Devoir non surveillé 5 - Correction

Problème 1
Centrale MP 2023 maths 2 (début)

à partir d'un corrigé de M. Laamoum

I - Calcul d'une intégrale classique

I - 1)

Q 1. Pour tout $t \in [0,1]$, $1+t^2 \leq 2$ donc $\dfrac{1}{(1+t^2)^n} \geq \dfrac{1}{2^n}$ ce qui donne par positivité de l'intégrale : $\boxed{I_n \geqslant \dfrac{1}{2^n}.}$

Q 2. L'application $t \longmapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et on a $\dfrac{1}{(1+t^2)^n} \leq \dfrac{1}{t^{2n}}$, et $t \mapsto \dfrac{1}{t^{2n}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ $(n \geq 1)$, donc, par comparaison, $t \longmapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, d'où l'existence de K_n .

$$\boxed{K_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \Big[\mathrm{Arctan}(t)\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}}$$

Q 3. Pour tout $t \in [1,+\infty[$ on a $1+t \leq 1+t^2$ et $\dfrac{1}{(1+t^2)^n} \leq \dfrac{1}{(1+t)^n}$ donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^n}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{(n-1)(1+t)^{n-1}}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(n-1)2^{n-1}}$$

ainsi $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{n2^n}\right)\ .}$

Q 4. On a $K_n = I_n + \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$, $I_n \geqslant \dfrac{1}{2^n}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{n2^n}\right)$.
Puisque $\dfrac{1}{n2^n} = o(\dfrac{1}{2^n})$ alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t = o(I_n)$
ainsi

$$K_n = I_n + o(I_n).$$

d'où

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} K_n.}$$

Q 5. Soit $n > 1$ et $x \geq 0$, on a par intégration par parties (à détailler) :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^x + \int_0^x \frac{2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}} \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int_0^x \left(\frac{1}{(1+t^2)^n} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\right) dt.\end{aligned}$$

quand x tend vers $+\infty$ on obtient : $\boxed{K_n = K_{n+1} + \dfrac{1}{2n}K_n.}$

Q 6. La relation précédente s'écrit : $K_{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{2n}\right) K_n$ donc par une récurrence simple :

$$K_{n+1} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2k}\right) K_1 = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k-1}{2k}\right) K_1$$

avec $K_1 = \dfrac{\pi}{2}$, par suite

$$\begin{aligned} K_{n+1} &= \frac{\pi}{2} \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{(2.4.6...(2n))^2} \\ &= \frac{\pi (2n)!}{2^{2n+1} (n!)^2} \end{aligned}$$

La formule de Stirling donne

$$K_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi\sqrt{4\pi n}\left(\dfrac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{2^{2n+1}\left(2\pi n\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

donc $\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} K_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}.}$

I - 2)

Q 7. Par le changement de variable affine $u = \sqrt{n}t$ on a $\boxed{\sqrt{n} I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+u^2/n)^n} \,du.}$

Q 8. On va appliquer le théorème de la convergence dominée à la suite de fonctions :

$$f_n : u \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{(1+u^2/n)^n} & \text{si } u \in [0, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\sqrt{n}, +\infty[\end{cases}.$$

- f_n est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$.
- Soit $u \in [0, +\infty[$. Pour n assez grand, on a $x \in [0, \sqrt{n}]$ et donc :

$$\begin{aligned} f_n(u) &= e^{-n\ln(1+\frac{u^2}{n})} \\ &= e^{-u^2 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(u) = e^{-x^2}$ d'où la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) vers $x \mapsto e^{-x^2}$ sur $[0, +\infty[$.
Cette dernière fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$ *(c'est un $o(\frac{1}{x^2})$ en $+\infty$).*

- Hypohèse de domination : on essaie de majorer $|f_n(u)|$ par $\dfrac{1}{1+u^2}$.

Pour $u \in [0, \sqrt{n}]$, on a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} |f_n(u)| \leq \frac{1}{1+u^2} &\iff e^{-n\ln(1+\frac{u^2}{n})} \leq \frac{1}{1+u^2} \\ &\iff -n\ln\left(1+\frac{u^2}{n}\right) \leq -\ln(1+u^2) \\ &\iff n\ln\left(1+\frac{u^2}{n}\right) - \ln(1+u^2) \geq 0 \end{aligned}$$

Or une brève étude de fonction donne $\forall x \geq 0,\ n\ln(1+x) - \ln(1+nx) \geq 0$.

