Devoir non surveillé 3

À rendre le mardi 26 septembre

Niveau 1

Exercice 1 (Révisions sur l'intégration - pour ceux qui en ont besoin)

1. Déterminer les primitives suivantes.

$$\int xe^{2x^2+1}dx \qquad \int \sin(2x+1)dx \qquad \int \frac{x^2}{x^3+1}dx \qquad \int \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)dx$$

$$\int \tan(x)dx \qquad \int e^x\cos(e^x)dx \qquad \int \frac{\ln(x)}{x}dx \qquad \int \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^5(x)}dx$$

2. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une (ou plusieurs) intégration(s) par parties.

$$J_1 = \int_0^{\pi/4} (2t+1)\sin(t)dt \qquad J_2 = \int_0^1 \ln(1+t^2)dt \qquad J_3 = \int \operatorname{Arcsin}^2(x)dx$$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable proposé.

$$K_1 = \int_1^4 e^{-\sqrt{t}}dt \qquad \text{en posant } u = \sqrt{t}$$

$$K_2 = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx \qquad \text{en posant } x = \cos(2t)$$

$$K_3 = \int_{1/2}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{Arctan}(x)dx \qquad \text{en posant } u = \frac{1}{x}$$

Exercice 3

Déterminer la nature des séries numériques suivantes.

$$\sum \frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+n-1} \qquad \sum \frac{\sqrt{n+1}}{n\ln(n)+3} \qquad \sum \frac{2-n^2}{n^3\ln^2(n)+1} \qquad \sum \sin\left(\pi\sqrt{1+n^2}\right).$$

Demander si besoin des indications pour la dernière

Problème 1

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}),\ \ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ \text{ et }\ B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

1. On prend **dans cette question**, pour tout $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
   (a) Vérifier que $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge et calculer sa somme.
   (b) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ converge et calculer sa somme.
   Indication : On pourra, en le justifiant, effectuer le produit de Cauchy de $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{2^n}$ *par elle-même, ou bien calculer* $h_n'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ *avec* $h_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$.
2. On prend **dans cette question**, $a_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$, $n \geq 2$ et $a_1 = 0$.
   (a) Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(a_n)_{n\geq 2}$.
   (b) Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$?
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n$.
   (d) Démontrer que $\Big((n+1)\ln(n+1) - n\ln(n)\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$.
3. On suppose **dans cette question** que la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.
   (a) Pour tout entier naturel n non nul, on note $u_n = \sum\limits_{p=n+1}^{2n} a_p$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ na_{2n} \leq u_n$.
   (b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_{2n} = 0$.
   (c) Démontrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.
   (d) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k - (n+1)a_{n+1} + a_{n+1}$
   (e) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ converge.
   (f) A-t-on $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$?

Problème 2

1. **Question de cours :**
   Rappeler sans démonstration la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ en fonction du réel α.
2. Dans cette question, $n \in \mathbb{N}^*$ est **fixé**.
   (a) On pose pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle s_p = \sum_{k=0}^{p}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p}$.
   Vérifier que la suite $(s_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et divergente.
   (b) Montrer qu'il existe au moins une entier naturel p tel que l'on ait : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{n+k} > 1$.
   On note alors p_n le plus petit entier verifiant cette propriété, et on pose : $a_n = n + p_n$ et $u_n = \dfrac{a_n}{n}$.
   On a donc : $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} > 1$.
3. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?
4. Prouver que pour $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} < 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{2n-2}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n-2} > 1.$$

   Indication : on pourra démontrer la seconde inégalité par récurrence.
5. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite ℓ, alors $\ell \in [2, 3]$.
6. Prouver que l'on a, pour tout entier naturel non nul n :

$$1 \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{a_n}.$$

7. Démontrer que l'on a, pour tout entier naturel non nul n :

$$1 - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq \int_n^{a_n}\frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{a_n - 1} \leq 1.$$

8. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 4 (Recherche d'équivalents)

Pour $\alpha > 1$, déterminer un équivalent simple de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 5 (Recherche d'équivalent)

1. Justifier que pour $x > 0$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \mathrm{e}^{-n^2x}$ est convergente.
2. Déterminer un équivalent simple de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n^2x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 6 (Cesaro pour les intégrales)

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie a en $+\infty$. Montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = a.$$