Devoir non surveillé 7

À rendre le mardi 7 novembre

Travail en autonomie :

• Apprendre son cours (chapitres 7 et 8) avec précision : énoncés **exacts**, exemples, **(E)** de colles.

• Revoir tous les exercices portant sur l'algèbre linéaire du DNS0 en autonomie.

• Revoir les exercices d'algèbre linéaire traités en TD. La correction de certains d'entre eux sera mise en ligne pendant les vacances.

• Revoir son cours, ses exercices de 1ère année sur ces notions.

• La partie « Travail en autonomie » de la page dion.mouze.free.fr sera étoffée pendant les vacances. Il y aura des choses de niveaux variés.

• **Pour ceux qui ne l'ont pas encore fait :** en vue des révisions du mois d'avril, mettre à jour ses fiches de cours, éventuellement sur des notions plus anciennes et qui posent problème. Faire un cahier avec les (E) de colles correspondant au niveau choisi.

• Revoir ses copies de DS/DNS et comprendre ses erreurs.

Consigne : Faire le maximum en fonction du temps passé sur les révisions et en fonction des difficultés personnelles.

Exercice 1 (Un déterminant)

Soit x un paramètre réel fixé. On considèle le déterminant $n \times n$ suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ -x & 1+x^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -x & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1+x^2 & -x \\ 0 & \cdots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

1. Pour $n \geq 3$ entier, exprimer D_n en fonction de D_{n-1}, D_{n-2} et x.
2. Déterminer D_0 pour que l'égalité précédente soit encore vraie en $n = 2$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = D_n - D_{n-1}$.
   Pour $n \geq 2$, exprimer u_n en fonction de u_{n-1}.
   En déduire l'expression de u_n en fonction de n et de x.
4. Exprimer enfin D_n en fonction de x et de n.

Problème 1 (Itérés d'un endomorphisme)

1. Un exemple dans $\mathbb{R}^3$.

   On munit $E = \mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B}$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice dans la base $\mathcal{B}$:

$$M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & -3/2 \\ 3/2 & -1/2 & 3/2 \\ 3/2 & -3/2 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Démontrer que $f^2 = f \circ f = \dfrac{1}{2}(f + I_E)$.

   (b) Calculer le déterminant de f.

   (c) Déterminer une base (e_1, e_2) de $\mathrm{Ker}(f - I_E)$ et une base (e_3) de $\mathrm{Ker}\left(f + \dfrac{1}{2}I_E\right)$.

   (d) Justifier que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E et écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

   (e) Ecrire la matrice M' de f dans la base $\mathcal{B}'$ et donner la relation liant M, M' et P.

Dans la suite, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et I_E l'endomorphisme identité de E.

On considère désormais un endomorphisme f de E vérifiant $f^2 = f \circ f = \dfrac{1}{2}(f + I_E)$.

2. Pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha \in \mathbb{R}$ peut-on avoir $f = \alpha I_E$?
3. On revient au cas général.

   (a) Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f et de I_E.

   (b) Démontrer que $E = \mathrm{Ker}\left(f + \dfrac{1}{2}I_E\right) \oplus \mathrm{Ker}(f - I_E)$.

   (c) Calculer $\left(f + \dfrac{1}{2}I_E\right) \circ (f - I_E)$.

   En déduire que $\mathrm{Ker}\left(f + \dfrac{1}{2}I_E\right) = \mathrm{Im}(f - I_E)$.

   (d) Démontrer de même que $\mathrm{Ker}(f - I_E) = \mathrm{Im}\left(f + \dfrac{1}{2}I_E\right)$.

4. On suppose désormais que les endomorphismes f et I_E sont **linéairement indépendants**.

   (a) Exprimer f^3 et f^4 comme combinaisons linéaires de f et de I_E.

   (b) Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$f^n = a_n f + b_n I_E.$$

   Déterminer a_0, b_0, a_1, b_1 et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.

   (c) Déterminer une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n.

   En déduire l'expression de a_n et vérifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \dfrac{2}{3}$.

   (d) En déduire aussi l'expression de b_n et vérifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \dfrac{1}{3}$.

   (e) On convient d'appeler *limite de la suite d'endomorphismes* $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'endomorphisme $p = \dfrac{2}{3}f + \dfrac{1}{3}I_E$.

   Justifier que p est la projection vectorielle sur $\mathrm{Ker}(f - I_E)$ dans la direction de $\mathrm{Im}(f - I_E)$.

Problème 2 (Calcul par blocs)

Notations :

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul ($n \in \mathbb{N}^*$).

