Devoir non surveillé 6

À rendre le mardi 17 octobre

Exercice 1

Dans cet exercice, on note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et on considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \varphi(P)(X) = (2X+4)P(X) - (X^2+X-2)P'(X).$$

1. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Ecrire la matrice $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ de φ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer le noyau de φ. On donnera un polynôme P_0 tel que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\{P_0\}$.
4. Déterminer l'image de φ. On donnera des polynômes P_1 et P_2 tels que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}\{P_1, P_2\}$.
5. Démontrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.
6. L'endomorphisme φ est-il un projecteur de $\mathbb{R}_2[X]$?
7. Démontrer que $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer la matrice M' de φ dans cette base.

Exercice 2 (Résultats à retenir)

Dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques (respectivement anti-symétriques) réelles.

1. Démontrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer leurs dimensions respectives (on pourra exhiber une base de chacun d'eux).
2. Démontrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont suppléméntaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Ici $n = 2$. On note $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la projection sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans la direction de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Problème 1

L'objectif de ce problème est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

et de calculer sa valeur. On considère la fonction f définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [0, +\infty[\times]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto & f(x,t) = \dfrac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \end{array} \right.$$

Dans le problème, on pourra utiliser **sans la démontrer** l'inégalité $|\sin(t)| \leq |t|$ valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Partie I - Préliminaires

1. **Question de cours :** Démontrer que l'intégrale I est convergente.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ est convergente et qu'elle est égale à I.

3. Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
4. **Question de cours :** Énoncer le théorème de dérivation pour les intégrales à paramètre (paramètre sous le signe intégrale).

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt.$$

Partie II - Calcul de F sur $]0, +\infty[$

5. Montrer que $|F(x)| \leq \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
6. Soit $a > 0$. Montrer que la fonction F est dérivable sur $[a, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}dt.$$

7. En déduire que la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer une expression simple de $F'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. Conclure que :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

Partie III - Conclusion

On considère les fonctions $F_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $F_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in [0,1], \quad F_1(x) = \int_0^1 f(x,t)dt \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_1^{+\infty} f(x,t)dt.$$

8. Montrer que la fonction F_1 est continue sur $[0,1]$.
9. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{x\sin(t) + \cos(t)}{t^2}e^{-xt}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x\sin(t) + \cos(t)}{t^2}e^{-xt}dt = (x\sin(1) + \cos(1))e^{-x} - (1+x^2)F_2(x).$$

10. En déduire que la fonction F_2 est continue sur $[0,1]$.
11. Conclure que la fonction F est continue en 0, puis déterminer la valeur de l'intégrale $I = F(0)$.

Exercice 3 (facultatif)

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = 0$ et $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$. Montrer que les matrices A et B sont semblables.
2. Le résultats subsiste-t-il avec les hypothèses $A^3 = B^3 = 0$ et $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$?

Exercice 4 (facultatif)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in GL(E)$. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.
Montrer que :

$$f + g \in GL(E) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{tr}(g \circ f^{-1}) \neq -1.$$