Avec $x = \dfrac{u^2}{n}$, on obtient $n\ln\left(1+\dfrac{u^2}{n}\right) - \ln(1+u^2) \geq 0$ et donc :

$$\forall u \in [0, \sqrt{n}],\ |f_n(u)| \leq \frac{1}{1+u^2}.$$

La majoration est encore vraie si $u \geq \sqrt{n}$ puisque dans ce cas, $f_n(u) = 0$.

Le théorème de la convergence dominée donne

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(u)\ \mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(u)\ \mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u$$

et

$$\int_0^{+\infty} f_n(u)\ \mathrm{d}u = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+u^2/n)^n}\ \mathrm{d}u = \sqrt{n}I_n$$

D'où

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u.}$$

Q 9. D'après la question Q6 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}I_n = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\ \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

La parité et le changement $u = \sqrt{2}t$ donnent $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\ \mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}$

II - Comportement asymptotique de $1-\Phi$

Soit $x > 0$.

Q 10. Pour $t \geqslant x$ on a $\varphi(t) \leqslant \dfrac{t}{x}\varphi(t)$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{x}\varphi(t)$ est intégrable *(c'est un* $o(\frac{1}{t^2})$ *en* $+\infty$ *)* donc, par positivité de l'intégrale :

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{t\varphi(t)}{x} dt.$$

et

$$\int_x^{+\infty} \frac{t\varphi(t)}{x} dt = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \mathrm{t}\mathrm{e}^{-t^2/2} dt = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \left[-\mathrm{e}^{-t^2/2}\right]_x^{+\infty} = \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}} = \frac{\varphi(x)}{x}$$

ainsi $\boxed{\displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varphi(x)}{x}\ .}$

Q 11. Soit $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t - \frac{x}{x^2+1}\varphi(x)$ pour $x \in [0, +\infty[$, remarquons que :

$\varphi'(x) = -x\varphi(x)$, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ et $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t\right) = -\varphi(x)$ (à détailler ! ! !), par suite

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\varphi(x) - \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\varphi(x) + x\varphi(x)\frac{x}{x^2+1} \\ &= \varphi(x)\frac{-(x^2+1)^2 - x^2 + 1 + x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2\varphi(x)}{(x^2+1)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

g est décroissante sur $[0, +\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (à détailler ! ! !), ainsi $g(x) \geq 0$ sur $[0, +\infty[$ et

$$\boxed{\frac{x}{x^2+1}\varphi(x) \leqslant \int_x^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t}$$

Q 12. Nous avons donc

$$\frac{x}{x^2+1}\varphi(x) \leqslant \int_x^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varphi(x)}{x}$$

et $\dfrac{x}{x^2+1}\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\varphi(x)}{x}$ ainsi par le théorème d'encadrement

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}$$

D'après Q9 on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t = 1$, donc $1-\Phi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$ et donc $\boxed{1-\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\varphi(x)}{x}.}$

Problème 2
Centrale PC 2018 maths 1 (début)

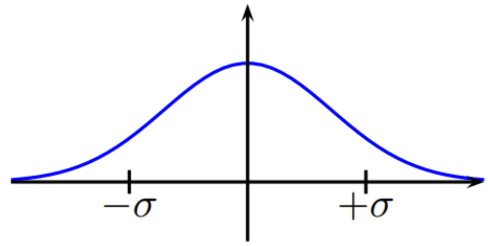
un corrigé d'É. Le Nagard

Partie 1 : quelques propriétés de g_σ

1. Pour tout $\sigma > 0$, la fonction g_σ est définie continue positive sur $\mathbb{R}$.
   Par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\, g_\sigma(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} x^2\, g_\sigma(x)$ donc $g_\sigma(x) = O_{+\infty}(\frac{1}{x^2}) = O_{-\infty}(\frac{1}{x^2})$.
   Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ sont des intégrales de Riemann convergentes, par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |g_\sigma(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x)\,\mathrm{d}x$ converge. <u>conclusion</u> : $\boxed{g_\sigma \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$.
2. On considère le changement de variable $t = \dfrac{x}{\sqrt{2}\,\sigma}$ qui est licite car réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   On obtient : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t = 1$ <u>conclusion</u> : $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x)\,\mathrm{d}x = 1}$.
3. La fonction g_σ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.
   $\forall x \in \mathbb{R},\ g'_\sigma(x) = -\dfrac{x}{\sigma^2}\, g_\sigma(x)$ et $g''_\sigma(x) = \dfrac{1}{\sigma^2}\left(-1+\dfrac{x^2}{\sigma^2}\right) g_\sigma(x) = \dfrac{x^2-\sigma^2}{\sigma^4}\, g_\sigma(x)$.
   On obtient le tableau de variations suivant (avec $g_\sigma(-\sigma) = g_\sigma(\sigma) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$) :

x	$-\infty$		$-\sigma$		0		σ		$+\infty$
$g''_\sigma(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'_\sigma(x)$	0	$\nearrow$	>0	$\searrow$	0	$\searrow$	<0	$\nearrow$	0
$g_\sigma(x)$	0	$\nearrow$	$g_\sigma(-\sigma)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$g_\sigma(\sigma)$	$\searrow$	0