- On notera $\mathcal{E}_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices colonnes de hauteur n à coefficients réels.
- On notera $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n$, on notera $\ker(A)$ le noyau de A vu comme endomorphisme de $\mathcal{E}_n$.
- Dans $\mathcal{M}_n$, on notera 0_n la matrice nulle et I_n la matrice unité. Le déterminant est noté det.
- $\mathcal{G}_n = GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n,\ \det(M) \neq 0\}$ désigne le groupe linéaire des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n$.
- On sera enfin amené à utiliser des décompositions par blocs.
  On rappelle en particulier que si $A, B, C, D, A', B', C', D' \in \mathcal{M}_n$ on a alors dans $\mathcal{M}_{2n}$:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & C \\ 0_n & D \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} A & 0_n \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(A)\det(D)$$

Le groupe symplectique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit J_n ou simplement J la matrice de $\mathcal{M}_{2n}$ définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

On note

$$\mathcal{S}_{p_{2n}} = \{M \in \mathcal{M}_{2n},\ M^T J M = J\}$$

1. Calculer J^2 et J^T en fonction de I_{2n} et J. Montrer que J est inversible et identifier son inverse.
2. Vérifier que $J \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$ et que pour tout réel α,

$$K(\alpha) = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$$

3. Pour tout $U \in \mathcal{G}_n$, vérifier que $L_U = \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^T \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{S}_{p_{2n}}$.
4. Si $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$, préciser les valeurs possibles de $\det(M)$.
5. Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ est un élément de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$.
6. Montrer qu'un élément de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ est inversible et que son inverse appartient à $\mathcal{S}_{p_{2n}}$.
7. Montrer que si $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$ alors $M^T \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$.

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{2n}$ écrite sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A, B, C, D \in \mathcal{M}_n$$

8. Déterminer les relations sur A, B, C, D caractérisant l'appartenance de M à $\mathcal{S}_{p_{2n}}$.

Centre de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$

On s'intéresse ici au centre $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ c'est à dire

$$\mathcal{Z} = \{M \in \mathcal{S}_{p_{2n}},\ \forall N \in \mathcal{S}_{p_{2n}},\ MN = NM\}$$

9. Justifier l'inclusion suivante : $\{-I_{2n}, I_{2n}\} \subset \mathcal{Z}$.

Réciproquement, soit $M \in \mathcal{Z}$ écrite sous la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n$.

10. En utilisant $L = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ et sa transposée, obtenir $B = C = 0_n$ et $D = A$, A étant inversible.
11. Soit $U \in \mathcal{G}_n$. En utilisant $L_U = \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^T \end{pmatrix}$, montrer que A commute avec toute matrice $U \in \mathcal{G}_n$.
12. Conclure que $A \in \{-I_n, I_n\}$ et $\mathcal{Z} = \{-I_{2n}, I_{2n}\}$.
    Indication : on montrera d'abord que les matrices $I_n + E_{i,j}$ commutent avec A, où $(E_{i,j},\ 1 \leq i, j \leq n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n$.

Problème 3 (Plus abstrait)

Dans cet exercice, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
On note également $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

   Pour tout $x \in E$, il existe un unique $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

   Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on définit alors l'application e_i^* par

   $$e_i^*(x) = x_i.$$

   (a) Démontrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, l'application e_i^* est un élément de E^*.
   (b) Pour $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, que vaut $e_i^*(e_j)$?
   (c) En déduire que $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de E^*.

2. Si $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E et si $\varphi \in E^*$ est une forme linéaire sur E, on pose ${}^T\!f(\varphi) = \varphi \circ f$.
   L'application ${}^T\!f$ est appelée transposée de f.

   (a) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, l'application ${}^T\!f$ est un endomorphisme de E^*.
   (b) Montrer que l'application $f \longrightarrow {}^T\!f$ est une application linéaire de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E^*)$.
   (c) Démontrer que cette application est injective.
   (d) Est-elle bijective ?

3. Dans cette question, on donne quelques propriétés de l'application $f \longrightarrow {}^T\!f$.

   (a) Qui est ${}^T Id_E$?
   (b) Démontrer que pour tout $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, on a ${}^T(g \circ f) = {}^T\!f \circ {}^T\!g$.
   (c) Soit f un automorphisme de E.
   Montrer que ${}^T\!f$ est un automorphisme de E^* et que $({}^T\!f)^{-1} = {}^T(f^{-1})$.

4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
   On note M sa matrice dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et N celle de ${}^T\!f$ dans la base $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$.
   Démontrer que $N = M^T$ (transposée de la matrice M).