Devoir non surveillé 3 - Correction

Exercice 1

1. $\displaystyle\int xe^{2x^2+1}dx = \frac{1}{4}e^{2x^2+1} + \text{cst}$

$\displaystyle\int \sin(2x+1)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + \text{cst}$

$\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x^3+1| + \text{cst}$

$\displaystyle\int \text{sh}(x)\text{ch}(x)dx = \frac{1}{2}\text{sh}^2(x) + \text{cst} = \frac{1}{2}\text{ch}^2(x) + \text{cst}'$

$\displaystyle\int \tan(x)dx = -\ln|\cos(x)| + \text{cst}$

$\displaystyle\int e^x\cos(e^x)dx = \sin(e^x) + \text{cst}$

$\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}dx = \frac{1}{2}\ln^2(x) + \text{cst}$

$\displaystyle\int \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}^5(x)}dx = \frac{-1}{4}\frac{1}{\text{ch}^4(x)} + \text{cst}$

2. On donne juste les calculs et les réponses. Il conviendra de rédiger rigoureusement en précisant les hypothèses.

- $\displaystyle J_1 = \int_0^{\pi/4}(2t+1)\sin(t)dt = \Big[-(2t+1)\cos(t)\Big]_0^{\pi/4} + 2\int_0^{\pi/4}\cos(t)dt = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\frac{\pi}{4}$
- $\displaystyle J_2 = \int_0^1 \ln(1+t^2)dt = \Big[t\ln(1+t^2)\Big]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$
- $$\begin{aligned} J_3 &= \int \text{Arcsin}^2(x)dx = \Big[x\text{Arcsin}^2(x)\Big] - 2\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\text{Arcsin}(x)dx \\ &= x\text{Arcsin}^2(x) - 2\left(\Big[-\sqrt{1-x^2}\text{Arcsin}(x)\Big] + \int 1dx\right) \\ &= x\text{Arcsin}^2(x) - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\text{Arcsin}(x) + \text{cst} \end{aligned}$$

Exercice 2

- $\displaystyle K_1 = \int_1^4 e^{-\sqrt{t}}dt.$

L'application $t \longmapsto e^{-\sqrt{t}}$ est continue sur $[1,4]$, donc l'intégrale K_1 existe bien.
On veut poser $u = \sqrt{t}$, c'est-à-dire $t = u^2 = \varphi(u)$.
La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$ et la fonction $t \longmapsto e^{-\sqrt{t}}$ est continue $[1,4] = \varphi([1,2])$. On a aussi $dt = 2udu$. Donc par changement de variable dans une intégrale sur un segment :

$$K_1 = \int_1^2 2ue^{-u}du.$$

Il reste à faire une intégration par parties (à justifier !).

$$K_1 = [-2ue^{-u}]_1^2 + 2\int_1^2 e^{-u}du.$$

Et finalement, après calculs, $\boxed{K_1 = \int_1^4 e^{-\sqrt{t}}dt = \frac{4}{e} - \frac{6}{e^2}.}$

• $K_2 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx.$

L'application $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ est continue sur $[0,1]$, donc l'intégrale K_2 existe bien.
On veut poser $x = \cos(2t) = \varphi(t)$.
La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/4]$ et la fonction $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ est continue $[0,1] = \varphi([0, \pi/4])$. On a aussi $dx = -2\sin(2t)dt$. Donc par changement de variable dans une intégrale sur un segment :

$$\begin{aligned} K_2 &= \int_{\pi/4}^0 2\sqrt{\frac{1-\cos(2t)}{1+\cos(2t)}}(-2\sin(2t))dt \\ &= 4\int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{2\sin^2(t)}{2\cos^2(t)}}\sin(t)\cos(t)dt \;=\; 4\int_0^{\pi/4} \frac{|\sin(t)|}{|\cos(t)|}\sin(t)\cos(t)dt \\ &= 4\int_0^{\pi/4} \sin^2(t)dt = 2\int_0^{\pi/4}(1-\cos(2t)dt \end{aligned}$$

Et finalement, après calculs, $\boxed{K_2 = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = -1 + \frac{\pi}{2}.}$