La dérivée seconde s'annule en exactement deux points : $-\sigma$ et σ. On obtient la courbe représentative suivante :



Partie 2 :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

4. $\forall \xi \in \mathbb{R}$,, la fonction $x \mapsto f(x)\exp(-i\,2\pi\xi x)$ est définie continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)\exp(-i\,2\pi\xi x)| = |f(x)|$. Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :

$$\boxed{x \mapsto f(x)\exp(-i\,2\pi\xi x) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}.$$

5. — $\forall x \in \mathbb{R}, \xi \mapsto f(x)\exp(-i\,2\pi\xi x)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
   — $\forall \xi \in \mathbb{R}, x \mapsto f(x)\exp(-i\,2\pi\xi x)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$,
   — $\forall \xi \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)\exp(-i\,2\pi\xi x)| \leqslant |f(x)|$
   — f est intégrable sur $\mathbb{R}$

   D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, la fonction $\mathcal{F}(f) : \xi \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-i\,2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x$ est définie continue sur $\mathbb{R}$. <u>conclusion</u> : $\boxed{\mathcal{F}(f) \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

Partie 3 :

6. f' est intégrable sur $\mathbb{R}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

   Or, $\displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(0)$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ existe.

   Si $\ell \neq 0$, $|f(x)| \sim_{+\infty} |\ell|$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\ell|\ \mathrm{d}t$ diverge et $x \mapsto |\ell|$ de signe constant alors, par théorème de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t$ est divergente.

   Par contraposition, f intégrale sur $\mathbb{R}$ alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. De même, on a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

   <u>conclusion</u> : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)}$

7. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$, on a aussi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)\ \exp(-i\,2\pi\xi x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)\ \exp(-i\,2\pi\xi x)$. On peut effectuer une intégration par parties en considérant les fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ci-dessous :

$$\begin{cases} u(x) = f(x) & u'(x) = f'(x) \\ v(x) = \exp(-i\,2\pi\xi x) & v'(x) = -2i\pi\xi\ \exp(-i\,2\pi\xi x) \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} u(x)\,v(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} u(x)\,v(x)$$

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f'(x)}_{\uparrow}\ \underbrace{\exp(-i\,2\pi\xi x)}_{\downarrow}\ \mathrm{d}x = \underbrace{\Big[f(x)\ \exp(-i\,2\pi\xi x)\Big]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,(-2)i\pi\xi\ \exp(-i\,2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x =$$

$2i\,\pi\xi\,\mathcal{F}(f)(\xi)$.

<u>conclusion</u> : $\boxed{\mathcal{F}(f')(\xi) = 2i\,\pi\xi\,\mathcal{F}(f)(\xi)}$.

Partie 4 :

8. L'application $x \mapsto x^{2p}\exp(-x^2)$ est définie continue positive sur $\mathbb{R}$.
Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\, x^{2p}\exp(-x^2) = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2\, x^{2p}\exp(-x^2)$ donc $x^{2p}\exp(-x^2) = O_{+\infty}(\frac{1}{x^2}) = O_{-\infty}(\frac{1}{x^2})$. Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ sont des intégrales de Riemann convergentes, par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p}\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p}\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$ converge

<u>conclusion</u> : $\boxed{\forall p\in\mathbb{N},\ x\mapsto x^{2p}\exp(-x^2) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$.

9. Effectuons une intégration par parties en considérant : $\begin{cases} u(x) = \dfrac{x^{2p+1}}{2p+1} & u'(x) = x^{2p} \\ v(x) = e^{-x^2} & v'(x) = -2x\,e^{-x^2}\end{cases}$.
Cette intégration par parties est licite puisque les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)\,v(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)\,v(x) = 0$.

$$M_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x^{2p}}_{\uparrow}\ \underbrace{e^{-x^2}}_{\downarrow}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\left[\frac{x^{2p+1}}{2p+1}\,e^{-x^2}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2p+1}}{2p+1}\,(-2x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2p+1}\,M_{p+1}$$

<u>conclusion</u> : $\boxed{\forall p\in\mathbb{N},\ M_{p+1} = \dfrac{2p+1}{2}\,M_p}$

Soit l'hypothèse de récurrence : $H_p : M_p = \dfrac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!}$

