Devoir non surveillé 4

À rendre le mardi 3 octobre (facultatif)

Exercice 1 (Produits infinis)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]-1,1[$. On définit la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_n = \prod_{k=0}^{n}(1+u_k).$$

Lorsque cette suite converge, on note $\displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n) = \lim_{n\to+\infty} P_n$.

1. **Exemples :** Dans chacun des cas suivants, étudier la convergence de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et lorsqu'elle converge, déterminer $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}(1+u_n)$. On pose $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $(a)\quad u_n = -\dfrac{1}{n+1}$ $\qquad (b)\quad u_n = -\dfrac{1}{(n+1)^2}$ $\qquad (c)\quad u_n = -\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$

2. Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers réel strictement positif si et seulement si la série $\sum \ln(1+u_n)$ converge.
3. On suppose dans cette question que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [0,1[$.
   Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.
4. On suppose dans cette question que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in]-1,0]$.
   (a) Quelle est la nature de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $\sum u_n$ diverge ?
   On pourra commencer par le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
   (b) Montrer que si $\sum u_n$ converge alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif.
   (c) Réciproquement, montrer que si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif alors $\sum u_n$ converge.
5. (a) On suppose dans cette question que la série $\sum u_n^2$ converge.
   Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.
   (b) En déduire que si $\sum u_n$ est **absolument** convergente alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif.

Exercice 2

Dans ce problème, on désigne par f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[0,+\infty[$ à valeurs réelles et telle que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt$ soit convergente. On désigne par g une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$ à valeurs complexes et (sous réserve d'existence), pour $x>0$, on note

$$\tilde{f}_g(x) = \int_0^{+\infty} f(t)g(xt)\,dt$$

1. **Existence de $\tilde{f}_g(x)$.**
   On suppose que la fonction g est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
   (a) Justifier l'existence de $\tilde{f}_g(x)$ pour tout $x > 0$.
   (b) Montrer que la fonction $\tilde{f}_g$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. **Limite de $\tilde{f}_g(x)$ lorsque $g(t) = e^{it}$.**
   On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs réelles. Soit $\tilde{f}_g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{ixt}\, dt$.
   (a) Justifier l'affirmation :
   $$\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe un réel positif } A \text{ tel que } \int_A^{+\infty} |f(t)|\, dt \leq \varepsilon$$
   (b) Le nombre réel A étant fixé, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{A} f(t)e^{ixt}\, dt$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$.
   (c) En déduire la limite de $\tilde{f}_g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{ixt}\, dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Dans la suite, on suppose $g(t) = |\sin(t)|$ et on note simplement $\tilde{f}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)|\sin(xt)|\, dt$.

3. **Etude pour une fonction f particulière.**
   On suppose (dans cet exemple) que f désigne la fonction E définie par $E(t) = e^{-t}$ pour $t \geq 0$.
   Et donc $\tilde{E}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}|\sin(xt)|\, dt$ pour $x > 0$.
   (a) Pour $\gamma \in \mathbb{R}$, calculer l'intégrale $\theta(\gamma) = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{\gamma y}\sin(y)\, dy$.
   (b) Montrer que pour $x > 0$, on a $\tilde{E}(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\, du$.
   (c) Exprimer pour $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\, du$ en fonction de $e^{-\frac{k\pi}{x}}$ et de $\theta(\gamma)$ pour un γ convenable.
   (d) Justifier, pour $x > 0$, la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} e^{-\frac{k\pi}{x}}$. Préciser sa somme.
   (e) Expliciter $\tilde{E}(x)$ pour $x > 0$. Déterminer la limite de $\tilde{E}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 3 (Mines-Ponts PSI 2022)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)dt = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)dt$.
2. On suppose que f' est intégrable sur $[1, +\infty[$. Montrer que :
$$\sum f(n) \text{ converge} \iff \left(\int_1^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge}$$
3. Application : Trouver la nature de $\displaystyle\sum \frac{\cos(\sqrt{n})}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha > \dfrac{1}{2}$.