Devoir non surveillé 21 - Correction

Problème
E3A PC 2014 epreuve A

Questions préliminaires

Voir le cours !

Première partie

On considère les intégrales impropres suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt, \quad I_3 = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

1. Les fonctions $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ et $t \longmapsto \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ sont continues sur $[0,1[$ et pour tout $X \in [0,1[$, on a :
$$\int_0^X \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \Big[\text{Arcsin}(t)\Big]_0^X = \text{Arcsin}(X) - \text{Arcsin}(0) \underset{X\to 1}{\longrightarrow} \text{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}.$$
$$\int_0^X \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \Big[-\sqrt{1-t^2}\Big]_0^X = 1 - \sqrt{1-X^2} \underset{X\to 1}{\longrightarrow} 1.$$
Ainsi, les intégrales impropres I_1 et I_2 sont bien définies et on a :
$$\boxed{I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = 1.}$$

2. La fonction $t \longmapsto \dfrac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0,1[$ et pour justifier sont existence, on peut écrire I_3 comme la somme de deux intégrales convergentes (l'une est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment l'autre est I_1).
$$\forall t \in [0,1[, \quad \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{t^2-1+1}{\sqrt{1-t^2}} = -\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$
Ainsi, $-\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = I_3$ existe bien.
Pour la calculer on effectue le changement de variable $t = \varphi(u) = \sin(u)$. L'application φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on obtient donc ($dt = \cos(u)du$) :

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt \qquad = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(u)}{\sqrt{\cos^2(u)}}\cos(u)du \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(u)}{|\cos(u)|}\cos(u)du \;=\; \int_0^{\pi/2} \sin^2(u)du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos(2u))du \end{aligned}$$

Après calculs (simples !), on obtient $\boxed{I_3 = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{\pi}{4}.}$

3. On considère la fonction

$$f : x \mapsto \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.$$

(a) La fonction $t \longmapsto \dfrac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0,1[$ et puisque $\dfrac{|\cos(xt)|}{\sqrt{1-t^2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ et que I_1 converge, par comparaison, on déduit que f est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) On applique le théorème de dérivations successives sous le signe intégrale.

On pose pour $t \in [0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$, $h(x,t) = \dfrac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}$.

• Pour tout $t \in [0,1[$, on a : $x \longmapsto h(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial h}{\partial t}(x,t) = \frac{-t\sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}} \text{ et } \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(x,t) = \frac{-t^2\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}.$$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $t \longmapsto h(x,t)$, $t \longmapsto \dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t)$ et $t \longmapsto \dfrac{\partial^2 h}{\partial t^2}(x,t)$ sont continues par morceaux sur $[0,1[$ et les majorations suivantes, avec les théorèmes de comparaison et les résultats précédents, donnent l'intégrabilité des deux premières sur $[0,1[$:

$$|h(x,t)| \leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\right| \leq \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

• Hypothèse de domination : Pour tout $t \in [0,1[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left|\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(x,t)\right| = \left|\frac{-t^2\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\right| \leq \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} = \psi(t).$$

Et d'après la question 2, ψ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0,1[$.
Le théorème s'applique et donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\boxed{f'(x) = -\int_0^1 \frac{t\sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \quad \text{et} \quad f''(x) = -\int_0^1 \frac{t^2\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt.}$$

(c) On pourrait effectuer une intégration par parties, mais on constate que l'intégrale suivante se calcule « à vue » (du type $u'v + uv'$). On a, en effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante.

$$\begin{aligned}
xf''(x)+f'(x)+xf(x) &= \int_0^1 \left(x\cos(xt)\frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{t\sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(-x\cos(xt)\sqrt{1-t^2} + \sin(xt)\left(\frac{-2t}{-2\sqrt{1-t^2}}\right)\right) dt \\
&= \left[\sin(xt)\sqrt{1-t^2}\right]_0^1 \;=\; 0
\end{aligned}$$

On a bien $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad xf''(x)+f'(x)+xf(x)=0.}$