• $K_3 = \displaystyle\int_{1/2}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\operatorname{Arctan}(x)dx.$

L'application $x \longmapsto \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)\operatorname{Arctan}(x)$ est continue sur $[1/2, 2]$, donc l'intégrale K_3 existe bien.
On veut poser $u = 1/x$, c'est-à-dire $x = 1/u = \varphi(u)$.
La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1/2, 2]$ et la fonction $x \longmapsto \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)\operatorname{Arctan}(x)$ est continue $[1/2, 2] = \varphi([1/2, 2])$. On a aussi $dx = -\dfrac{1}{u^2}du$. Donc par changement de variable dans une intégrale sur un segment :

$$K_3 = -\int_2^{1/2} (1+u^2)\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{1}{u^2}du = \int_{1/2}^2 \left(1 + \frac{1}{u^2}\right)\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{u}\right)du.$$

Or, on sait que pour tout $u > 0$, on a $\operatorname{Arctan}(u) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{u}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ donc :

$$K_3 = \frac{\pi}{2}\int_{1/2}^2 \left(1 + \frac{1}{u^2}\right)du - K_3.$$

Ainsi $2K_3 = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_{1/2}^2 \left(1 + \frac{1}{u^2}\right)du$. Et finalement, après calculs : $\boxed{K_3 = \int_{1/2}^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\operatorname{Arctan}(x)dx = \frac{3\pi}{4}.}$

Exercice 3

• Nature de $\sum \dfrac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+n-1}$: On a $\dfrac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n^{3/2}} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^{5/4}}\right)$.
Puisque les termes sont positifs, on peut utiliser les théorèmes de comparaison.
La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^{5/4}}$ converge car $\alpha = 5/4 > 1$, et donc $\boxed{\sum \dfrac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+n-1} \text{ converge.}}$

• Nature de $\sum \dfrac{\sqrt{n+1}}{n\ln(n)+3}$: On a $\dfrac{1}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{\sqrt{n+1}}{n\ln(n)+3}\right)$ (à justifier rapidement) et $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique) donc, par comparaison (les termes sont positifs) la série $\sum \dfrac{\sqrt{n+1}}{n\ln(n)+3}$ diverge aussi.

• Nature de $\sum \dfrac{2-n^2}{n^3\ln^2(n)+1}$: On a $\dfrac{2-n^2}{n^3\ln^2(n)+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n\ln^2(n)}$.
Puisque les termes sont négatifs (à partir d'un certain rang), on peut utiliser les théorèmes de comparaison. On est donc ramené à l'étude de la série de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n\ln^2(n)}$.
En utilisant une comparaison série intégrale, on montrerait (à faire ! ! !) que $\sum \dfrac{1}{n\ln^2(n)}$ converge et par comparaison on a enfin : $\boxed{\sum \dfrac{2-n^2}{n^3\ln^2(n)+1} \text{ converge.}}$

• Nature de $\sum \sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right)$: On a le développement asymptotique suivant.

$$\begin{aligned}
u_n = \sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right) &= \sin\left(\pi n\sqrt{1+1/n^2}\right)\\
&= \sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{8n^4}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)\\
&= \sin\left(\pi n+\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{8n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= (-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{8n^3}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = (-1)^n\frac{\pi}{2n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Par le théorème des séries alternées (hyp à vérifier), la série $\sum (-1)^n\dfrac{\pi}{2n}$ est convergente.
Et puisque $\left|u_n-(-1)^n\dfrac{\pi}{2n}\right| = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, par comparaison (hyp à vérifier), la série $\sum\left(u_n-(-1)^n\dfrac{\pi}{2n}\right)$ est absolument convergente.
Ainsi, $\sum u_n = \sum\left(u_n-(-1)^n\dfrac{\pi}{2n}\right)+\sum(-1)^n\dfrac{\pi}{2n}$ est la somme de deux séries convergentes, donc elle converge.

