Devoir non surveillé 20 - Correction

Exercice 1

1. $(\mathcal{E}_1):\ y''-5y'+6y=e^{2x}$.
   L'équation caractéristique associée à $(\mathcal{E}_1)$ est :
   $$r^2-5r+6=(r-2)(r-3)=0$$
   Et donc les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E}_1)$ sont les
   $$x\in\mathbb{R}\longmapsto Ae^{2x}+Be^{3x}\qquad (A,B)\in\mathbb{R}^2$$
   On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x)=axe^{2x}$.
   On a donc $y_p'(x)=a(1+2x)e^{2x}$ et $y_p''(x)=4a(1+x)e^{2x}$.
   Le calcul donne : y_p solution de $(\mathcal{E}_1)$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si
   $$\forall x\in\mathbb{R},\qquad ae^{2x}(4(1+x)-5(1+2x)+6x)=e^{2x}$$
   c'est-à-dire si et seulement si $a=-1$.
   Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}\mathrm{ol}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}_1)=\{x\longmapsto Ae^{2x}+Be^{3x}-xe^{2x},\ (A,B)\in\mathbb{R}^2\}\,.}$
2. $(\mathcal{E}_2):\ y''-4y'+4y=x+1$.
   L'équation caractéristique associée à $(\mathcal{E}_2)$ est :
   $$r^2-4r+4=(r-2)^2=0$$
   Et donc les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E}_2)$ sont les
   $$x\in\mathbb{R}\longmapsto (Ax+B)e^{2x}\qquad (A,B)\in\mathbb{R}^2$$
   On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x)=ax+b$.
   On a donc $y_p'(x)=a$ et $y_p''(x)=0$.
   Le calcul donne : y_p solution de $(\mathcal{E}_2)$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si
   $$\forall x\in\mathbb{R},\qquad 0-4a+4(ax+b)=x+1.$$
   Il suffit de choisir a et b tels que $4a=1$ et $4b-4a=1$, c'est-à-dire $a=\dfrac{1}{4}$ et $b=\dfrac{1}{2}$.
   Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}\mathrm{ol}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}_2)=\left\{x\longmapsto (Ax+B)e^{2x}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2},\ (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$
3. $(\mathcal{E}_3):\ y''+4y=\sin(x)$.
   L'équation caractéristique associée à $(\mathcal{E}_3)$ est :
   $$r^2+4=(r-2i)(r+2i)=0$$

Et donc les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E}_3)$ sont les

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto A\cos(2x) + B\sin(2x) \qquad (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$.
On a donc $y_p'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x)$ et $y_p''(x) = -a\cos(x) - b\sin(x)$.
Le calcul donne : y_p solution de $(\mathcal{E}_3)$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (-a+4a)\cos(x) + (-b4-4b)\sin(x) = \sin(x).$$

Il suffit de choisir a et b tels que $3a = 0$ et $3b = 1$, c'est-à-dire $a = 0$ et $b = \dfrac{1}{3}$.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}\mathrm{ol}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}_3) = \left\{ x \longmapsto A\cos(2x) + B\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(x),\ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$

Exercice 2

1. Cette matrice symétrique réelle se diagonalise rapidement :

$$D = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} X' = BX \iff X' = PDP^{-1}X &\iff (P^{-1}X)' = DP^{-1}X \\ &\iff Y' = DY \quad \text{avec } Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} u' = -u \\ v' = v \\ w' = 3w \end{cases} \quad \text{avec } X = PY = P\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \\ &\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = P\begin{pmatrix} ae^{-t} \\ be^{t} \\ ce^{3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On obtient $\boxed{\mathcal{S}\mathrm{ol}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}_1) = \left\{ t \in \mathbb{R} \longmapsto ae^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + be^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + ce^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.}$

Exercice 3

• L'équation homogène associée à $\mathcal{E}$ est

$$(\mathcal{E}_0) : xy' - y = 0.$$

On pose $I =]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$.
La fonction $a : x \longmapsto -\dfrac{1}{x}$ est continue sur I et admet pour primitive $A : x \longmapsto -\ln|x|$.

Et donc, les solutions de $\mathcal{E}_0$ sur I sont les $x \longmapsto Ce^{-A(x)} = Ce^{\ln|x|} = C|x| = Dx$ (avec $D = C$ si $I =]0, +\infty[$ et $D = -C$ sinon).

• On cherche une solution particulière de $\mathcal{E}$ par variation de la constante. On pose $y(x) = C(x)x$ avec C dérivable sur I. On a donc $\forall x \in I,\ y'(x) = C(x) + xC'(x)$ et

$$y \in \mathcal{S}\mathrm{ol}_I(\mathcal{E}) \iff \forall x \in I,\ x(C(x) + xC'(x)) - xC(x) = x^2C'(x) = x,$$

$$\iff \forall x \in I,\ C'(x) = \frac{1}{x}.$$

Prenons par exemple, $C(x) = \ln|x|$, on obtient donc $y(x) = x\ln|x|$ et

$$\boxed{\mathcal{S}\mathrm{ol}_I(\mathcal{E}) = \{x \in I \longmapsto Dx + x\ln|x|,\ D \in \mathbb{R}\}.}$$

• Supposons qu'il existe une solution y de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$.
D'après ce qui précède, il existe des constantes réelles D_1 et D_2 telles que

$$\forall x > 0, \quad y(x) = D_1x + x\ln(x)$$
$$\forall x < 0, \quad y(x) = D_2x + x\ln(-x)$$

En $x = 0$, on trouve $y(0) = 0$ (dans $(\mathcal{E})$) et on peut vérifier que, quelques soient D_1 et D_2, une telle fonction est bien continue sur $\mathbb{R}$.
Cependant, pour tout $x > 0$, on a $\dfrac{y(x) - y(0)}{x - 0} = D_1 + \ln(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$. Et donc y n'est pas dérivable en 0. Ceci contredit la définition de solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ donc : $\boxed{\text{Il n'existe pas de solution de } (\mathcal{E}) \text{ sur } \mathbb{R}.}$

Exercice 4

• L'équation homogène associée à $\mathcal{E}$ est

$$(\mathcal{E}_0) : y' - \frac{x}{x^2 - 1}y = 0.$$

La fonction $a : x \longmapsto -\dfrac{x}{x^2 - 1}$ est continue sur $]1, +\infty[$ et admet pour primitive

$$A : x \longmapsto -\frac{1}{2}\ln|x^2 - 1| = -\frac{1}{2}\ln(x^2 - 1).$$

Et donc, les solutions de $\mathcal{E}_0$ sur $]1, +\infty[$ sont les $x \longmapsto Ce^{-A(x)} = Ce^{\frac{1}{2}\ln(x^2-1)} = C\sqrt{x^2 - 1}$.