4. On se donne une fonction q, définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $I=[1,+\infty[$ telle que

$$\forall x \in I, q'(x) \leqslant 0$$

et on considère une fonction z de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et solution sur I de l'équation différentielle

$$z''(x)+q(x)z(x)=0.$$

(a) On note $u : x \mapsto q(x)z^2(x)+(z'(x))^2$.
La fonction q est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et la fonction z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, donc u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a :

$$\forall x \in I, \quad u'(x) = q'(x)z^2(x) + 2z'(x)(q(x)z(x)+z''(x)) = q'(x)z^2(x) \leq 0$$

donc $\boxed{u \text{ est décroissante sur } I.}$

(b) On suppose qu'il existe un réel $q_0>0$ tel que $\forall x \in I, \quad q(x) \geqslant q_0$.
Comme u est décroissante sur $I=[1,+\infty[$, on a pour tout $x \in I$, $u(x) \leq u(1)$ et donc :

$$q(x)z^2(x) \leq q(x)z^2(x)+(z'(x))^2 = u(x) \leq u(1).$$

Or $q(x) \geq q_0 > 0$ donc $q_0 z^2(x) \leq q(x)z^2(x) \leq u(1)$. On a enfin $z^2(x) \leq \dfrac{u(1)}{q_0}$ donc $|z(x)| \leq \sqrt{\dfrac{u(1)}{q_0}}$.

$$\boxed{z \text{ est bornée sur } I.}$$

5. Soit y une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I=[1,+\infty[$ vérifiant

$$\forall x \in I, xy''(x)+y'(x)+xy(x)=0$$

et z la fonction définie sur I par $z(x)=\sqrt{x}y(x)$.
Par opérations, z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I=[1,+\infty[$ et pour tout $x \geq 1$, on a :

- $z(x)=\sqrt{x}y(x)$
- $z'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}y(x)+\sqrt{x}y'(x)$
- $z''(x) = \dfrac{-1}{4x\sqrt{x}}y(x) + \dfrac{1}{\sqrt{x}}y'(x)+\sqrt{x}y''(x)$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
z''(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{-1}{4x}y(x) + \underbrace{y'(x)+xy''(x)}_{=-xy(x)}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{-1}{4x}y(x)-xy(x)\right) \;=\; -\frac{xy(x)}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{4x^2}+1\right) \;=\; -z(x)\left(\frac{1}{4x^2}+1\right)
\end{aligned}$$

Le calcul donne $\boxed{q(x) = \left(1+\dfrac{1}{4x^2}\right).}$

6. Cette question est une synthèse des questions précédentes.
   - La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et elle vérifie

$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad xf''(x)+f'(x)+xf(x)=0.$$

Donc d'après la question 5, si on pose $q(x)=\left(1+\dfrac{1}{4x^2}\right)$ et $z(x)=\sqrt{x}f(x)$, alors :

$$\forall x \in I, \quad z''(x)+q(x)z(x)=0.$$

   - Le calcul donne $q'(x)=-\dfrac{1}{2x^2}\leq 0$ et $q(x)=\left(1+\dfrac{1}{4x^2}\right)\geq 1=q_0>0$ donc on peut appliquer le résultat de la question 4(b) : La fonction z est bornée sur I.
   - Ainsi, il existe $M>0$, tel que pour tout $x\in I, |z(x)|=\sqrt{x}|f(x)|\leq M$.

On a bien démontré : $\boxed{\forall x \in I, \quad |f(x)| \leqslant \dfrac{M}{\sqrt{x}}.}$

Deuxième partie

Soit y une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$, à valeurs réelles. On considère alors la fonction z définie sur $]0,+\infty[$ par $z(t)=y\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

1. Par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction z est aussi de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $t\in]0,+\infty[$, on a :
   - $z(t)=y\left(\dfrac{1}{t}\right)$
   - $z'(t)=-\dfrac{1}{t^2}y'\left(\dfrac{1}{t}\right)$
   - $z''(t)=\dfrac{2}{t^3}y'\left(\dfrac{1}{t}\right)+\dfrac{1}{t^4}y''\left(\dfrac{1}{t}\right)$

   On raisonne par équivalences successives.

