# Devoir non surveillé 20

**À rendre le mardi 12 mars**

• **Compléter** le paragraphe 18.1 du chapitre *Fonctions numériques, fonctions vectorielles.*

• **Travail à rendre mardi 12 mars :** niveau1 + niveau2, ou niveau2 + niveau3. La quantité de travail rendu tiendra compte des difficultés/facilités d'apprentissage mais aussi du niveau de concours visé.

• **Mardi 12 mars de 9h à 10h en salle Galois : grande interrogation sur le cours, les (E1) et (D1) des chapitres suivants :**

- $\hookrightarrow$ Chapitre 3 : Suites numériques
- $\hookrightarrow$ Chapitre 4 : Séries numériques
- $\hookrightarrow$ Chapitre 5 : Rappels sur l'intégration
- $\hookrightarrow$ Chapitre 6 : Intégrales impropres
- $\hookrightarrow$ Chapitre 10 : Suites et séries de fonctions
- $\hookrightarrow$ Chapitre 11 : Séries entières
- $\hookrightarrow$ Chapitre 16 : Espaces vectoriels normés
- $\hookrightarrow$ Chapitre 17 : Equations différentielles
- $\hookrightarrow$ Chapitre 18 : Fonctions numériques et vectorielles (juste le paragraphe 18.1 sur les fonctions numériques).

• Revoir ses copies de DS/DNS et comprendre ses erreurs.

• S'il vous reste du temps, revoir les autres chapitres et tous les autres **(E)** et **(D)** pour anticiper les révisions aux concours.

## Niveau 0 : en autonomie (ne pas rendre ces exercices, les corrigés vous seront envoyés)

**Exercice 1**

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $(\mathcal{E}_1): \ y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$.
2. $(\mathcal{E}_2): \ y'' - 4y' + 4y = x + 1$.
3. $(\mathcal{E}_3): \ y'' + 4y = \sin(x)$.

**Exercice 2 (voir TD - ❈)**

1. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. En déduire les fonctions vectorielles $X : t \longmapsto X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t) + 2z(t) \\ y'(t) & = & y(t) \\ z'(t) & = & 2x(t) + z(t) \end{array} \right.$$

## Niveau 1

**Exercice 3 (❈)**

Résoudre $(\mathcal{E}) : xy' - y = x$ sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.
Montrer qu'il n'existe pas de solution sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 4 (❈)**

Résoudre $(\mathcal{E}): \ y' - \dfrac{x}{x^2 - 1} y = 2x$ sur $]1, +\infty[$.

**Exercice 5 (voir cours (E1) page 431 - St Cyr 2023 - ❈)**

On considère l'équation différentielle suivante : $(\mathcal{E}) : t^2 y'' - 2y = 3t^2$.

1. Déterminer les fonctions puissances solutions de l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$ associée à $(\mathcal{E})$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ puis de $(\mathcal{E})$.

**Exercice 6 (voir cours exemple 17.7 - ❈)**

On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E}): \ (1 + x)y'' - y' - xy = e^{-x}$.
On note $(\mathcal{E}_0): \ (1 + x)y'' - y' - xy = 0$ son équation homogènè associée.

1. Déterminer une solution particulière sous la forme $y_p : x \in \mathbb{R} \longmapsto \alpha e^{-x}$.
2. Résoudre sur $I = ]-\infty, -1[$ ou $]-1, +\infty[$ l'équation différentielle $(\mathcal{E}'): \ (1 + x)Z' + (2x + 1)Z = 0$.
   En déduire ses solutions sur $\mathbb{R}$.
3. En remarquant que $x \longmapsto e^x$ est solution de l'équation $(\mathcal{E}_0)$, résoudre $(\mathcal{E}_0)$ sur $\mathbb{R}$ par la méthode de Lagrange.
4. En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$.

## Niveau 2

**Exercice 7 (IMT 2023 - ❄❄)**

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$

1. On suppose que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(x) = e^{-x}.$$
Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
2. Plus généralement, démontrer que si $\lim\limits_{x \to +\infty} \Big( f'(x) + f(x) \Big) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

**Problème**

Soit l'intervalle $I = ]-\pi/2, \pi/2[$. On considère la fonction $f$ définie sur $I$ par
$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x}.$$
On note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre $n$ de $f$ et, par convention, $f^{(0)} = f$.