• On cherche une solution particulière de $\mathcal{E}$ par variation de la constante. On pose $y(x) = C(x)\sqrt{x^2 - 1}$ avec C dérivable sur I. On a donc $\forall x \in I,\ y'(x) = \sqrt{x^2 - 1}C'(x) + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}C(x)$ et

$$y \in \mathcal{S}\mathrm{ol}_I(\mathcal{E}) \iff \forall x \in I,\ C'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Prenons par exemple, $C(x) = 2\sqrt{x^2 - 1}$, on obtient donc $y(x) = 2(x^2 - 1)$ et

$$\boxed{\mathcal{S}\mathrm{ol}_{]1,+\infty[}(\mathcal{E}) = \left\{x \in I \longmapsto C\sqrt{x^2 - 1} + 2(x^2 - 1),\ C \in \mathbb{R}\right\}.}$$

Exercice 5

On note $I =]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $y : t \in]0, +\infty[\longmapsto t^\alpha$.
   Avec la rédaction du cours, on obtient que y est solution de $(\mathcal{E}_0)$ si et seulement si $\alpha(\alpha-1)-2=0$ c'est-à-dire si et seulement si $\alpha = -1$ ou 2.
   Et finalement, ces fonctions sont aussi solutions $]-\infty, 0[$.
   On note $y_1 : t \in I \longmapsto t^2$ et $y_2 : t \in I \longmapsto \dfrac{1}{t}$.
   Puisque les fonctions coefficients de $(\mathcal{E}_0)$ sont continues sur I et que $a(t) = t^2$ ne s'annule pas sur I, par le théorème de structure, $\mathcal{S}\mathrm{ol}_I(\mathcal{E}_0)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Et comme $\{y_1, y_2\}$ est une famille libre de cet espace, c'en est une base.

$$\boxed{\mathcal{S}\mathrm{ol}_I(\mathcal{E}_0) = \mathrm{Vect}\{y_1, y_2\} = \left\{t \in I \longmapsto At^2 + \frac{B}{t},\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

   On pourrait chercher les solutions sur $\mathbb{R}$ (fonctions deux fois dérivables).
   On obtiendrait que $\mathcal{S}\mathrm{ol}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}_0) = \{t \in I \longmapsto At^2,\ A \in \mathbb{R}\}$.
2. Cette question est plus difficile que celle du cours. En effet puisque $t \mapsto t^2$ est solution de $(\mathcal{E}_0)$, on ne peut pas trouver de solution de $(\mathcal{E})$ sous la forme $t \mapsto At^2$.
   À l'instar de la méthode de variation de la constante pour une équation d'ordre 1, et de la méthode de Lagrange, on cherche une solution sous la forme :

$$y : t \longmapsto z(t)t^2$$

   avec z deux fois dérivable sur I. On aurait pu aussi prendre $y(t) = \dfrac{z(t)}{t}$.
   Après calculs, on obtient que y est solution de $(\mathcal{E})$ sur I si et seulement si :

$$\forall t \in I,\ t^2 z''(t) + 4tz'(t) = 3.$$

   Ainsi, $Z = z'$ est solution sur I de $Z' + \dfrac{4}{t}Z = \dfrac{3}{t^2}$.
   Les solutions de l'équation homogène sont les $t \longmapsto \dfrac{C}{t^4}$. Et par variation de la constante (à faire), on trouve que y est solution de $(\mathcal{E})$ sur I si et seulement si :

$$\exists D \in \mathbb{R},\ \forall t \in \quad z'(t) = \frac{1}{t} + \frac{D}{t^4}$$

   ou encore si et seulement si :

$$\exists A, B \in \mathbb{R},\ \forall t \in \quad z(t) = \ln|t| + \frac{B}{t^3} + A$$

   ou encore si et seulement si :

$$\exists A, B \in \mathbb{R},\ \forall t \in \quad y(t) = t^2 z(t) = t^2 \ln|t| + \frac{B}{t} + At^2$$

   Ainsi, une solution particulière de $(\mathcal{E})$ sur I est $t \longmapsto t^2 \ln|t|$.

$$\boxed{\mathcal{S}\mathrm{ol}_I(\mathcal{E}) = \left\{t \in I \longmapsto t^2 \ln|t| + At^2 + \frac{B}{t},\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

   On pourrait démontrer qu'il n'existe pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

1. On trouve que $x \mapsto \dfrac{1}{2}e^{-x}$ est solution particulière de $(\mathcal{E})$.
2. On note $(\mathcal{E}')$: $(1+x)Z' + (2x+1)Z = 0$.

