Devoir non surveillé 9

À rendre le mardi 14 novembre (facultatif)

Problème 1 (Grand Classique à connaitre)

Dans cet exercice, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on désigne par $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à $n-1$.

On se donne également $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ un $n-$uplet de réels que l'on suppose tous **distincts deux-à-deux** et pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

1. Un premier exemple : dans cette question, on suppose que $n = 2$ et on pose $a_1 = 0$ et $a_2 = 1$.
   (a) Calculer les polynômes L_1 et L_2.
   (b) Justifier que (L_1, L_2) est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.
   (c) Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = P(1) = 0\}$. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
   (d) Montrer que $\mathbb{R}[X] = \mathbb{R}_1[X] \oplus F$.
2. On revient désormais au cas général. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]$, calculer $L_i(a_j)$ (distinguer les cas $i = j$ et $i \neq j$).
3. Montrer que $(L_1, \ldots, L_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
4. En déduire que $(L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
5. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que $P(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i(X)$.
6. **Uniquement pour ceux qui ont cherché le problème 3 du DNS7 :**
   Déterminer alors la base duale $(L_1^*, \ldots, L_n^*)$.
7. Que valent $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i(X)$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i L_i(X)$?
8. Soit $\varphi :\ P \in \mathbb{R}[X] \longmapsto \Big(P(a_1), P(a_2), \ldots, P(a_n)\Big) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que φ est une application linéaire.
9. On note φ_n la restriction de φ à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Démontrer que φ_n est une bijection de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^n$.
10. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Que vaut $\varphi_n^{-1}(e_i)$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$?
11. En déduire l'expression de φ_n^{-1}.
12. Montrer enfin que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

Problème 2 (Plus difficile)

Question préliminaire : Démontrer que tout sous-espace vectoriel d'un espace E de dimension finie, admet au moins un supplémentaire dans E.

On admettra que le résultat est encore vrai quand E n'est pas de dimension finie.

Dans toute la suite, E, F, G sont des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels de dimensions finies.

Première partie :

1. Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $w \in \mathcal{L}(E,G)$.

   (a) Montrer que $\Big(\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(w)\Big) \iff \Big(\exists v \in \mathcal{L}(F,G),\ w = v \circ u\Big)$.

   (b) On suppose pour cette question que les assertions précédentes sont vérifiées et que u est surjective. Montrer que :

      - v est unique.
      - v est surjective si et seulement si w est surjective.
      - v est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(w)$.

2. Soient $v \in \mathcal{L}(F,G)$ et $w \in \mathcal{L}(E,G)$.

   (a) Montrer que $\Big(\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Im}(v)\Big) \iff \Big(\exists u \in \mathcal{L}(E,F),\ w = v \circ u\Big)$.

   (b) On suppose pour cette question que les assertions précédentes sont vérifiées et que v est injective. Montrer que :

      - u est unique.
      - u est injective si et seulement si w est injective.
      - u est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}(v)$.

Seconde partie : applications

Soient u, v et w trois endomorphismes de E.

1. On suppose $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(w)$.
   Montrer qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que $w = a \circ u + b \circ v$.
   (On pourra considérer les restrictions de v et w à Ker(u).)
2. On suppose $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.
   Montrer qu'il existe deux endomorphismes c et d de E tels que $w = u \circ c + v \circ d$.
   (On pourra construire un sous-espace A de Im(u) tel que Im(u) + Im(v) $= A \oplus$ Im(v) et utiliser l'application $x \longmapsto p(w(x))$ où p est la projection de Im(u) + Im(v) sur Im(v) parallèlement à A.)