$$\begin{aligned}
\forall t\in]0,+\infty[,\ 4tz''(t)+8z'(t)-tz(t)=0 &\iff \begin{cases}\forall t\in]0,+\infty[,\\ \dfrac{8}{t^2}y'\left(\dfrac{1}{t}\right)+\dfrac{4}{t^3}y''\left(\dfrac{1}{t}\right)-\dfrac{8}{t^2}y'\left(\dfrac{1}{t}\right)-ty\left(\dfrac{1}{t}\right)=0\end{cases}\\
&\iff \forall t\in]0,+\infty[,\ 4\left(\dfrac{1}{t^3}\right)y''\left(\dfrac{1}{t}\right)-ty\left(\dfrac{1}{t}\right)=0\\
&\iff \forall t\in]0,+\infty[,\ 4\left(\dfrac{1}{t^4}\right)y''\left(\dfrac{1}{t}\right)-y\left(\dfrac{1}{t}\right)=0\\
&\underset{x=1/t}{\iff} \forall x\in]0,+\infty[,\ 4x^4y''(x)-y(x)=0
\end{aligned}$$

   La dernière équivalence utilise le caractère bijectif de $t\longmapsto\dfrac{1}{t}$ de $]0,+\infty[$ sur lui-même.

   On a bien démontré l'équivalence demandée.

2. (a) Soit $u(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$.

En tant que série entière, u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et on peut dériver terme à terme.

$$\forall t\in]-R,R[,\quad u'(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n n t^{n-1} \text{ et } u''(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n n(n-1)t^{n-2}.$$

On a alors les équivalences suivantes.

$$\begin{cases} u(0)=1 \\ \forall t\in]-R,R[, \\ 4tu''(t)+8u'(t)-tu(t)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0=1 \\ \forall t\in]-R,R[, \\ 4t\sum_{n=0}^{+\infty} a_n n(n-1)t^{n-2}+8\sum_{n=0}^{+\infty} a_n n t^{n-1}-t\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_0=1 \\ \forall t\in]-R,R[, \\ \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} 4a_n n(n+1)t^{n-1}}_{p=n-1}-\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1}}_{p=n+1}=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_0=1 \\ \forall t\in]-R,R[, \\ \sum_{p=0}^{+\infty} 4a_{p+1}(p+1)(p+2)t^p-\sum_{p=1}^{+\infty} a_{p-1}t^p=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_0=1 \\ \forall t\in]-R,R[, \\ 8a_1+\sum_{p=1}^{+\infty}(4a_{p+1}(p+1)(p+2)-a_{p-1})t^p=0 \end{cases}$$

$$\underset{\text{en SE}}{\overset{\text{unic. du dev.}}{\iff}} \begin{cases} a_0=1,\ a_1=0 \\ \forall p\in\mathbb{N}^*, 4a_{p+1}(p+1)(p+2)-a_{p-1}=0 \\ \text{i.e. } a_{p+1}=\dfrac{a_{p-1}}{4(p+2)(p+1)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_0=1 \ \text{ et } \ \forall p\in\mathbb{N},\ a_{2p+1}=0 \text{ (récurrence simple)} \\ a_{2p}=\dfrac{a_{2(p-1)}}{4(2p+1)(2p)} \\ \qquad =\cdots=\dfrac{a_0}{[4(2p+1)(2p)]\times\cdots\times[4(3)(2)]} \end{cases}$$

$$\iff \quad \forall p\in\mathbb{N},\ a_{2p+1}=0 \ \text{ et } \ a_{2p}=\frac{1}{4^p(2p+1)!}$$

(b) La série entière obtenue précédemment s'écrit $u(t)=\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{t^{2p}}{4^p(2p+1)!}$.

Pour $t\neq 0$, on pose $a_p=\left|\dfrac{t^{2p}}{4^p(2p+1)!}\right|=\dfrac{t^{2p}}{4^p(2p+1)!}>0$.

On a alors $\dfrac{a_{p+1}}{a_p}=\dfrac{t^2}{4^2(2p+3)(2p+2)}\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}0<1$.

