'il est non vide (il contient le polynôme nul). Montrons qu'il est stable par combinaisons linéaires.
Soient $(P,Q)\in F$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. On a donc $P(0)=P(1)=Q(0)=Q(1)=0$.

$$(\lambda P+\mu Q)(0)=\lambda P(0)+\mu Q(0)=0$$
$$(\lambda P+\mu Q)(1)=\lambda P(1)+\mu Q(1)=0$$

Ainsi, $(\lambda P+\mu Q)$ appartient à F.
On a bien démontré que $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}[X].}$

(d) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$.
Analyse : Supposons que P s'écrive $P=A+B$ avec $A(X)=aX+b\in\mathbb{R}_1[X]$ et $B\in F$.
On a donc $B(0)=P(0)-A(0)=P(0)-b=0$ et $B(1)=P(1)-A(1)=P(1)-(a+b)=0$.
Par conséquent, $b=P(0)$ et $a=P(1)-P(0)$. Ainsi,

$$(*)\ \begin{cases}A=(P(1)-P(0))X+P(0),\\ B=P-A\end{cases}$$

Ainsi, si A et B existent, ils sont uniquement déterminés par $(*)$.
Synthèse : Vérifions que A et B conviennent : on a clairement $A\in\mathbb{R}_1[X]$ et $P=A+B$.
Et pour finir : $B(0)=P(0)-A(0)=0$ et $B(1)=P(1)-A(1)=P(1)-(P(1)-P(0))-P(0)=0$. Donc $B\in F$.
Conclusion : On a démontré :

$$\forall P\in\mathbb{R}[X],\quad \exists! A\in\mathbb{R}_1[X],\ \exists! B\in F,\quad P=A+B.$$

C'est la définition de $\boxed{\mathbb{R}[X]=\mathbb{R}_1[X]\oplus F.}$

2. On revient désormais au cas général. Calculons $L_i(a_j)$.

   - Si $j \neq i$, alors le facteur $(X - a_j)$ apparaît dans l'écriture de L_i et donc a_j est racine de L_i : $L_i(a_j) = 0$.
   - Si $j = i$, alors $L_i(a_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \dfrac{a_i - a_j}{a_i - a_j} = 1$.

   Ainsi $\boxed{\text{Pour tout } (i,j) \in \{1, \dots, n\},\ L_i(a_j) = \delta_{i,j} \text{ où } \delta_{i,j} \text{ désigne le symbole de Kronecker.}}$

3. Tout d'abord, il est évident que $L_i(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(X) = 0$.
   Soit $j \in \{1, \dots, n\}$. On spécialise $X = a_j$.
   On obtient $0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(a_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{i,j} = \lambda_j = 0$. Ainsi, $\boxed{\text{La famille } (L_1, \dots, L_n) \text{ de } \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ est libre.}}$

4. D'autre part, cette famille est de cardinal $n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$ donc

$$\boxed{(L_1, \dots, L_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_{n-1}[X].}$$

5. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On sait que $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Par conséquent, P se décompose dans cette base :

$$\exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad P(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(X).$$

   Soit $j \in \{1, \dots, n\}$. On spécialise $X = a_j$. On obtient $P(a_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(a_j) = \lambda_j$.

   On a donc démontré : $\boxed{\text{Pour tout } P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \text{ on a } P(X) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i(X).}$

6. Par définition, pour tout P, $L_i * (P)$ est la $i$ème coordonnée de P dans la base $(L_1, \dots, L_n)$. C'est-à-dire $\boxed{L_i^* : P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \longmapsto P(a_i).}$

7. Avec $P(X) = 1$, on obtient $\sum_{i=1}^{n} L_i(X) = 1$. Puis, avec $P(X) = X$, on trouve $\sum_{i=1}^{n} a_i L_i(X) = X$.

