Devoir non surveillé 8

À rendre le mardi 7 novembre (facultatif)

Extraits du rapport de jury :

• *Trop de copies sont mal rédigées, mal présentées et mal orthographiées. Des sanctions systématiques ont été appliquées aux copies truffées de symboles* $\Longrightarrow$ *et* $\Longleftrightarrow$ *utilisés à mauvais escient.*

• *Trop de candidats confondent ouvertement endomorphismes et matrices carrées, ce qui était d'autant plus problématique ici que l'on raisonnait sur des espaces vectoriels abstraits dénués de toute base canonique. À ce titre, les candidats doivent faire preuve de davantage de précision dans leur rédaction : parler de la matrice associée à un endomorphisme, sans indiquer de base, n'est pas acceptable.*

• *Terminons par quelques conseils pour les futurs candidats.*

— *Maitriser parfaitement son cours.*

— *Bien réfléchir, aidé d'un brouillon, à la structure du raisonnement ou du calcul avant de le coucher sur le papier. Au moment de la rédaction, donner toutes les justifications pertinentes (et rien qu'elles !), et structurer correctement ses raisonnements.*

— *Il est toujours préférable d'analyser un nombre réduit de questions en profondeur plutôt que de traiter superficiellement la totalité du sujet. On pouvait ici avoir une note tout à fait satisfaisante en se contentant de traiter correctement les deux tiers des questions.*

Dans tout le problème, les espaces vectoriels considérés ont $\mathbb{C}$, le corps des complexes, pour corps de base.
Etant donnés deux entiers naturels n et p non nuls, on note $M_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{C}$ (et $0_{n,p}$ sa matrice nulle) et $M_n(\mathbb{C})$ celui des matrices carrées à n lignes et à coefficients dans $\mathbb{C}$ (et 0_n sa matrice nulle).
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.
Un endomorphisme u de E est dit **échangeur** lorsqu'il existe des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que

$$E = F \oplus G,\ u(F) \subset G \ \text{ et } \ u(G) \subset F$$

Etant donnés deux endomorphismes u et v de E, on dit que v est **semblable** à u lorsqu'il existe un automorphisme φ de E tel que $v = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$. On notera que dans ce cas $u = \varphi^{-1} \circ v \circ (\varphi^{-1})^{-1}$, si bien que u est semblable à v.
On dit que u est **de carré nul** lorsque u^2 est l'endomorphisme nul de E. On dit que u est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier naturel $n \geq 1$ tel que $u^n = 0$.
Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite **de carré nul** lorsque $A^2 = 0$.

L'objectif du problème est d'établir, pour un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel **de dimension finie**, l'équivalence entre les conditions suivantes :

(C1) l'endomorphisme u est échangeur ;

(C2) il existe $a, b \in \mathcal{L}(E)$, tous deux de carré nul, tels que $u = a + b$;

(C3) les endomorphismes u et $-u$ sont semblables.

Chacune des parties A et B est indépendante des autres. Les résultats de la partie D sont essentiels au traitement des parties E et F.

Questions préliminaires

QP1. Démontrer que pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

QP2. En déduire que pour tous u, v endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie, on a :

$$\operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u).$$

A. Quelques considérations en dimension 2

On se donne ici un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2 et un endomorphisme u de E.

1. Montrer que si u vérifie la condition **(C3)** alors u est de trace nulle.

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose u de **trace nulle** et de **déterminant non nul**.
On choisit un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = -\det(u)$.

2. (a) Calculer le polynôme caractéristique de u en fonction de δ.
   On pourra se donner une base de E et écrire la matrice de u dans cette base.

   (b) Déterminer le spectre de u et préciser la dimension des sous-espaces propres.

   (c) Montrer que $u^2 = \delta^2 \mathrm{I}_E$.

3. Expliciter, à l'aide de vecteurs propres de u, une droite vectorielle D telle que $u(D) \not\subset D$ et en déduire que u est échangeur.

B. La condition (C1) implique (C2) et (C3)

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Soient $A \in M_{p,n}(\mathbb{C})$ et $B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$. On considère dans $M_{n+p}(\mathbb{C})$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{pmatrix}$$

4. Calculer le carré de la matrice $\begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}$ de $M_{n+p}(\mathbb{C})$. Montrer ensuite que M est la somme de deux matrices de carré nul.

5. On considère dans $M_{n+p}(\mathbb{C})$ la matrice diagonale par blocs

$$D = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -I_p \end{pmatrix}$$

   Montrer que D est inversible, calculer D^{-1} puis DMD^{-1}, et en déduire que M est semblable à $-M$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on se donne un endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que u est échangeur et on se donne donc une décomposition $E = F \oplus G$ dans laquelle F et G sont des sous-espaces vectoriels vérifiant $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$.