   • Solutions sur I :
   L'application $a : x \longmapsto a(x) = \dfrac{2x+1}{1+x} = 2 - \dfrac{1}{1+x}$ est continue sur I et $A : x \longmapsto 2x - \ln|1+x|$ en est une primitive. Et donc, les solutions de $(\mathcal{E}')$ sont les
   $$Z : x \in I \longmapsto Ce^{-2x+\ln|1+x|} = Ce^{-2x}|1+x| = De^{-2x}(1+x) \qquad (C \in \mathbb{R})$$

   • Solutions sur I :
   Si Z est une solution de $(\mathcal{E}')$ sur $\mathbb{R}$ alors $Z(-1) = 0$ et il existe des constantes réelles A et B telles que :
   $\forall x > -1, \quad Z(x) = Ae^{-2x}(1+x) \qquad$ et $\qquad \forall x < -1, \quad Z(x) = Be^{-2x}(1+x)$
   On montre assez facilement qu'une telle fonction est bien continue sur $\mathbb{R}$ (aucune contrainte sur A et B).
   De plus si $x > -1$ alors $\dfrac{Z(X) - Z(-1)}{X - (-1)} = Ae^{-2x} \underset{x \to -1^+}{\longrightarrow} Ae^2$
   et si $x < -1$ alors $\dfrac{Z(X) - Z(-1)}{X - (-1)} = Be^{-2x} \underset{x \to -1^+}{\longrightarrow} Be^2$.
   Donc Z est dérivable en -1 si et seulement si $Ae^2 = Be^2$ i.e. $A = B$.
   Finalement, si Z est solution sur $\mathbb{R}$ alors il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $Z : x \in \mathbb{R} \longmapsto Ae^{-2x}(1+x)$.
   Et réciproquement, ces fonctions sont bien solution de $(\mathcal{E}')$ sur $\mathbb{R}$.

   • Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}\mathrm{ol}_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{R} \longmapsto Ae^{-2x}(1+x),\ A \in \mathbb{R}\}.}$
3. On remarque que exp est solution de $(\mathcal{E}_0)$: $(1+x)y'' - y' - xy = 0$. On résout $(\mathcal{E}_0)$ sur $\mathbb{R}$ par la méthode de Lagrange.
   Soit $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. On pose $z(x) = \dfrac{y(x)}{e^x}$, l'application z est aussi deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
   $$\begin{array}{rcl} y(x) & = & e^x z(x) \\ y'(x) & = & e^x z(x) + e^x z'(x) \\ y''(x) & = & e^x z(x) + 2e^x z'(x) + e^x z''(x) \end{array}$$
   On a donc les équivalences suivantes.
   $$\begin{array}{rcl} y \in \mathcal{S}\mathrm{ol}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}_0) & \Longleftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ (1+x)y''(x) - y'(x) - xy(x) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ e^x\Big((1+x)z''(x) + (2(1+x)-1)z'(x) + \underbrace{((1+x) - 1 - x)}_{=0} z(x)\Big) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ (1+x)z''(x) + (2x+1)z'(x) = 0 \\ & \underset{\text{Question 2}}{\Longleftrightarrow} & \exists D \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ z'(x) = De^{-2x}(1+x) \\ & \Longleftrightarrow & \exists D \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = D\displaystyle\int e^{-2x}(1+x)dx \\ & \Longleftrightarrow & \exists (D,E) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ z(x) = -\dfrac{D}{4}e^{-2x}(2x+3) + E \qquad (IPP) \\ & \Longleftrightarrow & \exists (F,E) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = z(x)e^x = Fe^{-x}(2x+3) + Ee^x \end{array}$$
   On obtient donc les solutions de $(\mathcal{E}_0)$: $\boxed{\mathcal{S}\mathrm{ol}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}_0) = \{x \longmapsto Fe^{-x}(2x+3) + Ee^x,\ (E,F) \in \mathbb{R}^2\}.}$

4. On connaît les solutions de $(\mathcal{E}_0)$, et puisque $x \mapsto \dfrac{1}{2}e^{-x}$ est solution particulière de $(\mathcal{E})$, on trouve :

$$\boxed{\mathcal{S}\text{ol}_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}) = \left\{ x \longmapsto Fe^{-x}(2x+3) + Ee^{x} + \frac{1}{2}e^{-x},\ (E,F) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Exercice 7

1. En mutlipliant par e^x, on obtient que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x f'(x) + e^x f(x) = (\exp \times f)'(x) = 1$. Et comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)e^x = x + C.$$

   Ainsi $f(x) = xe^{-x} + Ce^{-x}$ et $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = f'(x) + f(x)$. Par hypothèse, on a donc $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.
   De plus, f est solution de $(E) : y' + y = g$.
   Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x f'(x) + e^x f(x) = (\exp \times f)'(x) = g(x)e^x$. Et comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)e^x = \int_0^x g(t)e^t dt + C.$$

   Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x} \displaystyle\int_0^x g(t)e^t dt + Ce^{-x}$.
   Le second terme tend bien vers 0 quand $x \to +\infty$.
   On s'intéresse au premier.
   Soit $\varepsilon > 0$. On sait que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ donc il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geq A, |g(x)| \leq \varepsilon$.
   Et donc pour tout $x \geq a$, on a :

$$\left| e^{-x} \int_A^x g(t)e^t dt \right| \leq e^{-x} \int_A^x |g(t)| e^t dt \leq \varepsilon e^{-x} \int_A^x e^t dt = \varepsilon e^{-x}(e^x - e^A) \leq \varepsilon(1 - e^{-(x-A)}) \leq \varepsilon.$$

   Ainsi, par définition de limite, $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} \displaystyle\int_A^x g(t)e^t dt = 0$.

   Enfin, puisque $f(x) = e^{-x} \displaystyle\int_0^A g(t)e^t dt + e^{-x} \int_A^x g(t)e^t dt + Ce^{-x}$, on a bien $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$

Problème 1
Centrale PC 2019 maths 2 (Partie 1)

à partir d'un corrigé de L. Carrot

Soit l'intervalle $I =]-\pi/2, \pi/2[$. On considère la fonction f définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x}.$$

On note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f et, par convention, $f^{(0)} = f$.

