Devoir non surveillé 7 - Correction

Exercice 1

1. On développe suivant la première ligne.

$$D_n = (1+x^2)D_{n-1} - (-x)\begin{vmatrix} -x & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+x^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & -x & \ddots & -x & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+x^2 & -x \\ 0 & \cdots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

Dans le dernier terme, on développe suivant la première colonne. On obtient : $D_n = (1+x^2)D_{n-1} + x(-x)D_{n-2}$.

$$\boxed{\forall n \geq 3,\ D_n = (1+x^2)D_{n-1} - x^2 D_{n-2}.}$$

2. Le calcul donne $D_1 = 1 + x^2$ et $D_2 = (1+x^2)^2 - x^2$. Et donc, en choisissant $D_0 = 1$, on a bien :

$$D_2 = (1+x^2)D_1 - x^2 D_0.$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = D_n - D_{n-1}$. On sait que pour tout $n \geq 2$, on a : $D_n = (1+x^2)D_{n-1} - x^2 D_{n-2}$. Et donc :

$$u_n = D_n - D_{n-1} = x^2(D_{n-1} - D_{n-2}) = x^2 u_{n-1}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison x^2 donc, puisque $u_1 = D_1 - D_0 = x^2$, on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = x^{2(n-1)}u_1 = x^{2n}.}$$

4. On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$D_k - D_{k-1} = x^{2k}.$$

On ajoute ces égalités pour $k = 1$ à n. La somme est télescopique. Il reste :

$$\sum_{k=1}^{n}(D_k - D_{k-1}) = D_n - D_0 = \sum_{k=1}^{n} x^{2k}.$$

- si $x = \pm 1$ alors $x^2 = 1$ et donc $\forall n \in \mathbb{N},\ D_n = n+1$.
- si $x \neq \pm 1$ alors $x^2 \neq 1$ et donc $\forall n \in \mathbb{N},\ D_n = \sum_{k=1}^{n} x^{2k} + 1 = \sum_{k=0}^{n} x^{2k} = \dfrac{1 - x^{2(n+1)}}{1 - x^2}$

Problème 1

1. Un exemple dans $\mathbb{R}^3$.

   (a) Le calcul donne $M^2 = \frac{1}{2}(M + I_3)$ donc $f^2 = f \circ f = \frac{1}{2}(f + I_E)$.

   (b) On a $\det(f) = \det(M) = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$.

   (c) $\mathrm{Ker}(f - I_E)$ est un plan d'équation $x - y + z = 0$. On peut donc choisir $e_1 = (1, 1, 0)$ et $e_2 = (0, 1, 1)$.
   Le calcul donne aussi $\mathrm{Ker}\left(f + \frac{1}{2}I_E\right) = \mathrm{Vect}\{(-1, 1, 1)\}$. Prenons $e_3 = (-1, 1, 1)$.

   (d) On a $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ donc $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.

   Et la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (e) Par choix de e_1, e_2 dans $\mathrm{Ker}(f - I_E)$, on a $f(e_1) = e_1$ et $f(e_2) = e_2$.
   De même, $e_3 \in \mathrm{Ker}\left(f + \frac{1}{2}I_E\right)$ donc $f(e_3) = -\frac{1}{2}e_3$.

   Par conséquent, on obtient $\boxed{M' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}}$.

2. Supposons que $f = \alpha I_E$. On a les équivalences suivantes.

$$f^2 = \frac{1}{2}(f + I_E) \iff \alpha^2 I_E = \frac{1}{2}(\alpha I_E + I_E)$$

$$\iff 2\alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \iff \alpha = 1 \text{ ou } \alpha = -\frac{1}{2}$$

3. On revient au cas général.

   (a) On a $f^2 = \frac{1}{2}(f + I_E)$ et donc $2f^2 - f = I_E$ d'où $f \circ (2f - I_E) = I_E$ et $(2f - I_E) \circ f = I_E$.
   Par suite :

$$\boxed{f \text{ est inversible et } f^{-1} = 2f - I_E.}$$

   (b) Montrons que $E = \mathrm{Ker}\left(f + \frac{1}{2}I_E\right) \oplus \mathrm{Ker}(f - I_E)$.

   Analyse : Soit $x \in E$. Supposons connaitre $u \in \mathrm{Ker}\left(f + \frac{1}{2}I_E\right)$ et $v \in \mathrm{Ker}(f - I_E)$ tels que $x = u + v$.

