Devoir non surveillé 4 - Correction

Exercice 1

1. **Exemples :** Les produits obtenus sont télescopiques.

   (a) $u_n = -\dfrac{1}{n+1}$:

   $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+u_k) = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k+1}\right) = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

   (b) $u_n = -\dfrac{1}{(n+1)^2}$:

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=1}^{n}(1+u_k) = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\frac{k}{k+1}}{\frac{k+1}{k+2}}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{n+1}{n+2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   (c) $u_n = -\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$:

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=1}^{n}(1+u_k) = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{2}{(k+1)(k+2)}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\frac{k}{k+2}}{\frac{k+1}{k+3}}\right) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{n+1}{n+3}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2. • Si la série $\sum \ln(1+u_n)$ est convergente. Par définition :

$$\exists S\in\mathbb{R},\qquad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\ln(1+u_k) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)\right) = S.$$

   En composant cette limite par exp qui est continue, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}(1+u_k) = \lim_{n\to+\infty} P_n = \mathrm{e}^S > 0.$$

   • Réciproquement, si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif ℓ, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}(1+u_k) = \ell.$$

En composant cette limite par ln (continue sur $]0,+\infty[$), on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\ln(1+u_k)=\ln(\ell).$$

Ainsi, la série $\sum \ln(1+u_n)$ est convergente.

$$\boxed{(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers un réel strictement positif} \quad\Longleftrightarrow\quad \sum \ln(1+u_n) \text{ converge.}}$$

3. On suppose dans cette question que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_n\in[0,1[$.

   • Si $\sum u_n$ converge : puisque $u_n\in[0,1[$, on a

   $$0\leq \ln(1+u_n)\leq u_n.$$

   Par les théorèmes de comparaison, $\sum \ln(1+u_n)$ converge et d'après la question 2, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers un réel strictement positif).

   • Si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge : puisque $u_n\in[0,1[$, on a $1+u_n\geq 1$ et donc $P_n\geq 1$. Par conséquent $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif. D'après la question 1, on a $\sum \ln(1+u_n)$ converge. Son terme général tend vers 0 et donc on a $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$ et $\ln(1+u_n)\underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. Par les théorèmes de comparaison, on conclut que $\sum u_n$ converge aussi.

   On a bien démontré $\boxed{(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge si et seulement si } \sum u_n \text{ converge.}}$

4. On suppose dans cette question que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_n\in]-1,0]$.

   (a) Tout d'abord, puisque $P_n>0$ et puisque :

   $$\frac{P_{n+1}}{P_n}=(1+u_{n+1})\leq 1$$

   La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge vers une limite $\ell\geq 0$.
   • Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 : alors on a $\ln(1+u_n)\underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
   Si $\sum u_n$ diverge, on a par comparaison $\sum \ln(1+u_n)$ diverge et d'après la question 1, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers un réel strictement positif. Comme elle converge vers $\ell\geq 0$, on a nécessairement $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P_n=0.}$
   • Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 alors $(\ln(1+u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ non plus ! La série $\sum \ln(1+u_n)$ est donc grossièrement divergente. Comme précédemment, on a nécessairement $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P_n=0.}$

   Finalement, $\boxed{\text{Si } \sum u_n \text{ diverge alors } \lim_{n\to+\infty} P_n=0.}$

   (b) On suppose que $\sum u_n$ converge. On a alors $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$ et donc $\ln(1+u_n)\underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. Ainsi, par les théorèmes de comparaison (les séries sont à termes négatifs), la série $\sum \ln(1+u_n)$ est convergente. D'après la question 1, on obtient :

   $$\boxed{\text{Si } \sum u_n \text{ converge alors } (P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers un réel strictement positif}}$$

(c) Réciproquement, montrer que si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif ℓ, alors d'après la question 1, la série $\sum \ln(1+u_n)$ est convergente. Son terme général tend vers 0 et donc on a encore, $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$. Par les théorèmes de comparaison, on conclut que

$$\boxed{\text{Si } \lim_{n\to+\infty} P_n = \ell > 0 \text{ alors } \sum u_n \text{ converge.}}$$

5. (a) On suppose dans cette question que la série $\sum u_n^2$ converge. On a donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et par conséquent :

$$\ln(1+u_n) = u_n - \frac{1}{2}u_n^2 + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n^2).$$

On pose $v_n = \ln(1+u_n) - u_n$. On a donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}u_n^2$ et puisque $\sum u_n^2$ converge, par comparaison, on a encore $\sum v_n$ converge.