Par le critère de D'Alembert pour les séries numériques, la série $\sum \frac{t^{2p}}{4^p(2p+1)!}$ est absolument convergente pour tout $t \in \mathbb{R}$, et donc le rayon de convergence de cette série entière est $\boxed{R = +\infty.}$

Remarque : Pour $t \neq 0$, on aurait pu aussi reconnaître une série entière du cours :

$$u(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{4^p(2p+1)!} = \frac{2}{t} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(t/2)^{2p+1}}{(2p+1)!} = \frac{2}{t} \mathrm{sh}\left(\frac{t}{2}\right) \qquad R = +\infty$$

3. La fonction u est solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$, a fortiori sur $]0, +\infty[$, et d'après l'équivalence démontrée en 1., la fonction $y : x \longmapsto u\left(\frac{1}{x}\right)$ est solution de (E_1) sur $]0, +\infty[$.

   On a alors $\forall x \in]0, +\infty[,\ y(x) = 2x \mathrm{sh}\left(\frac{1}{2x}\right)$ et donc $\frac{y(x)}{x} = 2\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2x}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et y n'est pas la fonction nulle, ce qu'on voulait !

Troisième partie

1. Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle qu'il existe un réel $C > 0$ tel que pour tout couple (s, u) de nombres réels avec $s \geqslant u \geqslant 1$, on ait

$$|f(s) - f(u)| \leqslant \frac{C}{u}.$$

   Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = f(n^2)$.

   (a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - u_n| = |f((n+1)^2) - f(n^2)| \leqslant \frac{C}{n^2}$ par hypothèse.

   Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann), donc par comparaison :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 1} (u_{n+1} - u_n) \text{ est absolument convergente.}}$$

   (b) La série $\sum_{n \geqslant 1} (u_{n+1} - u_n)$ converge donc, et en notant S sa somme, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} S.$$

   On a bien $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = S + u(1) = L.}$

   (c) Pour $s > 0$, on pose $N_s = E(\sqrt{s}) \in \mathbb{N}$. On a donc $N_s \leq \sqrt{s} < N_s + 1$ et aussi $N_s^2 \leq s < (N_s + 1)^2$. Quand s tend vers $+\infty$, N_s^2 aussi et donc, d'après la question précédente, $\lim_{s \to +\infty} f(N_s^2) = L$.

   D'autre part, on a les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} |f(s) - L| &= |(f(s) - f(N_s^2)) + (f(N_s^2) - L)| \leq |(f(s) - f(N_s^2)| + |f(N_s^2) - L)| \\ &\leq |(f(s) - f(N_s^2)| + \frac{C}{N_s^2}. \end{aligned}$$

   Les deux termes du majorant tendent vers 0 quans $s \to +\infty$, donc par le théorème d'encadrement :

$$\boxed{f(s) \underset{s \to +\infty}{\longrightarrow} L.}$$

2. Soit g une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ telle que $g'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   (a) Par définition de $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = 0$ (avec $\varepsilon = 1$), il existe $A > 0$ tel que :

   $$\forall x \geq A, \qquad |g'(x)| \leq 1.$$

   D'autre part, sur le segment $[0,A]$, g est continue donc bornée :

   $$\exists m > 0, \qquad \forall x \in [0,A], \quad |g'(x)| \leq m.$$

   En prenant $M = \max\{1,m\}$, on a bien : $\boxed{\forall x \in [0,+\infty[, \qquad |g'(x)| \leqslant M.}$

   (b) Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On utilise le théorème de convergence dominée.
   Pour tout $t \in]0,1]$, on pose $f_n(t) = g'(tx_n)$ (si l'on choisit de travailler sur $[0,1]$, il faut bien distinguer le cas $t = 0$ dans l'étude de la convergence simple).

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur $]0,1]$,
   - Pour tout $t \in]0,1]$, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} tx_n = +\infty$. Et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} g'(tx_n) = 0$. Ainsi la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0.
   - Hypothèse de domination : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in]0,1]$, on a $|f_n(t)| = |g'(tx_n)| \leq M = \varphi(t)$ et la fonction constante $\varphi = M$ est intégrable sur le segment $[0,1]$, a fortiori sur $]0,1]$.