8. Soit $\varphi : \ P \in \mathbb{R}[X] \longmapsto \Big(P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_n)\Big) \in \mathbb{R}^n$.
   Montrons que φ est une application linéaire.
   Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a les égalités suivantes.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q) &= \Big((\lambda P + \mu Q)(a_1), \dots, (\lambda P + \mu Q)(a_n)\Big) \\ &= \lambda\Big(P(a_1), \dots, P(a_n)\Big) + \mu\Big(Q(a_1), \dots, Q(a_n)\Big) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q) \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{On a démontré que } \varphi \text{ est une application linéaire.}}$

9. On désigne par φ_n la restriction de φ à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   Montrons que $\varphi_n \ : P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \longmapsto \Big(P(a_1), \dots, P(a_n)\Big) \in \mathbb{R}^n$ est bijective.

   Si $P \in$Ker(φ_n) alors P est un polynôme de degré strictement inférieur à n et s'annulant en n points distincts : $a_1, \dots, a_n$. Ainsi P est le polynôme nul.
   Par suite, Ker$(\varphi_n) = \{0\}$ et φ_n est injective.

   D'une part, φ_n est une application linéaire de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$ et d'autre part, ces deux espaces vectoriels sont de même dimension n. Par conséquent, $\boxed{\varphi_n \text{ est bijective.}}$

10. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Par définition, $\varphi_n^{-1}(e_i)$ est l'unique polynôme $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui vérifie $P(a_j)=0$ si $j\neq i$ et $P(a_i)=1$.

    En utilisant la question 5, on obtient $\boxed{\forall i\in\{1,\dots,n\},\qquad \varphi_n^{-1}(e_i)=\sum_{j=1}^{n}P(a_j)L_j(X)=L_i(X).}$

11. Par linéarité de φ_n^{-1}, on a immédiatement

$$\boxed{\forall u=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\qquad \varphi_n^{-1}(u)=\sum_{i=1}^{n}x_i\varphi_n^{-1}(e_i)=\sum_{i=1}^{n}x_iL_i(X).}$$

12. On utilise le cours. On sait que

$$\begin{aligned} P\in\mathrm{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(P)=0\\ &\iff \forall i\in\{1,\dots,n\},\quad P(a_i)=0,\\ &\iff P_0=(X-a_1)\dots(X-a_n)\text{ divise }P \qquad\qquad \text{car } a_1,\dots,a_n\text{distincts.}\end{aligned}$$

    Ainsi, $\mathrm{Ker}(\varphi)=P_0.\mathbb{R}[X]$ avec $\deg(P_0)=n$.

    Or par définition de la division euclidienne de P par P_0,

$$\forall P\in\mathbb{R}[X],\ \exists! Q\in\mathbb{R}[X],\ \exists! R\in\mathbb{R}_{n-1}[X],\quad P(X)=Q(X)P_0(X)+R(X).$$

    C'est la définition de $\boxed{\mathbb{R}[X]=\mathbb{R}_{n-1}[X]\oplus P_0.\mathbb{R}[X]=\mathbb{R}_{n-1}[X]\oplus\mathrm{Ker}(\varphi).}$

Problème 2

Théorème de factorisation

Question préliminaire : Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n\in\mathbb{N}^*$ et F un sous-espace vectoriel de E. On se donne une base $(e_1,\dots,e_p)$ de F. C'est une famille libre de E, donc par le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en base de E :

$$\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n).$$

On pose $G=$Vect$\{e_{p+1},\dots,e_n\}$. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E, F et G sont supplémentaires dans E.
Ainsi, F admet au moins un supplémentaire dans E.

On admettra que le résultat est encore vrai quand E n'est plus de dimension finie.

Première partie :

1. Soient $u\in\mathcal{L}(E,F)$ et $w\in\mathcal{L}(E,G)$.

    (a) L'implication $\Big(\exists v\in\mathcal{L}(F,G),\ w=v\circ u\Big)\Longrightarrow\Big(\mathrm{Ker}(u)\subset\mathrm{Ker}(w)\Big)$ est évidente.
    On suppose à présent que $\mathrm{Ker}(u)\subset\mathrm{Ker}(w)$. On cherche à « factoriser » w par u à gauche.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "w"'] & F \arrow[r, "?"] & G \end{tikzcd}$$

    $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F, on note F_1 un supplémentaire de $\mathrm{Im}(u)$ dans F. On définit l'application linéaire v sur F par :

• si $y \in F_1$ alors $v(y) = 0$.