Problème 1
E3A 2016 Maths 1 PSI

à partir d'un corrigé de C. Devulder

1. (a) La série proposée est géométrique de raison $1/2 \in]-1,1[$ et donc convergente. On en déduit aussi que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.}$$

(b) On a

$$b_n = n\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Même si cela n'est pas nécessaire, on peut remarquer que, par croissances comparées, on a :

$$|b_n| = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, et par les théorèmes de comparaison :

$$\boxed{\sum b_n \text{ converge (absolument).}}$$

(c'est toujours çà, si on n'arrive pas à faire la suite de la question)

Méthode 1 : La fonction $h_n : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \neq 1$, on a :

$$h_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

En dérivant, on obtient pour $x \neq 1$:

$$h_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

En particulier, en $x = \frac{1}{2}$, on trouve :

$$\sum_{k=0}^{n} k\frac{1}{2^{k-1}} = \left(-\frac{1}{2}(n+1)\frac{1}{2^{n+1}} + 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{1}{1/4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4.$$

Et finalement $\sum b_n$ converge et on a (le terme pour $n = 0$ est nul) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{4}{2} = 2.$$

Méthode 2 : On a $\sum_{n\geq 1} a_n = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}$. On pose $c_n = d_n = \frac{1}{2^n}$ et

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n} = \frac{n+1}{2^n} = 2b_{n+1}.$$

Les séries de terme géneral c_n et d_n convergent absolument, donc leur produit de Cauchy $\sum w_n$ également et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} d_n = \left(\frac{1}{1-1/2}\right)^2.$$

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$. On obtient donc :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-1/2}\right)^2 = 2.}$$

Méthode 3 : pour les 5/2. La série entière $\sum nx^{n-1}$ est la série dérivée de la série $\sum x^n$. Elles ont donc même rayon de convergence $R = 1$, et en tant que série entière, on peut dériver terme à terme sur $]-1,1[$. On a donc

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Comme $1/2 \in]-1,1[$, donc $\displaystyle\sum b_n = \frac{1}{2}\sum n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ converge. Et on retrouve bien :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-1/2)^2} = 2.$$

2. (a) $f \ : \ x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et

$$\forall x > 1, \ f'(x) = -\frac{1+\ln(x)}{(x\ln(x))^2} \leq 0$$

f est donc décroissante sur $]1,+\infty[$ (on aurait aussi pu montrer que si $x \leq y$ alors $f(x) \geq f(y)$ en utilisant la croissance de ln et la décroissance du passage à l'inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$).
On en déduit immédiatement que $(a_n)_{n\geq 2}$ est décroissante. Elle est de limite nulle par opérations sur les limites.

(b) C'est un **(E2)**. f étant décroissante, on peut effectuer une comparaion série-intégrale.
Soit $k \geq 2$ un entier. Pour tout $t \in [k,k+1]$, on a $\dfrac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \dfrac{1}{t\ln(t)} \leq \dfrac{1}{k\ln(k)}$.
Par positivité de l'intégrale, on obtient :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k\ln(k)}\mathrm{d}t.$$

Ou encore : $\displaystyle\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k\ln(k)}$.

Pour $n \geq 2$ entier, on note $\displaystyle S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$. En ajoutant les encadrements précédents pour $k = 1$ à n, on obtient :

$$S_{n+1} - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \int_2^{n+1} \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t \leq S_n.$$

En particulier, l'inégalité de droite donne $\Big[\ln|\ln(t)|\Big]_2^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n$.

Par minoration, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et donc $\boxed{\sum \dfrac{1}{n\ln(n)} \text{ diverge.}}$

(c) $na_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$ si $n \geq 2$. On a donc directement $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0.}$

(d) On a $b_n = \dfrac{(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n)}{(n+1)\ln(n)\ln(n+1)}$. On écrit que

$$\begin{aligned}(n+1)\ln(n+1) &= (n+1)\left(\ln(n) + \ln(1+1/n)\right)\\ &= (n+1)\ln(n) + (n+1)\left(\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= n\ln(n) + \ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(\ln(n))\end{aligned}$$

Ainsi, $(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ et donc $b_n \sim \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = a_{n+1}$.