   Le théorème s'applique, les fonctions f_n sont intégrables sur $]0,1]$ (on le savait) et on a :

   $$\boxed{\int_0^1 g'(tx_n)\, dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 0\, dt = 0.}$$

   Or, puisque $x_n > 0$, on a $\displaystyle\int_0^1 g'(tx_n)\, dt = \left[\frac{g(tx_n)}{x_n}\right]_0^1 = \frac{g(x_n)}{x_n} - \frac{g(0)}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

   Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{g(0)}{x_n} = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{g(x_n)}{x_n} = 0.}$

   (c) On vient de démontrer que pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (strictement positive) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{g(x_n)}{x_n} = 0$. Par le critère séquentiel de la limite, on obtient :

   $$\boxed{\frac{g(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

3. Soit h une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. On suppose que h' possède une limite finie L en $+\infty$. La fonction $g : x \mapsto h(x) - Lx$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et

   $$g'(x) = h'(x) - L \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Par la question 3, on a $\dfrac{g(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui donne $\boxed{\dfrac{h(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L.}$

4. Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$ telle que u' possède une limite finie L en $+\infty$.
   Méthode 1 : On prolonge u par une fonction affine, pour obtenir une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. On pose :

   $$\forall x \in [0,1],\ u(x) = u'(1)(x-1) + u(1).$$

La fonction ainsi obtenue vérifie les hypothèse de la question 3, et donc $\boxed{\frac{u(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L.}$

Méthode 2 : On pose $v(x) = u(x-1)$.

La fonction v vérifie les hypothèses de la question 3, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{v(x)}{x} L$. Et $\frac{u(x)}{x} = \frac{u(x)-v(x)}{x} - \frac{v(x)}{x}$.
Or u' possède une limite finie L en $+\infty$, donc u' est bornée : il existe $M_0 > 0$ tel que $\forall x \geq 0$, $u'(x) \leq M_0$ et par l'inégalité des accroissements finies (u est bien $\mathcal{C}^1$ sur $[x-1, x]$) : $|u(x-1) - u(x)| \leq 1 \times M_0$.
Ainsi $\left|\frac{u(x)-v(x)}{x}\right| = \left|\frac{u(x)-u(x-1)}{x}\right| \leq \frac{M_0}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc on retrouve $\frac{u(x)}{x} = \frac{u(x)-v(x)}{x} - \frac{v(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + L$.

Quatrième partie

On se donne une fonction q définie et continue sur $[1, +\infty[$. On considère sur $[1, +\infty[$ l'équation différentielle

$$y''(x) + q(x)y(x) = 0 \tag{E}$$

Soit y une solution de E de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[1, +\infty[$.

1. La fonction qy est continue sur $[1, +\infty[$ et donc si $s \geqslant u \geqslant 1$ on a

$$-\int_u^s q(t)y(t)\ dt = \int_u^s y''(t)\ dt = \Big[y'(t)\Big]_u^s = y'(s) - y'(u).$$

2. Avec $u = 1$, on obtient que pour tout $s \geq 1$, :

$$y'(s) = y'(1) - \int_1^s q(t)y(t)\ dt.$$

On intègre entre 1 et $x \geq 1$:

$$\int_1^x y'(s)ds = y(x) - y(1) = \int_1^x y'(1)ds - \int_1^x \left(\int_1^s q(t)y(t)\ dt\right) ds.$$

Et en divisant par x, on obtient bien :

$$\boxed{\forall x \geq 1,\ \frac{y(x)}{x} = \frac{y(1)}{x} + \frac{x-1}{x}y'(1) - \frac{1}{x}\int_1^x \left(\int_1^s q(t)y(t)\ dt\right)\ ds.}$$

On supposera désormais que la fonction $t \mapsto tq(t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et en notant

$$r = \int_1^{+\infty} |tq(t)|\ dt,$$

on supposera que $r < 1$.