• si $y \in \text{Im}(u)$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$, et on pose $v(y) = w(x)$.
On vérifie que cette définition ne dépend pas du choix de $x \in E$. Si $x, x' \in E$ sont tels que $y = u(x) = u(x')$, alors, $x - x' \in \text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(w)$. Ainsi $w(x) = w(x')$ ne dépend pas du choix de l'antécédent de y par u.

• Si $y = y_1 + y_2 \in F$ avec $y_1 \in F_1$ et $y_2 \in$Im(u), on pose $v(y) = v(y_1) + v(y_2) = v(y_2)$.

On vérifie aussi que cette application est bien linéaire. On reprend les notations précédentes.
Soient $y, z \in E$ avec $y = y_1 + y_2, z = z_1 + z_2$, $y_1, z_1 \in F_1$ et $y_2 = u(x) \in$Im(u), $z_2 = u(x') \in$Im(u). Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned} v(\lambda y + \mu z) &= v\Big((\lambda y_1 + \mu z_1) + (\lambda y_1 + \mu z_1)\Big) \\ &= v(\lambda u(x) + \mu u(x')) \ = \ v(u(\lambda x + \mu x')) \\ &= w(\lambda x + \mu x') \ = \ \lambda w(x) + \mu w(x') \\ &= \lambda v(y) + \mu v(z) \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien construit une application linéaire v de F dans G telle que

$$\forall x \in E, \quad v \circ u(x) = v(u(x)) = w(x).$$

Conclusion : $\boxed{\Big(\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(w)\Big) \iff \Big(\exists v \in \mathcal{L}(F, G),\ w = v \circ u\Big).}$

(b) On suppose pour cette question que les assertions précédentes sont vérifiées et que u est surjective.

• On montre que v est unique.
Supposons que $v, v' \in \mathcal{L}(F, G)$ sont solutions du problème. On a donc :

$$\forall x \in E, \quad w(x) = v \circ u(x) = v' \circ u(x).$$

Or u est surjective, donc pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Et donc, pour tout $y \in E$, $v(y) = v \circ u(x) = v' \circ u(x) = v'(y)$. Et par conséquent, $v = v'$. D'où l'unicité de v.

• On montre que v est surjective si et seulement si w est surjective.
La composée d'applications surjectives est surjective. Donc si u et v sont surjectives, $w = u \circ v$ l'est aussi.
Réciproquement, supposons que w est surjective. Montrons que v l'est. Soit $z \in G$.
Puisque w est surjective, il existe $x \in E$ tel que $z = w(x)$.
Et donc $z = v(u(x)) \in$Im(v).Et donc v est surjective.

• On montre que v est injective si et seulement si $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(w)$.
Supposons que v est injective. Puisque $w = v \circ u$, on a $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(w)$.
D'autre part, si $x \in \text{Ker}(w)$, alors $w(x) = v \circ u(x) = 0$. Et comme v est injective, on a $u(x) = 0$, c'est-à-dire $x \in \text{Ker}(u)$.
On a démontré l'autre inclusion $\text{Ker}(w) \subset \text{Ker}(u)$.
D'où l'égalité $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(w)$.

Supposons à présent, que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(w)$. Soit $y \in \text{Ker}(v)$.
$y \in F$ et u est surjective, donc il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$.
Or $v(y) = 0$ donc $v \circ u(x) = w(x) = 0$. Par conséquent, $x \in \text{Ker}(w) = \text{Ker}(u)$. Ainsi, $u(x) = y = 0$ et v est bien injective.

