Devoir non surveillé 2

À rendre le mardi 19 septembre (facultatif)

Exercice

On se donne une série $\sum u_n$ **à termes strictement positifs** et pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Dans le cas où cette série converge, on notera $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

I - Nature de séries définies à l'aide de u_n et de S_n.

1. On suppose que la série $\sum u_n$ converge.
   En utilisant les théorèmes de comparaison, déterminer la nature de $\sum \frac{u_n}{S_n}$.
2. On suppose que la série $\sum u_n$ diverge.
   (a) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} S_n$.
   (b) i. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{u_n}{S_n^2} \leq \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$.
   ii. En déduire la nature de $\sum \frac{u_n}{S_n^2}$.
   (c) i. Déterminer la nature de la série $\sum \Big(\ln(S_{n-1}) - \ln(S_n)\Big)$.
   ii. Démontrer que la série $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge.

II - Nature de séries définies à l'aide de u_n et de R_n.

Dans cette partie, on suppose que la série $\sum u_n$ est convergente.

1. Déterminer la nature de la série $\sum \Big(\ln(R_{n-1}) - \ln(R_n)\Big)$.
2. En déduire que la série $\sum \frac{u_n}{R_n}$ est divergente.

Problème

Partie I

Soit φ l'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P - P' \end{cases}$$

Soit n un entier naturel non nul.

1. Démontrer que φ induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme. On note φ_n cet endomorphisme.
2. Expliciter la matrice de φ_n sur la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. **(5/2)** Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ_n.
   L'endomorphisme φ_n est-il diagonalisable ?
4. Démontrer que φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. En déduire qu'il existe une unique famille de polynômes $s_0, s_1, \dots, s_n$ telle que :
   (a) $\forall i \in [\![0, n]\!],\ \varphi_n(s_i) = \dfrac{X^i}{i!}$,
   (b) $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$ et δ l'endomorphisme induit par la dérivation sur le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier :

$$(\mathrm{Id} - \delta) \circ (\mathrm{Id} + \delta + \cdots + \delta^n) = \mathrm{Id}$$

7. En déduire l'expression de s_i en fonction de X, pour tout i dans $[\![0, n]\!]$.

* * *

Dans le reste du problème, on considère les deux familles de polynômes $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \cdots \frac{X^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{X^i}{i!}$$

$$T_n(X) = S_n(nx)$$

Dans les parties II, III et IV, on admettra le résultat suivant qui est démontré indépendamment dans la partie V :

Soit n un entier naturel $\geqslant 2$. Toutes les racines complexes du polynôme S_n ont un module $< n$.

Partie II

8. Donner le tableau de variations de S_3. Représenter sur un même graphique les courbes des fonctions S_1, S_3 ainsi que la fonction exponentielle $(x \mapsto \mathrm{e}^x)$ en s'attachant à respecter la position relative de ces trois courbes.
9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que le polynôme S_n n'a pas de racine réelle si n est pair et a une unique racine réelle simple si n est impair.

Indication : On pourra faire une démonstration par récurrence.

Dans la suite du problème, on note α_n l'unique racine réelle de S_n, pour tout entier naturel **impair** n.

10. On se propose d'étudier le comportement de la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
    (a) Justifier que la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

    Indication : On pourra étudier le signe de $S_{2n+1}(\alpha_{2n-1})$.

    (b) Soit $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers un nombre réel ℓ.
        i. Soit ε un nombre réel > 0. Justifier qu'il existe un entier naturel M tel que :

        $$\forall m \in \mathbb{N},\ m > M \Rightarrow |S_m(v_m) - \mathrm{e}^{v_m}| < \varepsilon.$$

        ii. En déduire que la suite $(S_m(v_m))_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers e^{ℓ}.