   On a donc $f(u) = -\frac{1}{2}u$ et $f(v) = v$. Et donc :

$$x = u + v$$
$$f(x) = f(u) + f(v) = -\frac{1}{2}u + v$$

   Ainsi $v = \frac{1}{3}(x + 2f(x))$ et $u = \frac{2}{3}(x - f(x))$.
   Si u et v existent, ils sont **uniquement** définis par ces égalités.

Synthèse : Vérifions que u et v conviennent.

- $u+v = \frac{2}{3}(x-f(x)) + \frac{1}{3}(x+2f(x)) = x$.
- $f(u) = \frac{2}{3}(f(x)-f^2(x)) = \frac{2}{3}f(x) - \frac{2}{3}\frac{1}{2}(f(x)+x) = \frac{1}{3}(f(x)-x) = -\frac{1}{2}u$ donc $u \in \mathrm{Ker}\left(f+\frac{1}{2}I_E\right)$.
- $f(v) = \frac{1}{3}(f(x)+2f^2(x)) = \frac{1}{3}(f(x)+f(x)+x) = v$ donc $v \in \mathrm{Ker}(f-I_E)$.

Conclusion : On a démontré que pour tout $x \in E$:

$$\exists ! u \in \mathrm{Ker}\left(f+\frac{1}{2}I_E\right), \quad \exists ! v \in \mathrm{Ker}(f-I_E), \qquad x = u+v$$

C'est la définition de $\boxed{E = \mathrm{Ker}\left(f+\frac{1}{2}I_E\right) \oplus \mathrm{Ker}(f-I_E).}$

(c) On a $\left(f+\frac{1}{2}I_E\right)\circ(f-I_E) = f^2 - \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}I_E = 0$ donc

$$\mathrm{Im}(f-I_E) \subset \mathrm{Ker}\left(f+\frac{1}{2}I_E\right).$$

Mais par la formule du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f-I_E)) = \dim(E) - \dim\mathrm{Ker}(f-I_E))$.
Et puisque $E = \mathrm{Ker}\left(f+\frac{1}{2}I_E\right) \oplus \mathrm{Ker}(f-I_E)$, on a aussi $\dim\mathrm{Ker}\left(f+\frac{1}{2}I_E\right) = \dim(E) - \dim\mathrm{Ker}(f-I_E))$.

Finalement, on a bien $\boxed{\mathrm{Ker}\left(f+\frac{1}{2}I_E\right) = \mathrm{Im}(f-I_E).}$

(d) On a $(f-I_E)\circ\left(f+\frac{1}{2}I_E\right) = f^2 - \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}I_E = 0$ donc : $\mathrm{Im}\left(f+\frac{1}{2}I_E\right) \subset \mathrm{Ker}(f-I_E)$.
Et comme précédemment, on montrerait que ces deux sous-espaces ont même dimension, et donc ils sont égaux.

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f-I_E) = \mathrm{Im}\left(f+\frac{1}{2}I_E\right).}$$

4. On suppose désormais que les endomorphismes f et I_E sont linéairement indépendants.

(a) On a $f^3 = f\circ f^2 = f\circ\frac{1}{2}(f+I_E) = \frac{1}{2}(f^2+f) = \frac{3}{4}f + \frac{1}{4}I_E$.
Et de même, $f^4 = f\circ f^3 = \frac{3}{4}f^2 + \frac{1}{4}f = \frac{5}{8}f + \frac{3}{8}I_E$.

(b) **Unicité :** Si $f^n = a_n f + b_n I_E = a'_n f + b'_n I_E$ alors $(a_n - a'_n)f + (b_n - b'_n)I_E = 0$. Et comme f et I_E sont linéairement indépendantes, on a : $a_n - a'_n = b_n - b'_n = 0$, c'est-à-dire : $a_n = a'_n$ et $b_n = b'_n$.

Existence : par récurrence sur n.
Pour $n=0$, $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ conviennent.
Pour $n=1$, $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ conviennent.
Supposnons la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}$. On a donc : $f^n = a_n f + b_n I_E$. Ainsi :

$$f^{n+1} = f\circ f^n = a_n f^2 + b_n f = \left(\frac{a_n}{2} + b_n\right)f + \frac{a_n}{2}I_E = a_{n+1}f + b_{n+1}I_E,$$

avec $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + b_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n}{2}$.

(c) On a $a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{2} + b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{a_n}{2}$ (suite récurrente linéaire d'ordre 2).

L'équation caractéristique associée est $2r^2 - r - 1 = (2r-1)(r+1/2) = 0$. Et donc, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = A.1^n + B\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, on trouve facilement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.}$

Et donc $\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{2}{3}$.