I - Dérivées successives

1. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I comme quotient de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur I et, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(\cos x)^2 + \sin(x)(\sin(x)+1)}{(\cos x)^2} = \frac{1+\sin x}{(\cos x)^2}, \\
f''(x) &= \frac{(\cos x)^3 + 2\sin x \cos x(1+\sin x)}{(\cos x)^4} = \frac{(\cos x)^2 + 2\sin x + 2(\sin x)^2}{(\cos x)^3} \\
&= \frac{(\sin x)^2 + 2\sin x + 1}{(\cos x)^3} \\
\text{et } f^{(3)}(x) &= \frac{(2\cos x \sin x + 2\cos x)(\cos x)^3 + 3\sin x(\cos x)^2((\sin x)^2 + 2\sin x + 1)}{(\cos x)^6} \\
&= \frac{2(\cos x)^2 \sin x + 2(\cos x)^2 + 3(\sin x)^3 + 6(\sin x)^2 + 3\sin x}{(\cos x)^4} \\
&= \frac{(\sin x)^3 + 4(\sin x)^2 + 5\sin x + 2}{(\cos x)^4}.
\end{aligned}$$

2. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\exists P_n \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}} \qquad (\mathcal{HR}_n).$$

Initialisation : D'après la question précédente, les polynômes $P_0 = X+1$, $P_1 = X+1$, $P_2 = X^2+2X+1$ et $P_3 = X^3 + 4X^2 + 5X + 2$ conviennent.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. et supposons $\mathcal{HR}_n$ vérifiée.
Alors, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = \left(\frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}\right)' &= \frac{\cos x P_n'(\sin x)(\cos x)^{n+1} + (n+1)\sin x(\cos x)^n P_n(\sin x)}{(\cos x)^{2n+2}} \\
&= \frac{(\cos x)^2 P_n'(\sin x) + (n+1)\sin x P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}} \\
&= \frac{(1-(\sin x)^2)P_n'(\sin x) + (n+1)\sin x P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}} = \frac{P_{n+1}(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}
\end{aligned}$$

en posant $P_{n+1}(X) = (1-X^2)P_n'(X) + (n+1)XP_n(X) \in \mathbb{R}[X]$. (car $P \in \mathbb{R}[X]$ d'après $\mathcal{HR}_n$).
Conclusion :
D'où l'existence d'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que pour tout $x \in I$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$.
De plus, cette suite vérifie $P_{n+1}(X) = (1-X^2)P_n'(X) + (n+1)XP_n(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. • *Montrons d'abord l'unicité de la suite (P_n). L'article défini "le" de l'énoncé semble indiquer qu'elle est demandée...*
Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons qu'il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que pour tout $x \in I$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}} = \frac{Q_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$

Alors, pour tout $x \in I$, $(P_n - Q_n)(\sin x) = 0$, donc, comme $\sin(I) =]-1,1[$, pour tout $t \in]-1,1[$, $(P_n - Q_n)(t) = 0$, donc $P_n - Q_n$ a une infinité de racines, donc $P_n - Q_n = 0$, donc $P_n = Q_n$.
Il y a donc bien unicité de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

• La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie donc $P_{n+1}(X) = (1-X^2)P_n'(X) + (n+1)XP_n(X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• Montrons alors par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est unitaire, de degré n et que ses coefficients sont des entiers naturels $(\mathcal{HR}_n)$.

Initialisation :
$P_1 = X+1$ et $P_2 = X^2+2X+1$ sont bien unitaires à coefficients dans $\mathbb{N}$ et $\deg(P_1) = 1$ et $\deg(P_2) = 2$.

Hérédité : Soit $n \geq 2$ et supposons $\mathcal{HR}_n$ vérifiée.

Alors il existe $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$ tel que $P_n = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et, par suite,

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= (1-X^2)P_n'(X) + (n+1)XP_n(X) \\
&= (1-X^2)\left(nX^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} ka_kX^{k-1}\right) + (n+1)X\left(X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_kX^k\right) \\
&= nX^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} ka_kX^{k-1} - nX^{n+1} - \sum_{k=1}^{n-1} ka_kX^{k+1} + (n+1)X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1}(n+1)a_kX^{k+1} \\
&= X^{n+1} + nX^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)a_{k+1}X^k + (n+1)a_0X + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{(n+1-k)a_k}_{\in\mathbb{N}} X^{k+1} \in \mathbb{N}[X]
\end{aligned}$$

comme somme de polynômes à coefficients dans $\mathbb{N}$ (et $\mathbb{N}$ est stable par addition). De plus, cette écriture donne immédiatement P_{n+1} unitaire de degré $n+1$.
Conclusion :
D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est unitaire, de degré n et que ses coefficients sont des entiers naturels.

4. Pour tout $x \in I$,

$$f(x)^2 + 1 = \frac{(\sin x + 1)^2}{(\cos x)^2} + 1 = \frac{(\sin x)^2 + 2\sin x + 1 + (\cos x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{2 + 2\sin x}{(\cos x)^2} = 2f'(x).$$

5. • En appliquant la relation obtenue dans la question précédente en $x = 0$, on obtient

$$2f'(0) = (f(0))^2 + 1, \quad \text{ie} \quad 2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en dérivant n fois la relation obtenue à la question précédente, on obtient, via la formule de Leibniz (f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I) :

$$\begin{aligned}
\forall x \in I, \quad 2f^{(n+1)}(x) &= 2(f')^{(n)}(x) = ((f(x))^2+1)^{(n)} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(f(x))^{(k)}(f(x))^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)f(x)^{(n-k)}(x).
\end{aligned}$$

En appliquant alors en 0, on a bien la relation demandée.

II - Développement en série entière

6. f est de classe $\mathcal{C}^{N+1}$ sur I, donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on peut lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale et on a, pour tout $x \in [0, \pi/2[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)dt \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!} x^n + \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} \frac{P_{N+1}(\sin(t))}{(\cos(t))^{N+2}} dt. \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in [0, \pi/2[$, pour tout $t \in [0, x]$, $\dfrac{(x-t)^N}{N!} \geq 0$, $(\cos(t))^{N+2} \geq 0$ (car $t \in [0, \pi/2[$) et, comme P_{N+1} est à coefficients (entiers) positifs et $\sin(t) \geq 0$, $P_{N+1}(\sin(t)) \geq 0$.