### I - Dérivées successives

1. Exprimer les dérivées $f'$, $f''$ et $f^{(3)}$ à l'aide des fonctions usuelles.
2. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à coefficients réels telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$
On explicitera les polynômes $P_0$, $P_1$, $P_2$, $P_3$ et, pour tout entier naturel $n$, on exprimera $P_{n+1}$ en fonction de $P_n$ et $P_n'$.
3. Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, le polynôme $P_n$ est unitaire, de degré $n$ et que ses coefficients sont des entiers naturels.
4. Montrer
$$\forall x \in I, \quad 2f'(x) = f(x)^2 + 1.$$
Pour tout entier naturel $n$, on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$.
5. Montrer $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}.$$

### II - Développement en série entière

On note $R$ le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ et $g$ sa somme.

6. A l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer
$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \pi/2], \quad \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!} x^n \leq f(x).$$

7. En déduire la minoration $R \geq \pi/2$.
8. Montrer
$$\forall x \in I, \quad 2g'(x) = g(x)^2 + 1.$$
9. Montrer
$$\forall x \in I, \quad f(x) = g(x).$$
*Considérer les fonctions* $\arctan f$ *et* $\arctan g$.
10. En déduire que $R = \pi/2$.

**III - Partie paire et partie impaire du développement en série entière**

11. Justifier que toute fonction $h : I \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique sous la forme $h = p + i$ avec $p : I \to \mathbb{R}$ une fonction paire et $i : I \to \mathbb{R}$ une fonction impaire.
12. En déduire
$$\forall x \in I, \quad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

On note $t$ la fonction définie sur $I$ par $t(x) = \tan(x)$.

13. Pour tout entier naturel $n$, exprimer $t^{(n)}(0)$ en fonction des réels $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$.
14. Rappeler, sans justification, l'expression de $t'$ en fonction de $t$.
15. En déduire
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1} \alpha_{2n-2k+1}.$$

## Niveau 3

**Problème**

Ce problème étudie la dérivation des sommes de séries de fonctions $\sum f_n$ de deux façons différentes : un point de vue déterministe et un point de vue probabiliste (non donné ici). Pour conclure à une formule du type $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(K)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(K)}$ avec $K$ entier supérieur ou égal à 2 , les théorèmes usuels contiennent généralement au moins une hypothèse sur les dérivées intermédiaires $f_n', \ldots, f_n^{(K-1)}$ (par exemple de convergence simple sur tout l'intervalle ou même en un seul point). Le sujet montre que l'on peut affaiblir l'hypothèse de contrôle des dérivées intermédiaires par une hypothèse de convergence de séries numériques de la forme $\sum f_n(x)$ où $x$ parcourt un ensemble fini.
Le sujet est divisé en quatre parties :

— la partie I étudie une inégalité, qualifiée d'inégalité d'interpolation, qui permet de contrôler les dérivées intermédiaires d'une fonction de classe $\mathcal{C}^K$ ;

— la partie II utilise la partie I pour démontrer un résultat de transfert du caractère $\mathcal{C}^K$ à une somme de série de fonctions ;

— les parties III et IV ne sont pas données.

**Notations**

- Pour tous entiers $i$ et $j$ vérifiant $i \leqslant j$, la notation $[\![i, j]\!]$ désigne l'intervalle d'entiers $[i, j] \cap \mathbb{N}$.
- La lettre $K$ désigne systématiquement un entier naturel non nul.
- Le symbole $\mathbb{R}_{K-1}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $K-1$ à coefficients réels.
- Pour tout intervalle $I$, on note $\mathcal{C}^K(I)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^K$. Pour tous $f \in \mathcal{C}^K(I)$ et $k \in [\![0, K]\!]$, on note $f^{(k)}$ la dérivée d'ordre $k$ (et donc $f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f''$).
- Dans le cas particulier $I = [0,1]$, pour toute fonction bornée $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on note $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

# I Inégalités d'interpolation des dérivées

Soit $K$ réels distincts $x_1 < \cdots < x_K$ de l'intervalle $[0,1]$. Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant : il existe une constante $C > 0$ (dépendant des réels $x_1, \ldots, x_K$) telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}^K([0,1]), \quad \max_{0 \leqslant k \leqslant K-1} \left\| f^{(k)} \right\|_\infty \leqslant \left\| f^{(K)} \right\|_\infty + C \sum_{\ell=1}^{K} |f(x_\ell)| \qquad (I.1)$$

Une inégalité du type précédent est appelée *inégalité d'interpolation* à l'ordre $K$.

### *I.A - Cas particulier* $K = 1$

On fixe $x_1 \in [0,1]$ et on étudie une inégalité d'interpolation à l'ordre 1,

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([0,1]), \quad \|f\|_\infty \leqslant \|f'\|_\infty + C |f(x_1)| \qquad (I.2)$$

**Q 1.** Montrer l'inégalité d'interpolation (I.2) avec $C = 1$.

**Q 2.** Soit $C \in ]0,1[$ . À l'aide d'un exemple simple de fonction $f$, montrer que l'inégalité d'interpolation (I.2) est fausse.