(d) Puisque $b_{n+1} = \frac{a_n}{2}$, on a pour tout $n \geq 1$: $b_n = \frac{a_{n-1}}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.
Et cette égalité est encore valable pour $n = 0$.
Et finalement, $\lim_{n \to +\infty} b_n = \frac{1}{3}$.

(e) On convient d'appeler *limite de la suite d'endomorphismes* $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'endomorphisme $p = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}I_E$.
On a $p \circ p = \left(\frac{2}{3}f + \frac{1}{3}I_E\right) \circ \left(\frac{2}{3}f + \frac{1}{3}I_E\right) = \frac{4}{9}f^2 + \frac{4}{9}f + \frac{1}{9}I_E = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}I_E = p$.
Donc p est un projecteur, et en particulier, p est la projection sur $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - I_E)$ dans la direction de $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(p - I_E)$.
Or on a $p - I_E = \frac{2}{3}f + \frac{1}{3}I_E - I_E = \frac{2}{3}(f - I_E)$. Donc

$$\boxed{p \text{ est la projection vectorielle sur } \mathrm{Ker}(f - I_E) \text{ dans la direction de } \mathrm{Im}(f - I_E).}$$

Problème 2

Le groupe symplectique

1. — Tous les blocs qui interviennent dans ce qui suit sont carrés d'ordre n, donc les produits par blocs sont possibles.
   On trouve de suite que $J^2 = \begin{pmatrix} -I_n & 0_n \\ 0_n & -I_n \end{pmatrix} = -I_{2n}$, et que $J^T = -J$.
   — La relation $J^2 = -I_{2n}$ garantit que J est inversible et que son inverse est $-J$.
2. On a alors
$$J^T JJ = J^{-1}JJ = J$$
ce qui montre que $J \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$. Un calcul par blocs donne
$$K(\alpha)^T JK(\alpha) = \begin{pmatrix} I_n & -\alpha I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha I_n & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} = J$$
ce qui justifie que $K(\alpha) \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$.
3. Un calcul par blocs donne (les opérations de transposition et de passage à l'inverse commutent)
$$L_U^T JL_U = \begin{pmatrix} U^T & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_n & -(U^T)^{-1} \\ U & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = J$$
ce qui montre que $L_U \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$.
4. On suppose $M^T JM = J$. En passant au déterminant, on obtient :
$$\det(M^T)\det(J)\det(M) = \det(M)^2\det(J) = \det(J)$$
Comme J est inversible, $\det(J)$ est non nul et donc
$$\det(M) \in \{1, -1\}$$

5. Soit M et N deux éléments de $\mathcal{S}p_{2n}$.
   - M et N sont donc deux éléments de $\mathcal{M}_{2n}$, donc leur produit est défini et élément de $\mathcal{M}_{2n}$.
   - Par appartenance de M puis N à $\mathcal{S}p_{2n}$,$(MN)^T J (MN) = N^T \left(M^T JM\right) N = N^T JN = J$.
   - Finalement, $\boxed{MN \in \mathcal{S}p_{2n}}$.
6. Un élément de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ a un déterminant non nul (de valeur ± 1) et est donc inversible. Si $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$, on a $M^T JM = J$. Multiplions par M^{-1} à gauche et par $(M^T)^{-1}$ à droite; on a alors
$$J = (M^T)^{-1} JM^{-1} = (M^{-1})^T JM^{-1}$$
et donc $M^{-1} \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$.
7. Si $M \in \mathcal{S}p_{2n}$, $M^T JM = J$, donc, $MJM^T JM = MJ^2 = -M$.
Puisque M est inversible, on a $MJM^T J = -I_{2n}$. Et en multipliant à droite par J, on trouve $MJM^T J^2 = -J$. En remplaçant J^2 par $-I_{2n}$ et en multipliant par -1, $M^T JM = J$, donc $\boxed{M^T \in \mathcal{S}p_{2n}}$.
8. Un produit par blocs donne
$$M^T JM = \begin{pmatrix} -A^T C + C^T A & -A^T D + C^T B \\ -B^T C + D^T A & -B^T D + D^T B \end{pmatrix}$$
et $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$ si et seulement si
$$-A^T C + C^T A = -B^T D + D^T B = 0_n \quad \text{et} \quad A^T D - C^T B = -B^T C + D^T A = I_n$$