On a donc $\dfrac{(x-t)^N}{N!} \dfrac{P_{N+1}(\sin(t))}{(\cos(t))^{N+2}} \geq 0$ pour tout $t \in [0, x]$, donc, par positivité de l'intégrale ($x \geq 0$),

$$f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!} x^n = \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} \frac{P_{N+1}(\sin t)}{(\cos t)^{N+2}} dt \geq 0,$$

donc $\boxed{\forall x \in [0, \pi/2[,\ \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!} x^n \leq f(x).}$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $\alpha_n = f^{(n)}(0) = \dfrac{P_n(\sin 0)}{(\cos 0)^{n+1}} = P_n(0)$, α_n est le coefficient constant de P_n, donc un élément de $\mathbb{N}$ (même pour $n = 0$ car $P_0 = X + 1$), donc positif.

Pour tout $x \in [0, \pi/2[$ la série numérique $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ est donc à termes positifs, donc la suite des sommes partielles $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!} x^n\right)_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante, et majorée par $f(x)$ d'après la question précédente, donc convergente, donc $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ converge.

Ceci étant valable pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a bien $\boxed{R \geq \pi/2.}$

8. Pour tout $x \in I$, on a $|x| < R$, donc, par produit de Cauchy de séries entières à l'intérieur du disque de convergence (absolue convergence),

$$\begin{aligned} (g(x))^2 + 1 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} x^n\right)^2 + 1 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k!} \frac{\alpha_{n-k}}{(n-k)!}\right) x^n + 1 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \alpha_k \alpha_{n-k}\right) x^n + 1 \\ &= \alpha_0^2 + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}\right) x^n \\ &= 2\alpha_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha_{n+1}}{n!} x^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{\alpha_{n+1}}{(n+1)!} x^n = 2g'(x). \end{aligned}$$

9. Par opérations sur les fonctions dérivables, les fonctions $F = \arctan \circ f$ et $G = \arctan \circ g$ sont dérivables sur I et on a :

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} = \frac{1}{2} = \frac{g'(x)}{1 + g^2(x)} = G'(x).$$

Comme I est un intervalle, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad F(x) = G(x) + C.$$

En $x = 0$, on trouve :

$$F(0) = \arctan(f(0)) = \arctan(1) = \pi/4 \text{ et } G(0) = \arctan(g(0)) = \arctan(\alpha_0) = \arctan(f(0)) = \pi/4.$$

Donc $C = 0$. Et comme la fonction arctan est injective : $\boxed{\forall x \in I, \quad f(x) = g(x).}$

10. Si on avait $R > \pi/2$, par propriété des séries entières, g serait continue en $\pi/2$, et on aurait :

$$\lim_{x \to \pi/2^-} f(x) = \lim_{x \to \pi/2^-} g(x) = g(\pi/2).$$

Mais $f(x) = \dfrac{\sin x + 1}{\cos x} \underset{x \to \pi/2^-}{\longrightarrow} +\infty$ d'où la contradiction.

Ainsi $R \leq \pi/2$, et avec le résultat de la question 7, on obtient $\boxed{R = \pi/2.}$

III - Partie paire et partie impaire du développement en série entière

11. c.f. Cours (E) de colle.
12. Pour tout $x \in I$, $f(x) = \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{\sin x}{\cos x}$ où $x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$ est paire et $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$ est impaire.
Par ailleurs, pour tout $x \in I$, comme les séries qui apparaissent ci-dessous convergent,

$$f(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

où $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$ est paire et $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ est impaire.
D'où, d'après l'unicité de la décomposition prouvée à la question précédente, on a :

$$\boxed{\forall x \in I, \quad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}.}$$

On note t la fonction définie sur I par $t(x) = \tan(x)$.

13. tan est développable en série entière sur I, donc coïncide avec sa série de Taylor $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!} x^n$ sur I, donc, par unicité du développement en série entière de tan sur I, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\tan^{(2n)}(0) = 0 \text{ et } \tan^{(2n+1)}(0) = \alpha_{2n+1}.$$

14. Pour tout $x \in I$, $\tan'(x) = 1 + (\tan x)^2$, donc $t' = 1 + t^2$.
15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dérive l'égalité obtenue à la question précédente $2n$ fois (avec la formule de Leibniz) et on évalue en 0.

$$\tan^{(2n+1)}(0) = \sum_{0}^{2n} \binom{2n}{k} t^{(k)}(0) t^{(2n-k)}(0) + 0.$$

Or $t^{(k)}(0) = 0$ si k est pair, d'où $\boxed{\alpha_{2n+1} = \displaystyle\sum_{0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} \alpha_{2k+1} \alpha_{2n-2k-1}.}$

Problème 2
Centrale MP 2022 Mathématiques 2

Une correction de E. Lucas

I Inégalités d'interpolation des dérivées

I.A - Cas particulier $K = 1$

Q 1. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$. Soit $x \in [0,1]$.
Selon l'inégalité des accroissements finis appliquée à f dérivable sur l'intervalle $[0,1]$. On a

$$|f(x) - f(x_1)| \leqslant \|f'\|_\infty \cdot |x - x_1| \leqslant \|f'\|_\infty$$