$$\sum \ln(1+u_n) = \sum u_n + \underbrace{\sum v_n}_{\text{converge}}.$$

D'après la question 1, on a les équivalence suivantes.

$$\begin{aligned} \sum u_n \text{ converge} \quad &\iff \quad \sum \ln(1+u_n) \text{ converge} \\ &\iff \quad (P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers un réel strictement positif} \end{aligned}$$

(b) Si $\sum |u_n|$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et donc $u_n^2 = \underset{n\to+\infty}{o}(|u_n|)$. Et par les théorèmes de comparaison, on obtient que $\sum u_n^2$ converge. Et donc d'après la question précédente, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien vers un réel strictement positif.

Exercice 2

d'après CCP PSI 2011 maths 1

1. **Existence de $\tilde{f}_g(x)$.**

On suppose que la fonction g est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

(a) On notera M un majorant de $|g|$ sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $x \geq 0$. $t \mapsto f(t)g(xt)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ et le seul problème d'intégrabilité est celui au voisinage de $+\infty$. Or, $|f(t)g(x,t)| \leq M|f(t)|$ et le majorant est intégrable au voisinage de $+\infty$. La fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et a fortiori, son intégrale $\tilde{f}_g(x)$ existe.

(b) De plus

$$\forall x \geq 0,\ |\tilde{f}_g(x)| \leq M \int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt$$

ce qui montre que $\tilde{f}_g$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

- $\forall x \geq 0,\ t \mapsto f(t)g(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- $\forall t \geq 0,\ x \mapsto f(t)g(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}^+,\ \forall x \in [a,b],\ \forall t \geq 0,\ |f(t)g(xt)| \leq M|f(t)|$. Le majorant est indépendant de x et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres,

$$\tilde{f}_g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$$

Remarque : il n'y a, dans cette question, pas de raison d'exclure le cas $x = 0$.

2. **Limite de $\tilde{f}_g(x)$ lorsque $g(t) = e^{it}$.**

   On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs réelles. Soit $\tilde{f}_g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{ixt}\,dt$.

   (a) D'après l'existence de l'intégrale de $|f|$ sur $\mathbb{R}^+$, on a $\displaystyle\int_0^a |f(t)|\,dt$ qui tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt$ quand $a \to +\infty$. Par la relation de Chasles, on a $\displaystyle\lim_{x\to a} \int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt = 0$. En revenant à la définition de la limite, on obtient donc

   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, A \geq 0/\ \forall a \geq A,\ \left|\int_a^{+\infty} |f(t)|\,dt\right| \leq \varepsilon$$

   On a a fortiori le résultat demandé (pour $\varepsilon > 0$ donné le A précédent convient).

   (b) Une intégration par parties donne, pour $x > 0$,

   $$\int_0^A f(t)e^{ixt}\,dt = \frac{f(A)e^{ixA} - f(0)}{ix} - \frac{1}{ix}\int_0^A f'(t)e^{ixt}\,dt$$

   f' est continue sur le segment $[0, A]$ et donc bornée sur ce segment. Une majoration grossière donne alors

   $$\left|\int_0^A f(t)e^{ixt}\,dt\right| \leq \frac{|f(A)| + |f(0)|}{x} + \frac{A\|f'\|_{\infty,[0,A]}}{x}$$

   Le majorant étant de limite nulle quand $x \to +\infty$, on a donc

   $$\lim_{x\to+\infty} \int_0^A f(t)e^{ixt}\,dt = 0$$

   (c) Soit $\varepsilon > 0$. La question **2.(a)** donne un A. La question **2.(b)** donne alors un x_0 au delà duquel $\left|\int_0^A f(t)e^{ixt}\,dt\right| \leq \varepsilon$. On a alors

   $$\forall x \geq x_0,\ \left|\tilde{f}_g(x)\right| \leq \left|\int_0^A f(t)e^{ixt}\,dt\right| + \int_A^{+\infty} |f(t)| \leq 2\varepsilon$$

   Par définition des limites, on a donc montré que

   $$\lim_{x\to+\infty} \tilde{f}_g(x) = 0$$

3. **Etude pour une fonction f particulière.**

   On suppose (dans cet exemple) que f désigne la fonction E définie par $E(t) = e^{-t}$ pour $t \geq 0$.

   Et donc $\tilde{E}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}|\sin(xt)|\,dt$ pour $x > 0$.