Centre de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$

9. I_{2n} et $-I_{2n}$ sont des éléments de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ (calcul immédiat) et elles commutent avec toute matrice donc, en particulier, avec toutes celles de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$. Ainsi
$$\{I_{2n}, -I_{2n}\} \subset \mathcal{Z}$$
Récirpoquement, soit $M \in \mathcal{Z}$ écrite sous la forme
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A, B, C, D \in \mathcal{M}_n$$
10. Comme $M \in \mathcal{Z}$, M commute avec $L = (K(-1))^T \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$ (questions **2** et **7**). Un calcul par blocs donne alors
$$\begin{pmatrix} A & A+B \\ C & C+D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+C & B+D \\ C & D \end{pmatrix}$$
et ainsi $C = 0$ et $A = D$. Compte-tenu de ces relations, $L^T M = ML^T$ (qui a lieu puisque $L^T = K(-1) \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$), donne
$$\begin{pmatrix} A+B & B \\ A & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ A & A+B \end{pmatrix}$$
et ainsi $B = 0$. Enfin, comme $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$, les relations de la question **8** donnent $AA^T = I_n$ c'est à dire $A \in \mathcal{O}_n \subset \mathcal{G}_n$. On a montré que
$$B = C = 0_n, \; D = A, \; A \in \mathcal{O}_n \subset \mathcal{G}_n$$
11. Soit $U \in \mathcal{G}_n$. On utilise maintenant le fait que L_U commute avec M, ce qui donne (compte tenu des relations de la question précédente)
$$\begin{pmatrix} AU & 0_n \\ 0_n & A(U^{-1})^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} UA & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^T A \end{pmatrix}$$
et en particulier $AU = UA$.

12. — Pour tout $(i,j) \in [[1,n]]^2$, $I_n + E_{ij}$ est une matrice triangulaire donc les coefficients diagonaux valent tous 1 ou 2, donc sont non nuls. Par conséquent, $I_n + E_{ij}$ est inversible.

— Ainsi, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(I_n + E_{ij})\,A = A\,(I_n + E_{ij})$, donc, en développant, $E_{ij}A = AE_{ij}$.

On explicite A sous la forme $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Toutes les lignes de $E_{ij}A$ sont nulles, sauf la i-ième, qui est $\begin{pmatrix} a_{j1} & \cdots & a_{jn} \end{pmatrix}$.

Toutes les colonnes de AE_{ij} sont nulles, sauf la j-ième, qui vaut $\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$.

On en déduit que, pour $k \neq j$, $a_{jk} = 0$, et que $a_{jj} = a_{ii}$.

— Par conséquent, A est une matrice dont les coefficients non diagonaux sont tous nuls et les coefficients diagonaux tous, égaux, donc A est de la forme λI_n, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ainsi,

$$M = \begin{pmatrix} \lambda I_n & 0_n \\ 0_n & \lambda I_n \end{pmatrix},$$

Mais, d'après Q4, le déterminant d'un élément de $\mathcal{S}p_{2n}$ est 1 ou -1, donc $\lambda \in \{-1, +1\}$, donc $M \in \{-I_{2n},\, I_{2n}\}$.

— On vient de démontrer que $\mathcal{Z} \subset \{-I_{2n},\, I_{2n}\}$, et on a prouvé en Q9 que $\{-I_{2n},\, I_{2n}\} \subset \mathcal{Z}$.

Finalement : $\boxed{\mathcal{Z} = \{-I_{2n},\, I_{2n}\}}$.

Problème 3

1. (a) Soit $x = \sum_{k=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{k=1}^{n} y_i e_i$ deux vecteurs de E. On a par définition,

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad e_i^*(x) = x_i \qquad \text{et} \qquad e_i^*(y) = y_i.$$

Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$, on a $\lambda x + \mu y = \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_i + \mu y_i) e_i$ et donc

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad e_i^*(\lambda x + \mu y) = \lambda x_i + \mu y_i = \lambda e_i^*(x) + \mu e_i^*(y).$$

Ainsi, e_i^* est linéaire et puisqu'elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est une forme linéaire.

$$\boxed{\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad e_i^* \in E^*.}$$

(b) Puisque $e_j = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,j} e_i$, on a $\boxed{\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \quad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}}$

(c) Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* = 0$. On a donc $\forall x \in E$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*(x) = 0$.

En particulier, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*(e_j) = \lambda_j = 0$.

Ainsi, la famille $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est libre et comme elle est de cardinal $n = \dim(E^*)$, on a

$$\boxed{(e_1^*, \ldots, e_n^*) \text{ est une base de } E^*.}$$

2. Si $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E et si $\varphi \in E^*$ est une forme linéaire sur E, on pose ${}^T f(\varphi) = \varphi \circ f$. L'application ${}^T f$ est appelée transposée de f.

   (a) Tout d'abord, pour tout $\varphi \in E^*$, l'application $\varphi \circ f$ est aussi dans E^*. Ainsi ${}^T f : E^* \longrightarrow E^*$.