Par inégalité triangulaire, on a donc $|f(x)| \leqslant \|f'\|_\infty + 1 \cdot |f(x_1)|$
Comme c'est vrai pour tout $x \in [0,1]$, on a alors

$$\|f\|_\infty \leqslant \|f'\|_\infty + 1 \cdot |f(x_1)|$$

Ceci montre $\boxed{\text{l'inégalité d'interpolation (I.2) avec } C = 1}$

Q 2. $\boxed{\text{Pour } C \in]0,1[\text{ et la fonction } f : x \mapsto 1 \text{ l'inégalité d'interpolation (I.2) est fausse}}$ car

$$\|f\|_\infty = 1 > C = 0 + C \times 1 = \|f'\|_\infty + C \cdot |f(x_1)|$$

I.B - Cas particulier $K = 2$

Q 3. Soit $x \in [0,1]$ et $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$. L'égalité des accroissements finis appliquée à f dérivable sur $]x_1, x_2[$ et continue sur $[x_1, x_2]$, nous fournit $c \in]x_1, x_2[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$
Ainsi l'inégalité des accroissements finis appliquée à f' de de classe $\mathcal{C}^1$ nous donne :

$$\left| f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| = |f'(x) - f'(c)| \leqslant \|f''\|_\infty \cdot |x' - c|$$

Ce qui permet de conclure : $\boxed{\left| f'(x) - \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leqslant \|f''\|_\infty}$

Q 4. Avec l'inégalité triangulaire et comme $x_2 - x_1 > 0$, on en déduit que

$$\forall x \in [0,1],\ |f'(x)| \leqslant \left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| + \|f''\|_\infty \leqslant \|f''\|_\infty + \frac{|f(x_1)| + |f(x_2)|}{x_2 - x_1}$$

on a bien $\boxed{\|f'\|_\infty \leqslant \|f''\|_\infty + \dfrac{|f(x_1)| + |f(x_2)|}{x_2 - x_1}}$

Q 5. Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$. Avec $C = 1 + \dfrac{1}{x_2 - x_1}$, on a $C \geqslant \dfrac{1}{x_2 - x_1}$, on déduit de Q4 que

$$\|f'\|_\infty \leqslant \|f''\|_\infty + C\,(|f(x_1)| + |f(x_2)|)$$

On a selon $I.2$ selon Q2 et Q4 :

$$\|f\|_\infty \leqslant \|f'\|_\infty + 1 \cdot |f(x_1)| \leqslant \|f''\|_\infty + \frac{|f(x_1)| + |f(x_2)|}{x_2 - x_1} + 1 \cdot |f(x_1)|$$

Comme $C \geqslant \dfrac{1}{x_2 - x_1}$, on a alors $\|f\|_\infty \leqslant \|f''\|_\infty + C\,|f(x_1)| + C\,|f(x_2)|$

Dans le cas $K = 2$, on a bien montré $\boxed{\text{l'inégalité d'interpolation (I.3) avec } C = 1 + \dfrac{1}{x_2 - x_1}}$

I.C - Cas général par interpolation de Lagrange

Q 6. On a facilement $\forall P, Q \in \mathbb{R}_{K-1}[X],\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \psi(\lambda P + Q) = \lambda \Psi(P) + \Psi(Q)$ ainsi $\psi \in \left(\mathbb{R}_{K-1}[X], \mathbb{R}^K\right)$.
Soit $P \in \ker(\Psi)$. On a $\Psi(P) = 0$.
Donc $P(x_1) = \cdots = P(x_K) = 0$. Ainsi P admet au moins K racines distinctes.
Or $\deg(P) \leqslant K - 1$, d'où $P = 0$.
L'autre inclusion étant évidente, on a $\ker(\Psi) = \{0\}$ d'où Ψ est injective.
Comme $\dim(\mathbb{R}_{K-1}[X]) = K = \dim\left(\mathbb{R}^K\right)$, on conclut que

$$\boxed{\text{l'application } \Psi \text{ est un isomorphisme d'espaces vectoriels}}$$

Q 7. Je note $(e_1, \ldots, e_K)$ la base canonique de $\mathbb{R}^K$.
Pour $i \in [\![1, K]\!]$, je pose $L_i = \Psi^{-1}(e_i)$ de sorte que

$$L_i \in \mathbb{R}_{K-1}[X] \text{ et } \forall j \in [\![1, K]\!],\ L_i(x_j) = \delta_{i,j}$$

Ainsi $\boxed{P = \sum_{j=1}^{K} f(x_j)\, L_j \in \mathbb{R}[X] \text{ vérifie } \forall \ell \in [\![1, K]\!],\ P(x_\ell) = \sum_{j=1}^{K} f(x_j)\, \delta_{j,\ell} = f(x_\ell)}$

On aurait pu poser $L_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{K} \dfrac{X - x_j}{x_i - x_j}$ *mais cela ne semble pas être dans l'esprit du sujet.*

Q 8. On procède par récurrence bornée.
<u>L'initialisation</u> est obtenu par Q7, qui nous donne K réels $x_1 < \cdots < x_K$ de $[0, 1]$ en lesquels $f^{(0)} - P^{(0)}$ s'annule.

<u>Pour l'hérédité</u> : soit $k \in [\![0, K-2]\!]$ tel qu'il existe au moins $K-k$ réels distincts que je note $y_1 < \cdots < y_{K-k}$ de $[0, 1]$ en lesquels la fonction $f^{(k)} - P^{(k)}$ s'annule.
Soit $j \in [\![1, K-k]\!]$. On a $f^{(k)} - P^{(k)}$ est dérivable sur $[y_j, y_{j+1}]$ et $f(y_j) = f(y_{j+1})$.
Rolle nous fournit alors $z_j \in\,]y_j, y_{j+1}[$ tel que $\left(f^{(k+1)} - P^{(k+1)}\right)(z_j) = 0$.
Comme $y_1 < z_1 < y_2 < z_2 \cdots < y_{K-k-1} < z_{K-k-1} < y_{K-k}$, on a obtenu $K - k - 1 = K - (k+1)$ points d'annulation de $f^{(k+1)} - P^{(k+1)}$. Ce que l'on voulait.
On peut <u>conclure</u> la récurrence : pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$,

$$\boxed{\text{il existe au moins } K-k \text{ réels distincts de } [0,1] \text{ en lesquels la fonction } f^{(k)} - P^{(k)} \text{ s'annule}}$$