### *I.B - Cas particulier* $K = 2$

On fixe deux réels distincts $x_1 < x_2$ de $[0,1]$. On veut construire une constante $C > 0$ telle qu'on ait l'inégalité d'interpolation à l'ordre 2,

$$\forall f \in \mathcal{C}^2([0,1]), \quad \max(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty) \leqslant \|f''\|_\infty + C(|f(x_1)| + |f(x_2)|) \qquad (I.3)$$

**Q 3.** Pour tous $x \in [0,1]$ et $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, démontrer l'inégalité

$$\left| f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leqslant \|f''\|_\infty$$

**Q 4.** En déduire que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, on a $\|f'\|_\infty \leqslant \|f''\|_\infty + \dfrac{|f(x_1)| + |f(x_2)|}{x_2 - x_1}$.

**Q 5.** Conclure le cas $K = 2$ en montrant l'inégalité d'interpolation (I.3) avec $C = 1 + \dfrac{1}{x_2 - x_1}$.

### *I.C - Cas général par interpolation de Lagrange*

On revient à l'étude du cas général d'inégalité d'interpolation à l'ordre $K$, donnée par (I.1). On fixe $K \in \mathbb{N}^\star$.

**Q 6.** Démontrer que l'application

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{K-1}[X] & \to & \mathbb{R}^K \\ P & \mapsto & (P(x_1), \dots, P(x_K)) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

**Q 7.** Montrer qu'il existe $K$ polynômes $L_1, \dots, L_K$ de $\mathbb{R}_{K-1}[X]$ tels que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^K([0,1])$, le polynôme $P = \sum\limits_{j=1}^{K} f(x_j) L_j$ vérifie

$$\forall \ell \in [\![1, K]\!], \quad P(x_\ell) = f(x_\ell)$$

Dans les deux questions suivantes Q8 et Q9, on fixe $f \in \mathcal{C}^K([0,1])$ et on note $P$ le polynôme déterminé dans la question Q7.

**Q 8.** Pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$, montrer qu'il existe au moins $K-k$ réels distincts de $[0,1]$ en lesquels la fonction $f^{(k)} - P^{(k)}$ s'annule.

**Q 9.** En déduire l'inégalité $\left\|f^{(k)} - P^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(k+1)} - P^{(k+1)}\right\|_\infty$ pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$.

**Q 10.** Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle l'inégalité d'interpolation (I.1) est vérifiée.

## II Dérivation $\mathcal{C}^K$ pour les séries de fonctions

### *II.A - Énoncé général*

On se propose maintenant de démontrer le résultat annoncé dans le préambule. Soit $K \in \mathbb{N}^\star$, on considère

— des réels distincts $x_1 < \cdots < x_K$ d'un intervalle $[a,b]$ (avec $a < b$ ) ;

— une suite de fonctions $(f_n)$ de classe $\mathcal{C}^K$ sur $[a,b]$ à valeurs réelles et vérifiant les deux hypothèses
(H1) la série de fonctions $\sum f_n^{(K)}$ converge normalement sur $[a,b]$ ;
(H2) pour tout $\ell \in [\![1, K]\!]$ la série numérique $\sum f_n(x_\ell)$ est absolument convergente.

**Q 11.** Dans le cas particulier $[a,b] = [0,1]$, justifier que la série $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a,b]$ pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$.

**Q 12.** Traiter la question précédente dans le cas général d'un segment $[a,b]$ avec $a < b$.

On pourra examiner $f_n \circ \sigma$ où $\sigma : [0,1] \to [a,b]$ est définie par $\sigma(t) = (1-t)a + tb$ pour tout $t \in [0,1]$.

D'après le résultat de la question précédente, on peut poser $F_k(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.

**Q 13.** Démontrer que $F_0$ est de classe $\mathcal{C}^K$ sur $[a,b]$ et que $F_0^{(k)} = F_k$ pour tout $k \in [\![1, K]\!]$.

### *II.B - Application sur un exemple*

Dans cette sous-partie, on considère un exemple où les dérivées intermédiaires ne s'expriment pas avec les fonctions usuelles.

**Q 14.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, justifier qu'il existe une unique fonction $f_n \in \mathcal{C}^2(\,]0, +\infty[\,)$ vérifiant

$$f_n(1) = 0, \; f_n(2) = 0 \text{ et } f_n''(x) = (-1)^n 2^{-nx^2} \text{ pour tout } x > 0$$

**Q 15.** Montrer que la série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge normalement sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$ et que la fonction $F : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ .

**Q 16.** Expliciter $F''(x)$.

**Q 17.** Montrer que $|F(x)| \leqslant \frac{1}{3}$ pour tout $x \in [1,2]$.