Devoir non surveillé 5

À rendre le mardi 10 octobre (facultatif)

Problème 1

I - Calcul d'une intégrale classique

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul. On note

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad K_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t.$$

I - 1)

Q 1. Montrer que $I_n \geqslant \dfrac{1}{2^n}$.

Q 2. Justifier l'existence de K_n et donner la valeur exacte de K_1.

Q 3. Montrer que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{n2^n}\right)$$

On pourra minorer $1+t^2$ par un polynôme de degré 1 .

Q 4. En déduire que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} K_n$.

Q 5. Établir la relation de récurrence $K_n = K_{n+1} + \dfrac{1}{2n}K_n$.

Q 6. En déduire un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

I - 2)

Q 7. Justifier que $\sqrt{n}I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+u^2/n)^n}\,\mathrm{d}u$.

Q 8. **(5/2 - convergence dominée pour les suites de fonctions)**

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

Q 9. En déduire les valeurs de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ puis de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$.

Dans toute la suite, on posera pour tout x réel

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2} \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\mathrm{d}t.$$

II - Comportement asymptotique de $1-\Phi$

Soit $x > 0$.

Q 10. En écrivant que $\varphi(t) \leqslant \dfrac{t}{x}\varphi(t)$ pour tout $t \geqslant x$, montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varphi(x)}{x}$.

Q 11. À l'aide de l'étude d'une fonction bien choisie, montrer que

$$\frac{x}{x^2+1}\varphi(x) \leqslant \int_x^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t$$

Q 12. En déduire un équivalent simple de $1-\Phi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Problème 2

Pour tout réel $\sigma > 0$, g_σ désigne la fonction $g_\sigma : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right) \end{array} \right.$.

Dans ce problème, on fixe un réel strictement positif σ.

Partie 1 : quelques propriétés de g_σ

1. Montrer que g_σ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. En admettant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$, donner la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Étudier les variations de g_σ. Montrer que la dérivée seconde de g_σ s'annule en changeant de signe en exactement deux points. Donner l'allure de la courbe représentative de g_σ et placer les deux points précédents.

Partie 2 :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que, pour tout réel ξ, la fonction $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x)\exp(-i\,2\pi\xi x) \end{array} \right.$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

   On définit alors la fonction $\mathcal{F}(f) : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ \xi & \mapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-i\,2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right.$.

   On dit que $\mathcal{F}(f)$ est la transformée de Fourier de f.
5. Montrer que $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Partie 3 : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f et sa dérivée f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

6. Montrer que f tend vers zéro en $+\infty$ et en $-\infty$.
7. Montrer que, pour tout réel ξ, $\mathcal{F}(f')(\xi) = 2i\,\pi\xi\,\mathcal{F}(f)(\xi)$.

Partie 4 :

8. Montrer que, pour tout entier naturel p, la fonction $x \mapsto x^{2p}\exp(-x^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

   On note $M_p = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p}\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$.
9. Pour p entier naturel, donner une relation entre M_{p+1} et M_p et en déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$M_p = \frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!}$$
10. **(5/2 - série entière)**

    Montrer que, pour tout réel ξ, il existe une suite réelle $(c_p(\xi))_{p\in\mathbb{N}}$ telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \exp(-x^2)\cos(2\pi\xi x) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p(\xi)\exp(-x^2)x^{2p}$$
11. **(5/2 - intégration terme à terme)**

    En déduire que, pour tout réel ξ, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\exp(-i\,2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\exp\big(-\pi^2\xi^2\big)$.
12. On pose $\sigma' = \dfrac{1}{2\pi\sigma}$. Montrer qu'il existe un réel μ tel que $\mathcal{F}(g_\sigma) = \mu g_{\sigma'}$.

    La valeur de μ n'est pas à expliciter.