Devoir non surveillé 21

Pour le mardi 19 mars (facultatif)

Problème

Ce sujet a pour objet l'étude du comportement asymptotique des solutions de certaines équations différentielles linéaires du deuxième ordre.
Les deux premières parties, indépendantes entre elles, sont consacrées à des exemples. La troisième partie a pour but d'établir quelques résultats utiles pour la quatrième partie ; ces résultats pourront être éventuellement admis pour traiter la quatrième partie qui est consacrée à l'obtention d'un résultat général.
Toutes les fonctions intervenant dans ce problème sont à valeurs réelles

Questions préliminaires

1. Enoncer la formule de changement de variable dans une intégrale sur un intervalle quelconque.
2. Enoncer le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre pour une fonction

$$f : x \in I \mapsto \int_J g(x,t)\ dt$$

   où I et J sont intervalles de $\mathbb{R}$.
3. Enoncer le théorème de convergence dominée.

Première partie

On considère les intégrales impropres suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt, \quad I_3 = \int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

1. Justifier l'existence des intégrales I_1 et I_2 et les calculer.
2. Justifier l'existence de I_3 et la calculer en introduisant la fonction $\varphi : u \mapsto \sin u$.
3. On considère la fonction

$$f : x \mapsto \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\ dt.$$

   (a) Démontrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

   (b) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

   (c) Démontrer, en effectuant une intégration par parties, que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0.$$

4. On se donne une fonction q, définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$ telle que

$$\forall x \in I, q'(x) \leqslant 0$$

   et on considère une fonction z de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et solution sur I de l'équation différentielle

$$z''(x) + q(x)z(x) = 0.$$

(a) On note $u : x \mapsto q(x)z^2(x) + (z'(x))^2$. Démontrer que la fonction u est décroissante sur I.

(b) En déduire que s'il existe un réel $q_0 > 0$ tel que

$$\forall x \in I, \quad q(x) \geqslant q_0,$$

alors z est bornée sur I.

5. Soit y une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I = [1, +\infty[$ vérifiant

$$\forall x \in I, xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$$

et z la fonction définie sur I par $z(x) = \sqrt{x}y(x)$. Déterminer une fonction q telle que

$$\forall x \in I, \quad z''(x) + q(x)z(x) = 0.$$

6. Démontrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$\forall x \in I, \quad |f(x)| \leqslant \frac{M}{\sqrt{x}}$$

où f est la fonction définie en 3 de cette partie.

Deuxième partie

Soit y une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$, à valeurs réelles. On considère alors la fonction z définie sur $]0, +\infty[$ par $z(t) = y\left(\frac{1}{t}\right)$.

1. Démontrer que y est une solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$4x^4y''(x) - y(x) = 0 \tag{E_1}$$

si et seulement si z est une solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$4tz''(t) + 8z'(t) - tz(t) = 0 \tag{E_2}$$

2. (a) Démontrer qu'une série entière $u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ à coefficients réels (a_n) et de rayon de convergence non nul R satisfait

$$\forall t \in]-R, R[, \quad 4tu''(t) + 8u'(t) - tu(t) = 0, \quad u(0) = 1$$

si et seulement si

$$\forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p+1} = 0,\ a_{2p} = \frac{1}{4^p(2p+1)!}.$$

(b) Déterminer le rayon de convergence et expliciter la somme de la série entière obtenue en 2a à l'aide des fonctions usuelles.

3. Déterminer une solution y de (E_1) sur $]0, +\infty[$ autre que la fonction nulle telle que $\frac{y(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Troisième partie

1. Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle qu'il existe un réel $C > 0$ tel que pour tout couple (s, u) de nombres réels avec $s \geqslant u \geqslant 1$, on ait
$$|f(s) - f(u)| \leqslant \frac{C}{u}.$$
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $u_n = f(n^2)$.
   (a) Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(u_{n+1} - u_n)$ est absolument convergente.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. On notera L sa limite (on ne demande pas de calculer L).
   (c) Démontrer que $f(s) \underset{s\to+\infty}{\longrightarrow} L$.
2. Soit g une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ telle que $g'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   (a) Démontrer que g' est bornée sur $[0, +\infty[$. On notera alors M un réel tel que $|g'(x)| \leqslant M$ pour tout $x \geqslant 0$.
   (b) Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Démontrer, en citant avec soin le théorème utilisé, que
$$\int_0^1 g'(tx_n)\, dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
   En déduire que $\dfrac{g(x_n)}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   (c) En déduire que $\dfrac{g(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. Soit h une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. On suppose que h' possède une limite finie L en $+\infty$. Démontrer en considérant la fonction $g : x \mapsto h(x) - Lx$ que $\dfrac{h(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L$.
4. En déduire que si u est une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ et telle que u' possède une limite finie L en $+\infty$, alors $\dfrac{u(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L$.

Quatrième partie

On se donne une fonction q définie et continue sur $[1, +\infty[$. On considère sur $[1, +\infty[$ l'équation différentielle
$$y''(x) + q(x)y(x) = 0 \qquad (E)$$
Soit y une solution de E de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[1, +\infty[$.

1. Vérifier que pour tout couple (s, u) de réels tels que $s \geqslant u \geqslant 1$, on a
$$y'(s) - y'(u) = -\int_u^s q(t)y(t)\, dt.$$
2. En prenant $u = 1$, déduire du 1 de cette partie que pour tout réel $x \geqslant 1$,
$$\frac{y(x)}{x} = \frac{y(1)}{x} + \frac{x-1}{x}y'(1) - \frac{1}{x}\int_1^x \left(\int_1^s q(t)y(t)\, dt\right) ds.$$

On supposera désormais que la fonction $t \mapsto tq(t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et en notant

$$r = \int_1^{+\infty} |tq(t)|\ dt,$$

on supposera que $r < 1$.

3. On fixe un réel $A > 1$.
   (a) Justifier l'existence du réel $M_A = \max_{x \in [1,A]} \left| \dfrac{y(x)}{x} \right|$.
   (b) Démontrer que pour tout $x \in [1, A]$,
   $$\left| \frac{y(x)}{x} \right| \leqslant |y(1)| + |y'(1)| + \frac{M_A}{x} \int_1^x \left(\int_1^s |tq(t)|\ dt \right)\ ds.$$
   (c) En déduire que
   $$M_1 \leqslant \frac{|y(1)| + |y'(1)|}{1 - r}.$$
4. Démontrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{y(x)}{x}$ est bornée sur $[1, +\infty[$.
5. *On suppose de plus que la fonction $t \mapsto t^2 q(t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.*
   (a) Déduire des questions 1 et 4 de cette partie l'existence d'un réel $K > 0$ tel que pour tout couple (s, u) de réels vérifiant $s \geqslant u \geqslant 1$, on ait
   $$|y'(s) - y'(u)| \leqslant \frac{K}{u}$$
   et en déduire que $y'(x)$ possède une limite finie L lorsque x tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire que $\dfrac{y(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} L$.
6. Peut-on affirmer, pour toute solution y de l'équation différentielle E_1 de la deuxième partie, l'existence d'une limite à $\dfrac{y(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$? Justifier la réponse.

Exercice

Soit $M : t \in \mathbb{R} \longmapsto M(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose que M est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ M^2(t) = M(0) = I_n.$$

1. Montrer que $M(t)$ est diagonalisable pour tout réel t.
2. Montrer que : $MM' = -M'M$ et $M' = -MM'M$.
3. Montrer que $\Phi : t \longmapsto \mathrm{tr}(M(t))$ est constante sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer $M(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.