Q 9. Soit $k \in [\![0, K-1]\!]$. On a $f^{(k)} - P^{(k)} \in \mathcal{C}^{K-k}([0, 1], \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$.
On peut appliquer Q1 pour $x_1' \in [0, 1]$:

$$\left\|f^{(k)} - P^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|\left(f^{(k)} - P^{(k)}\right)'\right\|_\infty + \left|\left(f^{(k)} - P^{(k)}\right)(x_1')\right|$$

Je choisis $x_1' \in [0, 1]$ tel que $\left(f^{(k)} - P^{(k)}\right)(x_1') = 0$, ce qui est possible selon Q8 car $K - k \geqslant 1$.
On en déduit l'inégalité $\boxed{\left\|f^{(k)} - P^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(k+1)} - P^{(k+1)}\right\|_\infty}$

Q 10. Par croissance de la suite $\left(\left\|f^{(k)} - P^{(k)}\right\|_\infty\right)_{0\leqslant k\leqslant K}$ (selon Q9), et comme $P^{(K)} = 0$ car $\deg(P) \leqslant K-1$, alors :

$$\forall k \in [\![0, K-1]\!],\ \left\|f^{(k)} - P^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(K)} - P^{(K)}\right\|_\infty = \left\|f^{(K)}\right\|_\infty$$

Par inégalité triangulaire, on a donc $\forall k \in [\![0, K-1]\!],\ \left\|f^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(K)}\right\|_\infty + \left\|P^{(k)}\right\|_\infty$. Ainsi

$$\forall k \in [\![0, K-1]\!],\ \left\|f^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(K)}\right\|_\infty + \sum_{i=0}^{K-1} \left\|P^{(i)}\right\|_\infty$$

En utilisant Q7, on a

$$\forall i \in [\![0, K-1]\!],\ \left\|P^{(i)}\right\|_\infty = \left\|\sum_{\ell=1}^{K} f(x_\ell) L_\ell^{(i)}\right\|_\infty \leqslant \sum_{\ell=1}^{K} |f(x_\ell)| \left\|L_\ell^{(i)}\right\|_\infty \leqslant \left(\max_{1\leqslant j\leqslant K} \left\|L_j^{(i)}\right\|_\infty\right) \sum_{\ell=1}^{K} |f(x_\ell)|$$

En posant $C = \displaystyle\sum_{i=0}^{K-1} \left(\max_{1\leqslant j\leqslant K} \left\|L_j^{(i)}\right\|_\infty\right)$ qui ne dépend que de $x_1, \ldots, x_K$, on a :

$$\forall k \in [\![0, K-1]\!],\ \left\|f^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(K)}\right\|_\infty + C \sum_{\ell=1}^{K} |f(x_\ell)|$$

On trouvé $\boxed{\text{une constante } C > 0 \text{ pour laquelle l'inégalité d'interpolation (I.1) est vérifiée}}$

II Dérivation $\mathcal{C}^K$ pour les séries de fonctions

II.A - Énoncé général

Q 11. Soit $k \in [\![0, K-1]\!]$. Q10 nous donne $C > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left\|f_n^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f_n^{(K)}\right\|_\infty + C \sum_{\ell=1}^{K} |f_n(x_\ell)|$$

Les séries $\sum \left\|f_n^{(K)}\right\|_\infty$ et $\sum |f_n(x_\ell)|$ $(1 \leqslant \ell \leqslant K)$ sont convergentes selon (H1) et (H2)

donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(\left\|f_n^{(K)}\right\|_\infty + C \sum_{\ell=1}^{K} |f_n(x_\ell)|\right)$ converge par linéarité

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left\|f_n^{(k)}\right\|_\infty$ converge.

d'où $\boxed{\text{la série } \sum f_n^{(k)} \text{ converge normalement sur } [0,1]}$ par définition.

Q 12. Je définis la fonction $\sigma\ :\ \left\{\begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & [a,b] \\ t & \longmapsto & (1-t)a + tb \end{array}\right.$.

De sorte que σ est continue strictement croissante sur l'intervalle $[0,1]$ telle que $\sigma(0) = a$ et $\sigma(1) = b$.
Ainsi σ est bijective de $[0,1]$ vers $[a,b]$.
Je pose pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n = f_n \circ \sigma$ et pour $\ell \in [\![1, K]\!]$, $y_\ell = \sigma^{-1}(x_\ell)$. De sorte que $g_n^{(k)}(y_\ell) = (b-a)^k f_n^{(k)}(x_\ell)$.
Comme σ est affine, g_n est de classe $\mathcal{C}^K$ de dérivées : $\forall k \in [\![0, K]\!],\ g_n^{(k)} = (b-a)^k f_n^{(k)} \circ \sigma$.
Soit $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Je note $\|h\|_{\infty,[a,b]} = \displaystyle\sup_{t\in[a,b]} |h(t)|$.
On remarque que comme σ est bijective que : $\{|h(t)| \mid t \in [a,b]\} = \{|h(\sigma(x))| \mid x \in [0,1]\}$.
Ainsi $\|h\|_{\infty,[a,b]} = \|h \circ \sigma\|_{\infty,[0,1]} = \|h \circ \sigma\|_\infty$. D'où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0, K]\!],\ \|g_n^{(k)}\|_\infty = \|(b-a)^k f_n^{(k)}\|_{\infty,[a,b]} = (b-a)^k \|f_n^{(k)}\|_{\infty,[a,b]}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0, K]\!],\ \|f_n^{(k)}\|_{\infty,[a,b]} = \dfrac{1}{(b-a)^k}\|g_n^{(k)}\|_\infty \qquad (\star).$

On vérifie maintenant les hypothèses pour utiliser Q11 :

- $y_1 < \cdots < y_K$ sont des réels distincts de l'intervalle $[0,1]$ car σ^{-1} est également strictement croissante.
- (g_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^K$ sur $[0,1]$ vérifiant les deux hypothèses :

  (H1) la série de fonctions $\sum g_n^{(K)}$ converge normalement sur $[a,b]$;
  car $\sum \|g_n^{(K)}\|$ converge selon $(\star)$ et car $\sum \|f_n^{(K)}\|_{\infty,[a,b]}$ converge.
  (H2) pour tout $\ell \in [\![1, K]\!]$ la série numérique $\sum g_n(y_\ell) = \sum f_n(x_\ell)$ est absolument convergente.