    (c) En déduire que la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Partie III

Soit h la fonction de la variable réelle x définie par :

$$h(x) = x\mathrm{e}^{1-x}.$$

11. Étudier la fonction h. Représenter son graphe sur $\mathbb{R}$.
12. Démontrer qu'il existe une fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]-\infty, 1[$ dans $]-\infty, 1[$ telle que :

    $$\forall x \in]-\infty, 1[,\ h(g(x)) = x.$$

    Représenter le graphe de g. L'étude précise de g n'est pas demandée.
13. Démontrer qu'il existe un unique nombre réel ρ tel que $h(\rho) = -1$.
14. Démontrer que ρ est dans l'intervalle $]-1/2, -1/4[$.

    Indication : on pourra utiliser le fait que $\ln(2) \geqslant \dfrac{13}{20}$.
15. Soit z un nombre complexe tel que : $|z| \leqslant 1$ et $|z\mathrm{e}^{1-z}| \leqslant 1$. Soit n un entier naturel.
    (a) Justifier l'égalité :

    $$1 - \mathrm{e}^{-nz}T_n(z) = (z\mathrm{e}^{1-z})^n \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^{k-n}.$$

    (b) En déduire que :

    $$\left|1 - \mathrm{e}^{-nz}T_n(z)\right| \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-n}T_n(1).$$

    (c) En déduire que $T_n(z) \neq 0$.
16. Soit n un entier naturel impair $\geqslant 3$. Démontrer que α_n est dans l'intervalle $]-n, n\rho[$.

Partie IV

Pour tout entier naturel m, on pose $\gamma_{2m+1} = \dfrac{\alpha_{2m+1}}{(2m+1)}$.

17. Démontrer que pour tout nombre réel u et tout entier naturel n, on a :

$$\mathrm{e}^{-u} S_n(u) = 1 + \frac{1}{n!} \int_u^0 t^n \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t.$$

18. Soit m une entier naturel. On note $n = 2m+1$. Justifier l'égalité :

$$\int_{\gamma_n}^0 h(t)^n \mathrm{d}t = -\frac{n! \mathrm{e}^n}{n^{n+1}}.$$

19. **(5/2 - Stirling)**

    En déduire que la suite $\left(\displaystyle\int_{\gamma_{2m+1}}^0 h(t)^{2m+1} \mathrm{d}t \right)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente et expliciter sa limite.

20. Démontrer que $\left(\displaystyle\int_{\gamma_{2m+1}}^\rho h(t)^{2m+1} \mathrm{d}t \right)_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente et expliciter sa limite.
21. Déterminer un équivalent de α_{2m+1}.

Partie V

Cette partie a pour but de démontrer le résultat admis dans les parties précédentes :

Si n est un entier naturel $\geqslant 2$, les racines complexes du polynôme S_n ont un module $< n$.

22. Soit p un entier naturel non nul. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des nombres complexes de module $\leqslant 1$.

    Soient $\theta_1, \ldots, \theta_p$ des nombres réels > 0. On suppose que $\left| \displaystyle\sum_{i=1}^p \theta_i \alpha_i \right| = \displaystyle\sum_{i=1}^p \theta_i$.

    (a) Démontrer que $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont des nombres complexes de module exactement 1.

    (b) On suppose dans cette question seulement $p = 2$ et $\alpha_1 = 1$. Soit t un nombre réel tel que $\alpha_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. En développant $\left| \theta_1 + \theta_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \right|^2$, justifier que $\alpha_2 = 1$.

    (c) Dans le cas général, démontrer que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p$.

23. Soit P dans $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 2$. On note $a_0, \ldots, a_n$ ses coefficients :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

    On suppose que $a_0 = a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > a_n > 0$.

    (a) Justifier que ni 0, ni 1, ne sont des racines de P.

    (b) Déterminer les coefficients du polynôme $(X-1)P(X)$.

    (c) Démontrer que les racines complexes de P ont un module > 1.

    Indication : on pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question 22c.

24. Soit Q dans $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 2$. Soient $a_0, \ldots, a_n$ ses coefficients :

$$Q(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

    On suppose que $0 < a_0 < a_1 < \cdots a_{n-2} < a_{n-1} = a_n$.

    Justifier que les racines complexes de Q ont un module < 1.

25. Conclure.