   Montrons que ${}^T f$ est linéaire. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in E^*$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. On a

   $${}^T f(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = (\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) \circ f = \lambda_1\varphi_1 \circ f + \lambda_2\varphi_2 \circ f = \lambda_1^T f(\varphi_1) + \lambda_2^T f(\varphi_2).$$

   Ainsi, ${}^T f$ est linéaire et finalement $\boxed{{}^T f \in \mathcal{L}(E^*).}$

   (b) Tout d'abord, on vient de voir que pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, ${}^T f$ est un élément de $\mathcal{L}(E^*)$. Montrons que l'application $f \longrightarrow {}^T f$ est linéaire. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   $$\forall \varphi \in E^*, \quad {}^T(\lambda f + \mu g)(\varphi) = \varphi \circ (\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi \circ f + \mu\varphi \circ g = \lambda^T f(\varphi) + \mu^T g(\varphi).$$

   Ainsi, ${}^T(\lambda f + \mu g) = \lambda^T(f) + \mu^T(g)$ d'où la linéairité. On a montré :

   $$\boxed{f \in \mathcal{L}(E) \longrightarrow^T f \in \mathcal{L}(E^*) \text{ est linéaire.}}$$

   (c) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que ${}^T(f) = 0$. On a donc pour tout $\varphi \in E^*, {}^T(f) = \varphi \circ f = 0$. En particulier, avec $\varphi = e_i^*$ on obtient :

   $$\forall x \in E,\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad e_i^*(f(x)) = 0$$

   Et comme les $e_i^*(f(x))$ sont les coordonnées de $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}$, on obtient :

   $$\forall x \in E,\ f(x) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(f(x))e_i = 0.$$

   Ainsi, f est l'application nulle. On vient de montrer que le noyau de $f \longrightarrow^T f$ est réduit à $\{0\}$ donc

   $$\boxed{\text{L'application } f \longrightarrow^T f \text{ est injective.}}$$

   (d) De plus, $f \in \mathcal{L}(E) \longrightarrow^T f \in \mathcal{L}(E^*)$ et $\dim(\mathcal{L}(E)) = \dim(\mathcal{L}(E^*)) = n^2$ donc

   $$\boxed{\text{L'application } f \longrightarrow^T f \text{ est bijective.}}$$

3. Dans cette question, on donne quelques propriétés de l'application $f \longrightarrow {}^T f$.

   (a) Par définition, pour tout $\varphi \in E^*$, on a ${}^T Id_E(\varphi) = \varphi \circ Id_E = \varphi$ donc $\boxed{{}^T Id_E =^T Id_{E^*}.}$

   (b) Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Pour tout $\varphi \in E^*$ on a

   $$\begin{aligned} {}^T(g \circ f)(\varphi) &= \varphi \circ (g \circ f) = (\varphi \circ g) \circ f \\ &= ({}^T g(\varphi)) \circ f = {}^T f({}^T g(\varphi)) \\ &= ({}^T f \circ^T g)(\varphi) \end{aligned}$$

   Et donc $\boxed{\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, \quad {}^T(g \circ f) = {}^T f \circ {}^T g.}$

   (c) Soit f un automorphisme de E. On a donc $f \circ (f^{-1}) = (f^{-1}) \circ f = Id_E$. En appliquant les résultat précédents, on trouve :

   $${}^T(f \circ (f^{-1})) =^T (f^{-1}) \circ^T f =^T Id_E = Id_{E^*}$$

   $${}^T((f^{-1}) \circ f) =^T (f^{-1})^T f \circ^T (f^{-1}) =^T Id_E = Id_{E^*}$$

   Et donc $\boxed{{}^T f \text{ est un automorphisme de } E^* \text{ et } ({}^T f)^{-1} = {}^T(f^{-1}).}$

4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note M sa matrice dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et N celle de ${}^T f$ dans la base $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$. Par définition, la $j$ième colonne de M est formée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ et donc

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \quad m_{i,j} = e_i^*(f(e_j)).$$

De même, par définition, la $j$ième colonne de N est formée des coordonnées de ${}^T f(e_j^*)$ dans la base $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$.

Or pour tout forme linéaire φ on a $\varphi = \sum_{k=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$. Et en particulier :

$${}^T f(e_j^*) = e_j^* \circ f = \sum_{k=1}^{n} e_j^* \circ f(e_i) e_i^* = \sum_{k=1}^{n} e_j^*(f(e_i)) e_i^*.$$

Par conséquent, $n_{i,j} = e_j^*(f(e_i)) = m_{i,j}$, ce qui s'écrit $\boxed{M^T = N.}$