6. On suppose ici F et G tous deux non nuls.
   On se donne une base $(f_1, \dots, f_n)$ de F et une base $(g_1, \dots, g_p)$ de G.
   La famille $B = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p)$ est donc une base de E.
   Compte-tenu des hypothèses, décrire la forme de la matrice u dans B.

7. Déduire des questions précédentes que u vérifie **(C2)** et **(C3)**.
   On n'oubliera pas de considérer le cas où l'un des sous-espaces F ou G est nul.

C. La condition (C2) implique (C1) : cas d'un automorphisme

Dans cette partie, u désigne un automorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que

$$u = a + b \ \text{ et } \ a^2 = b^2 = 0$$

8. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = 0$. Comparer $\ker(f)$ à $\mathrm{Im}(f)$ et en déduire

$$\dim(\ker(f)) \geq \frac{1}{2} \dim(E)$$

9. Démontrer que $E = \ker(a) \oplus \ker(b)$, et que $\ker(a) = \mathrm{Im}(a)$ et $\ker(b) = \mathrm{Im}(b)$.
10. En déduire que u est échangeur.

D. Intermède : un principe de décomposition

On se donne dans cette partie un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie, ainsi qu'un endomorphisme f de E. On se donne un nombre complexe arbitraire λ. On pose $v = f - \lambda \mathrm{I}_E$.

11. Montrer que la suite $(\ker(v^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.
12. Montrer qu'il existe un entier naturel p tel que

$$\forall k \geq p,\ \ker(v^k) = \ker(v^p)$$

On pourra introduire la plus grande dimension possible pour un sous-espace vectoriel de la forme $\ker(v^k)$ *pour* $k \in \mathbb{N}$.
Montrer qu'alors

$$\ker(v^p) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ker(v^k)$$

et que p peut être choisi parmi les entiers pairs.

Dans la suite de cette partie, on fixe un entier naturel pair p donné par la question 12 et l'on pose

$$E^c_\lambda(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \ker(v^k) = \ker(v^p)$$

On notera que $E^c_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

13. Montrer que $E^c_\lambda(f) = \ker(v^{2p})$ et en déduire

$$E = E^c_\lambda(f) \oplus \mathrm{Im}(v^p)$$

Montrer en outre que les sous-espaces vectoriels $E^c_\lambda(f)$ et $\mathrm{Im}(v^p)$ sont tous deux stables par f.

14. Montrer que λ n'est pas valeur propre de l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Im}(v^p)$. Montrer que si $E^c_\lambda(f)$ n'est pas nul alors λ est l'unique valeur propre de l'endomorphisme induit par f sur $E^c_\lambda(f)$.
15. ($\star$) On se donne ici un nombre complexe $\mu \neq \lambda$. On suppose que toute valeur propre de f différente de λ est égale à μ.
Montrer que $\mathrm{Im}(v^p) \subset E^c_\mu(f)$, puis que $E = E^c_\lambda(f) \oplus E^c_\mu(f)$.
On pourra écrire le théorème de Cayley-Hamilton pour f *et s'intéresser à l'endomorphisme induit par* f *sur* $\mathrm{Im}(v^p)$.

E. La condition (C2) implique (C1) : cas non bijectif

Dans cette partie, on admet la validité de l'énoncé suivant.

Théorème : tout endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension finie est échangeur.

On se donne ici un endomorphisme non bijectif u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que

$$u = a + b \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 = 0$$

16. Montrer que a et b commutent avec u^2.

On fixe maintenant un entier pair p tel que $E_0^c(u) = \ker(u^p)$, donné par la question 12.

17. Montrer que le sous-espace vectoriel $G = \operatorname{Im}(u^p)$ est stable par a et b et que les endomorphismes induits a_G et b_G sont de carré nul.
18. En déduire que u est échangeur.
    On pourra utiliser, entre autres, le résultat final de la partie C.

F. La condition (C3) implique (C1)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.
Un endomorphisme u de E est dit **indécomposable** lorsque

(i) la condition **(C3)** est vérifiée par u

(ii) il n'existe aucune décomposition $E = F \oplus G$ dans laquelle F et G sont des sous-espaces non nuls, stables par u et tels que les endomorphismes induits u_F et u_G vérifient tous deux la condition **(C3)**.

Jusqu'à la question 21 incluse, on se donne un endomorphisme indécomposable u de E. On dispose en particulier d'un automorphisme φ de E tel que

$$-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$$

19. Montrer que φ^2 commute avec u.
20. Montrer que φ^2 possède une unique valeur propre λ. En déduire que les valeurs propres de φ sont parmi α et $-\alpha$, pour un certain nombre complexe non nul α.
    On utilisera l'indécomposabilité de u ainsi que les résultats des questions 13 et 14.
21. En déduire que u est échangeur.
    On pourra appliquer le résultat final de la question 15.
22. En déduire plus généralement que, pour tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, la condition **(C3)** implique la condition **(C1)**.