3. On fixe un réel $A > 1$.
   (a) La fonction $x \longmapsto \left|\frac{y(x)}{x}\right|$ est continue sur $[1, A]$ donc elle est bornée et elle atteint ses bornes.

$$\boxed{\exists M_A > 0, \quad M_A = \max_{x\in[1,A]} \left|\frac{y(x)}{x}\right|.}$$

(b) Pour $x \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{y(x)}{x}\right| &= \left|\frac{y(1)}{x} + \frac{x-1}{x}y'(1) - \frac{1}{x}\int_1^x \left(\int_1^s q(t)y(t)\ dt\right)\ ds\right| \\
&\leq \left|\frac{y(1)}{x}\right| + \left|\frac{x-1}{x}y'(1)\right| + \frac{1}{x}\left|\int_1^x \left(\int_1^s q(t)y(t)\ dt\right)\ ds\right| \\
&\leq |y(1)| + |y'(1)| + \frac{1}{x}\left|\int_1^x \left(\int_1^s q(t)y(t)\ dt\right)\ ds\right| \\
&\leq |y(1)| + |y'(1)| + \frac{1}{x}\int_1^x \left(\int_1^s |q(t)y(t)|\ dt\right)\ ds \\
&\leq |y(1)| + |y'(1)| + \frac{1}{x}\int_1^x \left(\int_1^s |q(t)|M_A t\ dt\right)\ ds \quad \text{car } |y(t)| \leq M_A t
\end{aligned}$$

On a donc bien, $\boxed{\forall x \in [1, A],\ \left|\frac{y(x)}{x}\right| \leqslant |y(1)| + |y'(1)| + \frac{M_A}{x}\int_1^x \left(\int_1^s |tq(t)|\ dt\right)\ ds.}$

(c) On a de plus :

$$\begin{aligned}
\frac{M_A}{x}\int_1^x \left(\int_1^s |tq(t)|\ dt\right)\ ds &\leq \frac{M_A}{x}\int_1^x \left(\int_1^{+\infty} |tq(t)|\ dt\right)\ ds \\
&\leq \frac{M_A}{x}\int_1^x r\ ds = \frac{M_A r(x-1)}{x} \leq rM_A
\end{aligned}$$

On a donc d'après la question précédente :

$$\forall x \in [1, A],\ \left|\frac{y(x)}{x}\right| \leqslant |y(1)| + |y'(1)| + rM_A.$$

et donc $M_A \leqslant |y(1)| + |y'(1)| + rM_A$. Par suite, $(1-r)M_A \leqslant |y(1)| + |y'(1)|$. Et comme $1 - r > 0$ par hypothèse, on obtient finalement :

$$\boxed{M_A \leqslant \frac{|y(1)| + |y'(1)|}{1-r}.}$$

4. Soit $x \in [1, +\infty[$. Il existe $A > 1$ tel que $x \in [1, A]$ (par exemple $A = x + 1$) et donc

$$\left|\frac{y(x)}{x}\right| \leqslant M_A \leqslant \frac{|y(1)| + |y'(1)|}{1-r} = M.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la fonction } x \mapsto \frac{y(x)}{x} \text{ est bornée sur } [1, +\infty[.}$

5. *On suppose de plus que la fonction $t \mapsto t^2 q(t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.*

(a) On sait que pour tout $t \geq 1$, $|y(t)| \leqslant Mt$. Or d'après IV.1. on a :

$$|y'(s) - y'(u)| = \left|\int_u^s q(t)y(t)\ dt\right| \leqslant \int_u^s |q(t)y(t)|\ dt \leqslant M\int_u^s |tq(t)|\ dt.$$

Or si $t \in [u, s]$, on a $|tq(t)| = \frac{1}{t}|t^2 q(t)| \leqslant \frac{1}{u}|t^2 q(t)|$.

Par positivité de l'intégrale, on obtient :

$$|y'(s) - y'(u)| \leqslant \frac{M}{u} \int_u^s |t^2 q(t)| \, dt \leqslant \frac{M}{u} \int_1^{+\infty} |t^2 q(t)| \, dt = \frac{K}{u}.$$

D'après la question III.1, on obtient que $\boxed{y'(x) \text{ possède une limite finie } L \text{ lorsque } x \text{ tend vers } +\infty.}$

(b) On peut alors appliquer le résultat de la question III.4 (y est $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} y'(x) = L$).