   (a) On peut procéder par double intégration par partie ou (c'est l'option choisie ici) transiter par l'exponentilelle complexe.

   $$\theta(\gamma) = \mathrm{Im}\left(\int_0^{\pi} e^{y(\gamma+i)}\,dy\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{-e^{\pi\gamma} - 1}{\gamma + i}\right) = \frac{1 + e^{\pi\gamma}}{1 + \gamma^2}$$

(b) Le changement de variable $u = tx$ donne

$$\forall a \geq 0, \ \int_0^a e^{-t}|\sin(xt)|\, dt = \frac{1}{x}\int_0^{ax} e^{-u/x}|\sin(u)|\, du$$

En faisant tendre a vers $+\infty$, $ax \to +\infty$ car $x > 0$ et les différentes intégrales existent ($g = |\sin|$ est bornée). On obtient,

$$\tilde{E}(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\, du$$

(c) Le changement de variable $v = u - k\pi$ donne

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\, du = \int_0^{\pi} e^{-\frac{v+k\pi}{x}}|\sin(v)|\, dv = e^{-\frac{k\pi}{x}}\theta\left(-\frac{1}{x}\right)$$

(d) La série proposée est la série géométrique de raison $e^{-\frac{\pi}{x}}$. Sa raison est dans $]-1,1[$ et la série converge avec

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\frac{k\pi}{x}} = \frac{1}{1-e^{-\frac{\pi}{x}}}$$

(e) $\tilde{E}(x)$ est aussi la limite quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^{(n+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\, du$. Par relation de Chasles et avec les questions précédentes, on a donc

$$\tilde{E}(x) = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\frac{k\pi}{x}}\theta\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+\pi^2}\frac{1+e^{-\frac{\pi}{x}}}{1-e^{-\frac{\pi}{x}}}$$

Quand $x \to +\infty$, on a $1 - e^{-\frac{\pi}{x}} \sim \dfrac{\pi}{x}$ ce qui permet de lever l'indéterminantion quand on passe à la limite et d'obtenir

$$\lim_{x\to+\infty} \tilde{E}(x) = \frac{2}{\pi}$$

Exercice 3

1. On effectue une intégration par parties en posant :

$$\begin{array}{ll} u(t) = f(t) & u'(t) = f'(t) \\ v(t) = t-(n+1) & v'(t) = 1 \end{array}$$

Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[n, n+1]$ (puisque f l'est par hypothèse). Le résultat demandé en découle immédiatement.

2. On pose $w_n = \displaystyle\int_n^{n+1}(n+1-t)f'(t)dt = \int_n^{n+1} f(t)dt - f(n)$.

On a par inégalité triangulaire, puis par positivité de l'intégrale :

$$\left|\int_n^{n+1}(n+1-t)f'(t)dt\right| \leq \int_n^{n+1}|(n+1-t)f'(t)|\, dt \leq \int_n^{n+1}|f'(t)|dt.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\int_n^{n+1}(n+1-t)f'(t)dt\right| \leq \int_1^{n+1}|f'(t)|dt \leq \int_1^{+\infty}|f'(t)|dt.$$

Les sommes partielles de la série $\sum |w_n|$ sont croissantes et majorées donc convergentes.

Ainsi la série $\sum w_n = \sum \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)dt - \sum f(n)$ converge (absolument).

Le résultat demandé en découle facilement en revenant à la définition de série convergente.

3. Si $\alpha > 1$ convergence absolue (Riemann).
   Soit $f(t) = \dfrac{\cos(\sqrt{t})}{t^\alpha}$. La fonction f ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
   Pour $t > 0$ on a $f'(t) = -\dfrac{\sin(\sqrt{t})}{2t^{\alpha+1/2}} - \alpha\dfrac{\cos(\sqrt{t})}{t^{\alpha+1}}$.
   Pour $\alpha > \dfrac{1}{2}$, f' est intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc, d'après la question 2 :

$$dis \sum f(n) \text{ converge} \iff \left(\int_1^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge}$$

   Or par une intégration par parties : $\displaystyle\int_1^n f(t)dt = 2\left[\frac{\sin(\sqrt{t})}{t^{\alpha-1/2}}\right]_1^n + 2\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\int_1^n \frac{\sin(\sqrt{t})}{t^{\alpha+1/2}}dt$.
   Le premier terme converge quand $n \to +\infty$ car $\alpha > \dfrac{1}{2}$. Le second aussi car $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{t})}{t^{\alpha+1/2}}dt$ est absolument convergente.
   Ce qu'on voulait.