Or d'après la question 2(b), la série $\sum a_n$ est divergente (donc $\sum a_{n+1}$ aussi).

Et comme il s'agit de séries à termes positifs, par comparaison, $\boxed{\sum b_n \text{ est aussi une série divergente.}}$

3. (a) Dans la somme définissant u_n, il y a n termes. Par décroissance de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, tous les termes sont plus grands que a_{2n}. On a donc

$$\boxed{na_{2n} \leq u_n.}$$

(b) On a $u_n = A_{2n} - A_n$. La série $\sum a_n$ converge, on note A sa somme. Par définition, la suite des sommes partielles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et a pour limite A. A fortiori, $\lim\limits_{n\to+\infty} A_{2n} = A$. Et en passant à la limite dans l'égalité $u_n = A_{2n} - A_n$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = A - A = 0$.

Enfin, par la question précédente on a $0 \leq na_{2n} \leq u_n$. Et le théorème d'encadrement donne ;

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} na_{2n} = 0.}$$

(c) Posons $c_n = na_n$. On a $c_{2n} = 2(na_{2n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après la question précédente.

De plus, par décroissance de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, on a :

$$0 \leq c_{2n+1} = (2n+1)a_{2n+1} \leq (2n+1)a_{2n} = c_{2n} + a_{2n+1}.$$

Comme $\sum a_k$ converge, $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = 0$. Le majorant ci-dessus est donc de limite nulle et, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} c_{2n+1} = 0.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} c_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} c_{2n} = 0$, on a aussi : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0.}$

(d) On revient aux sommes partielles (puisque l'on est dans une situation théorique).

$$\begin{aligned}B_n &= \sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{k=1}^{n} ka_{k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)a_k\\ &= a_1 + \sum_{k=2}^{n} (k-(k-1))a_k - na_{n+1}\\ &= A_n - (n+1)a_{n+1} + a_{n+1}\end{aligned}$$

On sait que la série $\sum a_n$ converge, donc la suite des sommes partielles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, et on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
On vient aussi de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.
Les trois termes du membre de droite admettant une limite finie quand $n \to +\infty$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donc $\boxed{\sum\limits_{n\geq 1} b_n \text{ converge.}}$

(e) Un passage à la limite dans l'identité précédente donne $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n.}$

Problème 2
E3A 2019 maths 1 PC

à partir d'un corrigé de Mme Fontaine

1. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) $\diamond$ Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $s_{p+1} - s_p = \dfrac{1}{n+1+p} > 0$. $\boxed{\text{Donc la suite } (s_p)_{p\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$
   $\diamond$ L'entier n est fixé. On a :
$$\frac{1}{n+k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k}$$
   Et la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$ est une série à termes positifs divergente.
   Donc, par comparaison, $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+k}$ diverge, c'est-à-dire :
$$\boxed{\text{La suite } (s_p)_{p\geqslant 1} \text{ diverge.}}$$
   (b) Puisque la suite $(s_p)_{p\geqslant 1}$ est croissante et divergente, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} s_p = +\infty$. Et par définition de cette limite :
$$\forall A > 0, \quad \exists p_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall p \geqslant p_0, \qquad s_p \geqslant A$$
   En particulier pour un réel $A > 1$, $\exists p_0 \in \mathbb{N}$, $\forall p \geqslant p_0$, $s_p \geqslant A > 1$.
   Ainsi il existe au moins un entier naturel p tel que l'on ait :
$$\boxed{\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} > 1.}$$

Remarques pour la suite : p_n est le plus petit entier p vérifiant cette propriété, et donc :
• p_n vérifie la propriété :
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p_n} > 1 \tag{1}$$
• $p_n - 1$ ne vérifie pas la propriété :
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p_n-1} \leq 1 \tag{2}$$

3. Par définition de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \in \mathbb{N}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad a_n \geqslant n$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty.}$

4. $\diamond$ Remarquons que $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\quad \dfrac{1}{n+k} < \dfrac{1}{n}$. Donc en sommant ces inégalités, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{n+k} < \dfrac{n-1}{n}$.