<u>H_0 ?</u> $M_0 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}(2\,0)!}{2^{2\,0}0!} \Rightarrow H_0$

<u>$H_p \Rightarrow H_{p+1}$?</u> $H_p \Rightarrow M_p = \dfrac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!} \Rightarrow M_{p+1} = \dfrac{2p+1}{2}\,\dfrac{\sqrt{\pi}\,(2p)!}{2^{2p}p!} = \dfrac{\sqrt{\pi}\,(2p+1)!}{2^{2p+1}p!} = \dfrac{\sqrt{\pi}\,(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)!} \Rightarrow H_{p+1}$

<u>conclusion</u> : $\boxed{(H_0 \text{ et } \forall p\in\mathbb{N},\ H_p\Rightarrow H_{p+1}) \Rightarrow \forall p\in\mathbb{N},\ M_p = \dfrac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!}}$

10. **(5/2 - série entière)**
La fonction cosinus est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et $\forall y\in\mathbb{R},\ \cos(y) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p)!}\,y^{2p}$.

Pour $y = 2\pi\xi x$, on trouve $\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(2\pi\xi x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p)!}\,2^{2p}\pi^{2p}\xi^{2p}x^{2p}$

<u>conclusion</u> : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \exp(-x^2)\ \cos(2\pi\xi x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} c_p(\xi)\ \exp(-x^2)\,x^{2p} \text{ avec } c_p(\xi) = (-1)^p\,\frac{2^{2p}\pi^{2p}}{(2p)!}\,\xi^{2p}}$

11. **(5/2 - intégration terme à terme)**
$\forall\xi\in\mathbb{R},\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-x^2)\exp(-i\,2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-x^2)\cos(2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x - i\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-x^2)\sin(2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x$
La fonction $x\mapsto\exp(-x^2)\sin(2\pi\xi x)$ est impaire intégrable sur $\mathbb{R}$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-x^2)\sin(2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x = 0$.

D'où, d'après la question Q 10, $\forall\xi\in\mathbb{R},\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-x^2)\exp(-i\,2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} c_p(\xi)\ \exp(-x^2)\,x^{2p}\,\mathrm{d}x$.

On pose $f_p : x \mapsto c_p(\xi)\, \exp(-x^2)\, x^{2p}$.
$\forall p \in \mathbb{N},\ f_p$ est définie continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $\mathbb{R}$ (d'après la question 8).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_p(x)|\, \mathrm{d}x = |c_p(\xi)|\, M_p = \frac{2^{2p}\pi^{2p}}{(2p)!}\, \xi^{2p}\, \frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!} = \sqrt{\pi}\, \frac{(\pi^2\xi^2)^p}{p!}.$$

Comme $\dfrac{(\pi^2\xi^2)^p}{p!}$ est le terme général d'une série convergente, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme et permuter somme et intégrale.

$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\exp(-i\, 2\pi\xi x)\, \mathrm{d}x = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\, x^{2p}\, \mathrm{d}x = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p(\xi)\, M_p$

$\Rightarrow \forall \xi \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\exp(-i\, 2\pi\xi x)\, \mathrm{d}x = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\, \sqrt{\pi}\, \frac{(\pi^2\xi^2)^p}{p!} = \sqrt{\pi}\, \exp(-\pi^2\xi^2)$

<u>conclusion</u> : $\boxed{\forall \xi \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\exp(-i\, 2\pi\xi x)\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\exp\big(-\pi^2\xi^2\big)}$.

12. On effectue le changement de variable $u = \dfrac{x}{\sqrt{2}\sigma}$ qui est licite car réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\forall \xi \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(g_\sigma)(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \exp(-i2\pi\xi\, x)\mathrm{d}x \\
&\underbrace{=}_{u=\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-u^2\right)\, \exp(-i2\pi\xi\, \sqrt{2}\sigma u)\, \sqrt{2}\sigma\, \mathrm{d}u \\
&\underbrace{=}_{Q11} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi}\, \exp(-\pi^2\, (\sqrt{2}\sigma\xi)^2) = \exp\left(\frac{\xi^2}{2\,\frac{1}{(2\pi\sigma)^2}}\right) = \underbrace{\sigma'\sqrt{2\pi}}_{=\mu}\, g_{\sigma'}(\xi)
\end{aligned}$$

<u>conclusion</u> : $\boxed{\text{Pour } \sigma' = \dfrac{1}{2\pi\sigma}, \text{ on a } \exists \mu \in \mathbb{R} \,/\, \mathcal{F}(g_\sigma) = \mu\, g_{\sigma'} \text{ (avec } \mu = \sigma'\sqrt{2\pi} = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}})}$.