2. Soient $v \in \mathcal{L}(F,G)$ et $w \in \mathcal{L}(E,G)$.

   (a) L'implication $\Big(\exists u \in \mathcal{L}(F,G),\ w = v \circ u\Big) \Longrightarrow \Big(\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Im}(v)\Big)$ est évidente.

   On suppose à présent que $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Im}(v)$. On cherche à « factoriser » w par v à droite.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "?"] \arrow[rr, bend right, "w"'] & F \arrow[r, "v"] & G \end{tikzcd}$$

   Soit F_1 un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(v)$ dans F. On sait (démonstration du théorème du rang) que la restriction $\tilde{v}$ de v à F_1 est un isomorphisme sur $\mathrm{Im}(v)$.
   On définit alors $u \in \mathcal{L}(E,F)$ par $u = (\tilde{v})^{-1} \circ w$, ce qui est possible car $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Im}(v)$.
   Et par construction, on a $v \circ (\tilde{v})^{-1} = Id_{\mathrm{Im}(v)}$ et donc :

$$v \circ u = v \circ (\tilde{v})^{-1} \circ w = w.$$

   Conclusion : $\boxed{\Big(\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Im}(v)\Big) \iff \Big(\exists u \in \mathcal{L}(E,F),\ w = v \circ u\Big).}$

   (b) On suppose pour cette question que les assertions précédentes sont vérifiées et que v est injective.

   • On montre que u est unique.
   Si l'on a $w = v \circ u = v \circ u'$, alors $v \circ (u - u') = 0$ et donc $\mathrm{Im}(u-u') \subset \mathrm{Ker}(v)$. Or, on a supposé que v était injective, donc $\mathrm{Ker}(v) = \{0\}$. Par conséquent, $\mathrm{Im}(u-u') = \{0\}$ et donc $u = u'$. Ainsi, u est unique.

   • On montre que u est injective si et seulement si w est injective.
   La composée de deux applications injectives est injective, donc si u est injective, comme v l'est, $w = v \circ u$ l'est aussi.
   Réciproquement, si w est injective. Comme $w = v \circ u$, on a $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(w) = \{0\}$, donc $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$ et u est injective.

   • On montre que u est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}(v)$.
   Si u est surjective, alors $\mathrm{Im}(w) = v \circ u(E) = v(F) = \mathrm{Im}(v)$.
   Réciproquement, si $\mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}(v)$. Soit $y \in F$. On a donc $v(y) \in \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(w)$. Donc, il existe $x \in E$, tel que $v(y) = w(x) = v(u(x))$. Ainsi, $y - u(x) \in \mathrm{Ker}(v)$, et comme v est injective, $y = u(x) \in \mathrm{Im}(u)$.
   Ainsi, u est bien surjective.

Seconde partie : applications

Soient u, v et w trois endomorphismes de E.

1. On suppose $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(w)$.
   On cherche des endomorphismes a et b de E tels que $w = a \circ u + b \circ v$.
   En particulier, si $x \in \mathrm{Ker}(u)$, on devrait avoir : $w(x) = a \circ u(x) + b \circ v(x) = b \circ v(x)$.
   C'est une factorisation à gauche de w par v sur $\mathrm{Ker}(u)$. Montrons son existence.
   Soient v_1 et w_1 les restrictions de v et w à $\mathrm{Ker}(u)$. On a donc :

$$\mathrm{Ker}(v_1) = \{x \in \mathrm{Ker}(u),\ v(x) = 0\} = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$$
$$\mathrm{Ker}(w_1) = \{x \in \mathrm{Ker}(u),\ w(x) = 0\} = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(w)$$

   Par hypothèse, $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(w)$ donc $\mathrm{Ker}(v_1) \subset \mathrm{Ker}(w)$.
   De plus, $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$ donc $\mathrm{Ker}(v_1) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

Alors, $\mathrm{Ker}(v_1) \subset \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(w) = \mathrm{Ker}(w_1)$.