En additionnant $\dfrac{1}{n}$ à cette inégalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} < \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}$. Donc :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} < 1.}$$

$\diamond$ On le démontre par récurrence sur n.

Pour $n = 2$, on a bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} \frac{1}{2+k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$.

Soit $n \geq 2$ un entier pour lequel le résultat est vrai. Montrons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{n+1+k} > 1$.

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{n+1+k} &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n}\left(-1 + \frac{1}{3} + \frac{n}{3n-1} + \frac{n}{3n+1}\right) \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k}}_{>1} + \frac{1}{n}\left(-\frac{2}{3} + \frac{6n}{9n^2-1}\right) \end{aligned}$$

Et comme $\dfrac{6n}{9n^2-1} > \dfrac{2n}{3n^2} > \dfrac{2}{3}$, on obtient bien le résultat attendu. Finalement : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} > 1}$

5. D'après la définition de p_n et les inégalités précédentes, puisque $n-1$ ne vérifie pas la propriété, on a $n-1 \leq p_n$, et puisque $2n-2$ la vérifie, on a $p_n \leq 2n-2$. Ainsi $n-1 \leqslant p_n \leqslant 2n-2$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2n-1 \leqslant a_n \leqslant 3n-2$.
Alors en divisant par n ($n > 0$), $2 - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 - \dfrac{2}{n}$.
Ainsi, si l'on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, par passage à la limite, on obtient $\boxed{2 \leqslant \ell \leqslant 3.}$

6. Soit $n \geqslant 0$. Par définition de p_n et on d'après (1) et (2) :

$$1 < \sum_{k=0}^{p_n} \frac{1}{n+k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{p_n-1} \frac{1}{n+k} \leqslant 1.$$

Donc $1 < \displaystyle\sum_{k=n}^{a_n} \frac{1}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1$. Ainsi : $\boxed{1 < \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{a_n}.}$

7. Soit n un entier non nul.

$\diamond$ Soit k un entier non nul. La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $[k, k+1]$.

Donc $\forall t \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t} \mathrm{d}xt \leqslant \frac{1}{k}$.
Donc en sommant sur k de n à $a_n - 1$,

$$\sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k} \quad \text{Ou encore} \quad \sum_{k=n+1}^{a_n} \frac{1}{k} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k}$$

◇ Or d'après la question précédente, $1 < \sum_{k=n}^{a_n} \frac{1}{k}$. Donc $1 - \frac{1}{n} < \sum_{k=n+1}^{a_n} \frac{1}{k}$.

Et $\sum_{k=n}^{a_n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \frac{1}{a_n}$. Donc $\sum_{k=n}^{a_n - 1} \frac{1}{k} \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 - \frac{1}{n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{a_n} \frac{1}{k} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=n}^{a_n - 1} \frac{1}{k} \leqslant 1.}$$

8. ◇ Remarquons que $\int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(a_n) - \ln(n) = \ln\left(\frac{a_n}{n}\right) = \ln(u_n)$.

Ainsi d'après les questions précédentes, $1 - \frac{1}{n} \leqslant \ln(u_n) \leqslant 1$.

◇ $\lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$. Donc par encadrement, la suite $\big(\ln(u_n)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et $\lim_{n \to +\infty} \ln(u_n) = 1$.

Par continuité de la fonction exp en 1, $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers } e.}$

Exercice 4

C'est la même démarche que l'exercice de colle **(E2)** qui est dans le cours dans lequel on détermine un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On trouve

$$R_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha - 1}}.$$

Exercice 5

1. Soit $x > 0$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 \geq n$ et donc $-n^2 x \leq -nx$.
   Et par croissance de l'exponentielle :

$$0 \leq e^{-n^2 x} \leq e^{-nx} = \left(e^{-x}\right)^n.$$

   Comme $x > 0$, on a $0 < e^{-x} < 1$ et donc la série géométrique $\sum \left(e^{-x}\right)^n$ converge.
   Par les théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs, on a bien :

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad \sum e^{-n^2 x} \text{ converge.}}$$

2. le n^2 dans l'exponentielle laisse à croire que les termes sont vraiment de plus en plus petit, et que c'est le premier qui est « prépondérant » devant la somme (infinie) de tous les suivants. Démontrons le.