On en déduit que $\boxed{\frac{y(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} L.}$

6. Pour l'équation différentielle (E_1) de la seconde partie on a $q(x) = \frac{1}{4x^4}$. Cette fonction est continue sur $[1, +\infty[$ et la fonction $x \longmapsto x^2 q(x) = \frac{1}{4x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann).
De plus, la fonction $x \longmapsto xq(x) = \frac{1}{4x^3}$ est elle aussi intégrable sur $[1, +\infty[$ et

$$r = \int_1^{+\infty} |tq(t)| dt = \left[\frac{-1}{8t^2} \right]_1^{\infty} = \frac{1}{8} < 1.$$

Toutes les hypothèses sont réunies, le résultat de la question 5.b s'applique :

$$\boxed{\frac{y(x)}{x} \text{ admet une limite finie lorsque } x \text{ tend vers } +\infty.}$$

Exercice

Soit $M : t \in \mathbb{R} \longmapsto M(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose que M est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \; M^2(t) = M(0) = I_n.$$

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, le polynôme $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ annule $M(t)$, comme il est scindé à racines simples, on a bien :

$$\boxed{M(t) \text{ est diagonalisable pour tout réel } t.}$$

On obtient aussi que les seules valeurs propres **possibles** de $M(t)$ sont les racines de P, c'est-à-dire 1 et -1.

2. L'application $(N, M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto M \times N$ est bilinéaire donc si $M : t \in \mathbb{R} \longmapsto M(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N : t \in \mathbb{R} \longmapsto N(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont des applications dérivables, l'applcation $f : t \in I \longmapsto M(t) \times N(t)$ est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I, \; f'(t) = M'(t) \times N(t) + M(t) \times N'(t).$$

Avec $M = N$, ici, $M^2 : t \in I \longmapsto M(t)^2$ est dérivable sur I et comme elle est constante :

$$(M^2)' = M' \times M + M \times M' = 0.$$

Par conséquent, $MM' = -M'M$. Puisque $M^2 = I_n$ (égalité de fonctions vectorielles), en multipliant par M à gauche, on obtient $M^2 M' = M' = -MM'M$.

$$\boxed{MM' = -M'M \text{ et } M' = -MM'M.}$$

3. L'application M est dérivable sur I, l'application tr est linéaire donc Φ est dérivable sur I et :

$$\text{pour tout } t \in I, \; \Phi'(t) = \text{tr}(M'(t)).$$

De plus, puisque pour tout $t \in I$, $M^2(t) = I_n$, alors $M(t)$ est inversible et son inverse est elle-même.
Par conséquent, $M't)$ et $M(t)M'(t)M(t)$ sont semblables. Elles ont donc la même trace.
Par la question 2, et par linéarité de la trace, on obtient :

$$\forall t \in I,\ \Phi'(t) = \mathrm{tr}(M'(t)) = -\mathrm{tr}(M'(t)) = -\Phi'(t).$$

Ainsi, ϕ est une fonction numérique de dérivée nulle sur I (**intervalle** donc :

$$\boxed{\Phi : t \longmapsto \mathrm{tr}(M(t)) \text{ est constante sur } \mathbb{R}.}$$

4. Par la question 3 et puisque $\Phi(0) = \mathrm{tr}(M(0)) = \mathrm{tr}(I_n) = n$, on obtient :

$$\forall t \in I,\ \Phi(t) = \mathrm{tr}(M(t)) = n.$$

Soit $t \in I$. On a vu dans la question 1, que les seules valeurs propres possibles de $M(t)$ sont 1 et -1. On note $m_1(t)$ et $m_{-1}(t)$ leurs multiplicités respectives (éventuellement nulles).
On a donc : $m_1(t) + m_{-1}(t) = n$ et $\mathrm{tr}(M(t)) = n = 1 \times m_1(t) + (-1) \times m_{-1}(t) = n - m_{-1}(t) - m_{-1}(t)$.
Donc $m_{-1}(t) = 0$, ainsi $m_1(t) = n$ et donc $\mathrm{Sp}(M(t)) = \{1\}$. Comme $M(t)$ est diagonalisable (question 1), il existe $P(t)$ inversible telle que : $M(t) = P(t)^{-1} I_n P(t) = I_n$.

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in \mathbb{R}, \text{ on a } M(t) = I_n.}$$