Ainsi la série $\sum g_n^{(k)}$ converge normalement sur $[0,1]$, pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$.
D'où pour $\sum \|f_n^{(k)}\|_{\infty,[a,b]}$ converge pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$ en utilisant $(\star)$
d'où $\boxed{\text{la série } \sum f_n^{(k)} \text{ converge normalement sur } [a,b], \text{ pour tout } k \in [\![0, K-1]\!]}$

Q 13. **(i)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^K$ sur $[a,b]$.
(ii) Soit $k \in [\![0, K-1]\!]$.
La série de fonction $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement donc simplement sur $[a,b]$ selon Q12 de somme F_k.
(ii) La série de fonction $\sum f_n^{(K)}$ converge normalement donc uniformément sur $[a,b]$ de somme F_K.
Avec (i), (ii) et (iii), par théorème de cours :

$$\boxed{F_0 \text{ est de classe } \mathcal{C}^K \text{ sur } [a,b] \text{ et } F_0^{(k)} = F_k \text{ pour tout } k \in [\![1, K]\!]}$$

II.B - Application sur un exemple

Dans cette sous-partie, on considère un exemple où les dérivées intermédiaires ne s'expriment pas avec les fonctions usuelles.

Q 14. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

Existence : La fonction $x \longmapsto (-1)^n 2^{-nx^2}$ est continue par théorème généraux sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
Le théorème fondamental nous fournit alors une primitive sur $]0, +\infty[$ qui y est donc continue.
Cette primitive admet donc une primitive g_n vérifiant donc $\forall x > 0,\ g_n''(x) = (-1)^n 2^{-nx^2}$
Je considère alors la fonction affine h_n telle que $h_n(1) = g_n(1)$ et $h_n(2) = g_n(2)$ et je pose $f_n = g_n - h_n$
Alors f_n est de classe $f_n \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[)$ vérifiant $f_n(1) = 0,\ f_n(2) = 0$ et $\forall x > 0,\ f_n''(x) = (-1)^n 2^{-nx^2}$
Unicité : On note f_n et g_n vérifiant la condition voulue et je note $d_n = f_n - g_n$.
On a alors $d_n \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[)$ vérifiant $d_n(1) = 0,\ d_n(2) = 0$ et $\forall x > 0,\ d_n''(x) = 0$.
Donc d_n est polynomiale de degré $\leqslant 1$ avec au moins deux racines, d'où $d_n = 0$
Ainsi $f_n = g_n$ ce qui prouve l'unicité.

$\boxed{\text{Il existe une unique fonction } f_n \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[) \text{ vérifiant } f_n(1) = 0,\ f_n(2) = 0 \text{ et } \forall x > 0,\ f_n''(x) = (-1)^n 2^{-nx^2}}$

Q 15. Soit $[\alpha, \beta]$ un segment de $]0, +\infty[$.
Je pose $a = \min(\alpha, 1)$ et $b = \max(\beta, 1)$.
On veut appliquer II.A sur le segment $[a,b]$ avec $K = 2$:

- $1 < 2$ sont des réels distincts de $[a,b]$;
- $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ vérifiant les deux hypothèses :

(H1) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n^{(2)}$ converge normalement sur $[a,b]$ car

$$\forall x\in[a,b],\ \left|f_n^{(2)}(x)\right|\leqslant 2^{-na^2}$$

et car la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 1} 2^{-na^2}$ converge car $2^{-a^2}\in[0,1[$.

(H2) pour tout $\ell\in\{1,2\}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x_\ell)$ converge absolument car $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f_n(x_\ell)=0$

Ainsi pour tout $i\in[\![0,2]\!]$, $\sum f_n^{(i)}$ converge normalement sur $[a,b]$ de somme F qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ vérifiant $\forall x\in[a,b],\ F^{(i)}(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n^{(i)}(x)$.

Comme c'est valable sur $[a,b]$, c'est valable sur $[\alpha,\beta]$ et donc

$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge normalement sur tout segment inclus dans }]0,+\infty[\text{ et } F \text{ est de classe } \mathcal{C}^2}$

car F est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de tout point de $]0,+\infty[$.

Q 16. Par somme géométrique : $\boxed{F''(x)=\dfrac{(-1)^1 2^{-x^2}}{1+2^{-x^2}}=\dfrac{-1}{1+2^{x^2}}}$

Q 17. On définit $G:t\longmapsto F(t+1)$ sur $[0,1]$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$ car F l'est sur $[1,2]$.

D'après Q10 (ou Q5), comme $0<1$ dans $[0,1]$, alors il existe $C>0$ indépendant de G tel que

$$\|G\|_\infty\leqslant\|G''\|_\infty+C\left(|G(0)|+|G(1)|\right)$$

or on a $G(0)=F(1)=\sum\limits_{n=1} f_n(1)=0$ et de même $G(1)=0$

d'où $\|G\|_\infty\leqslant\|G''\|_\infty$. Par ailleurs, on a

$$\forall t\in[0,1],\ G''(t)=F''(t+1)=\frac{-1}{1+2^{(t+1)^2}}$$

d'où $\forall t\in[0,1],\ |G''(t)|=\dfrac{1}{1+2^{(t+1)^2}}\leqslant\dfrac{1}{1+2^{(0+1)^2}}=\dfrac{1}{3}$. Ainsi

$$\forall t\in[0,1],\ |G(t)|\leqslant\|G\|_\infty\leqslant\|G''\|_\infty\leqslant\frac{1}{3}$$

D'où $\boxed{\forall x\in[1,2],\ |F(x)|=|G(x-1)|\leqslant\dfrac{1}{3}}$