   On sort le premier terme, puis on factorise. On a :

$$f(x) = e^{-x} \left(1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n^2 - 1)x}\right)$$

   Il reste donc à montrer que $\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n^2-1)x} = 0$.

Méthode 1 : par des majorations
Pour tout $n \geq 2$ entier, on a $n^2 - 1 \geq n$, et donc :

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0,1\}, \qquad 0 \leq \mathrm{e}^{-(n^2-1)x} \leq e^{-nx}$$

On peut sommer et passer à la limite puisque toutes les séries convergent. On obtient :

$$\forall x > 0, \qquad 0 \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n^2-1)x} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-2x}}{1-e^{-x}}$$

La fonction majorante tend vers 0 en $+\infty$, donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n^2-1)x} = 0.$$

Méthode 2 (5/2) : avec le théorème de double limite
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $x > 0$ on pose : $f_n(x) = \mathrm{e}^{-(n^2-1)x}$.
Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a :

$$|f_n(x)| = \mathrm{e}^{-(n^2-1)x} \leq \mathrm{e}^{-n^2+1} \leq \mathrm{e}^{-n}.$$

Donc $\|f_n\|_{\infty,[1,+\infty[} \leq \mathrm{e}^{-n}$.
Or $\sum \mathrm{e}^{-n}$ converge, donc, par comparaison, $\sum \|f_n\|_{\infty,[1,+\infty[}$ converge.

Ainsi $\sum f_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$.
A fortiori, $\sum f_n$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0,1\}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$, donc par le théorème de double limite pour les séries de fonctions, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=2}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ ou encore :

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n^2-1)x} = 0.$$

Conclusion : Dans les deux cas, on a donc montré $f(x) = e^{-x}\left(1 + \underset{x\to+\infty}{o}(1)\right)$. Donc :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}.}$$

Exercice 6

On sait que f est continue sur $[0, +\infty[$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$. Puisque $\displaystyle\int_0^x a dt = xa$, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = a \quad &\iff \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt - a\right) = 0 \\ &\iff \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\int_0^x \Big(f(t) - a\Big)dt\right) = 0\end{aligned}$$

On montre la dernière assertion en revenant à la définition de limite.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

Puisque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$, il existe $x_0 > 0$ tel que pour tout $x \geq x_0$, on ait $|f(x) - a| \leq \varepsilon$.

Soit $x \geq x_0$. Par la relation de Chasles, on a :

$$\int_0^x \Big(f(t) - a\Big) dt = \int_0^{x_0} \Big(f(t) - a\Big) dt + \int_{x_0}^x \Big(f(t) - a\Big) dt.$$

On divise par $x > 0$. Et par inégalités triangulaires, et positivité de l'intégrale, on obtient (les bornes sont bien ordonnées) :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x} \int_0^x \Big(f(t) - a\Big) dt \right| &\leq \frac{1}{x} \underbrace{\int_0^{x_0} \Big| f(t) - a \Big| dt}_{=K \text{ constante}} + \frac{1}{x} \int_{x_0}^x \underbrace{\Big| f(t) - a \Big|}_{\leq \varepsilon} dt \\ &\leq \frac{K}{x} + \varepsilon \frac{x - x_0}{x} \leq \frac{K}{x} + \varepsilon \end{aligned}$$

La constante K ne dépend que de x_0, et donc que de ε fixé.
Or $\lim_{x \to +\infty} \frac{K}{x} = 0$ donc, il existe $x_1 > x_0$, tel que $0 \leq \frac{K}{x} \leq \varepsilon$.

On a montré que pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $x_1 > 0$ tel que :

$$\forall x \geq x_1, \quad \left| \frac{1}{x} \int_0^x \Big(f(t) - a\Big) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Quitte à reprendre le raisonnement en changeant ε en $\varepsilon/2$, on reconnait la définition de :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} \int_0^x \Big(f(t) - a\Big) dt \right) = 0$$

ce qu'on voulait démontrer.