D'après le premier théorème de factorisation, comme $v_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{Ker}(u), E)$ et $w_1 \in\in \mathcal{L}(\mathrm{Ker}(u), E)$, il existe $b \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$w_1 = b \circ v_1.$$

Cette égalité s'écrit aussi : $\forall x \in \mathrm{Ker}(u),\ w(x) = b \circ v(x)$.

On a trouvé un b qui pourrait convenir. Déterminons a. On voudrait que $w - b \circ v = a \circ u$. C'est encore une factorisation à gauche de $w' = w - b \circ v$ par u sur E. Montrons son existence.

Il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(w')$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$. On a $w'(x) = w(x) - b \circ v(x) = 0$ par construction de v. Et donc $x \in \mathrm{Ker}(w')$.

D'après le premier point, il existe $a \in \mathcal{L}(E)$ tel que $w' = a \circ u$.

On a bien montré que $\boxed{\text{il existe } a, b \in \mathcal{L}(E) \text{ tels que } w = a \circ u + b \circ v.}$

2. On suppose $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.

$\mathrm{Im}(v)$est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$, il possède donc un supplémentaire A :

$$\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) = A \oplus \mathrm{Im}(v).$$

Pour la suite, on aura besoin de l'inclusion $A \subset \mathrm{Im}(u)$. A priori, elle n'est pas vérifiée. Mais en construisant correctement A, on peut l'obtenir.

En effet, $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Im}(u)$. On note A un supplémentaire de $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v)$ dans $\mathrm{Im}(u)$. On a bien $A \subset \mathrm{Im}(u)$. Montrons que $\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) = A \oplus \mathrm{Im}(v)$.

• D'une part, $A + \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$. De plus, si $x \in \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$ alors il existe $y_1 \in \mathrm{Im}(u)$ et $y_2 \in \mathrm{Im}(v)$ tels que $x = y_1 + y_2$.

Puisque $A \oplus \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(u)$, il existe $a \in A$ et $y_3 \in \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v)$ tels que $y_1 = a + y_3$. Et alors $x = a + y_3 + y_2 \in A + \mathrm{Im}(v)$ car $y_2 + y_3 \in \mathrm{Im}(v)$.

On a donc démontré $A + \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.

• Il reste à vérifier que la première somme est directe. Si $x \in A \cap \mathrm{Im}(v)$ alors $x \in \mathrm{Im}(u)$ (car $A \subset \mathrm{Im}(u)$ et donc $x \in \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v)$ et comme $x \in A$, alors

$$x \in A \cap (\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v)) = \{0\}.$$

Donc $x = 0$.

On a donc finalement $\boxed{A \oplus \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) \text{ avec } A \subset \mathrm{Im}(u).}$

Soit maintenant p est projection de $\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$ sur $\mathrm{Im}(v)$ parallèlement à A. Puisque $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$, on peut définir l'application $w_1 = p \circ w$.

On a donc $\mathrm{Im}(w_1) \subset \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(v)$ par définition de p.

Le second théorème de factorisation s'applique : il existe $d \in \mathcal{L}(E)$ tel que $w_1 = v \circ d$.

Cet endomorphisme d étant maintenant construit, on pose $w_2 = w - v \circ d$. On voudrait le « factoriser » par u à gauche. Pour cela, il suffit de montrer que $\mathrm{Im}(w_2) \subset \mathrm{Im}(u)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(w_2)$: il existe $x \in E$ tel que $y = w_2(x) = w(x) - v(d(x)) = w(x) - w_1(x) = w(x) - p(w(x))$.

Par définition de p, $w(x) - p(w(x))$ est un élément de $\mathrm{Ker}(p) = A \subset \mathrm{Im}(u)$. Ainsi, $\mathrm{Im}(w_2) \subset \mathrm{Im}(u)$ et donc, il existe $c \in \mathcal{L}(E)$ tel que $w_2 = u \circ c$. En remplaçant w_2 par son expression, on trouve bien que :

$$\boxed{\exists c, d \in \mathcal{L}(E),\ w = u \circ c + v \circ d.}$$