# Devoir non surveillé 1 - Correction

## I - Étude de suites

**1.** Par une récurrence simple (à faire) sur $n \geq 2$, on montrerait la propriété $(\mathcal{P}_n)$ suivante.

$$(\mathcal{P}_n) : \quad c_n \text{ existe et } c_n \in ]0, 1].$$

Et donc, on définit bien une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_{n+1} = \dfrac{\lambda_n}{c_{n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Ainsi, puisque cos est une bijection de $[0, \pi/2]$ sur $[0, 1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $\theta_n \in [0, \pi/2]$ tel que $\cos(\theta_n) = c_n$.
En particulier, $c_1 = 0$ donc $\theta_1 = \dfrac{\pi}{2}$. De plus si $n \geq 2$, $c_n \in ]0, 1]$ donc $\theta_n \neq \pi/2$.
D'autre part, on a les égalités suivantes.

$$\begin{aligned}\cos(\theta_{n+1}) \;=\; c_{n+1} \;&=\; \sqrt{\frac{1+c_n}{2}} \;=\; \sqrt{\frac{1+\cos(\theta_n)}{2}} \\ &=\; \sqrt{\cos^2(\theta_n/2)} \;=\; |\cos(\theta_n/2)| \;=\; \cos(\theta_n/2)\end{aligned}$$

Par unicité de l'angle $\theta_{n+1}$, et puisque $\theta_n \in [0, \pi/2[$, on a $\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2}$ (suite géométrique) et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \theta_n = \frac{\theta_1}{2^{n-1}} = \frac{\pi}{2^n}.}$$

On a donc $\theta_n \in ]0, \pi/2]$ et $\sin(\theta_n) > 0$. On peut donc définir pour tout entier $n \geq 1$ :

$$\alpha_n = \frac{\lambda_n}{\sin(\theta_n)}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} \;=\; \frac{\lambda_{n+1}}{\sin(\theta_{n+1})} \;&=\; \frac{\lambda_n}{c_{n+1}\sin(\theta_{n+1})} \;=\; \frac{\lambda_n}{\cos(\theta_{n+1})\sin(\theta_{n+1})} \\ &=\; \frac{2\lambda_n}{\sin(2\theta_{n+1})} \;=\; \frac{2\lambda_n}{\sin(\theta_n)} \;=\; 2\alpha_n\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\alpha_n = 2^{n-1}\alpha_1 = 2^n.}$

On a enfin $\lambda_n = \alpha_n \sin(\theta_n) = 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n.\dfrac{\pi}{2^n}$. On obtient donc : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = \pi.}$

**2.** La fonction sin est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées successives sont bornées par 1 en valeur absolue. On applique la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 2.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x) - x| \leq \frac{1.|x|^3}{3!}.$$

On l'écrit avec $x = \theta_n = \dfrac{\pi}{2^n}$.

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - \frac{\pi}{2^n}\right| \leq \frac{1.\pi^3}{6.2^{3n}}.$$

En multipliant par $2^n$, on obtient $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |\pi - \lambda_n| \leq \frac{\pi^3}{6 \times 4^n}.}$

Pour que $|\pi - \lambda_{N_1}| \leq 10^{-6}$, il **suffit** donc de choisir $N_1$ tel que $\dfrac{\pi^3}{6 \times 4^n} \leq 10^{-6}$.
L'application numérique donne $N_1 > 11$, prenons par exemple $N_1 = 12$.

**3.** On a $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2p+2})$.

En prenant $x = \theta_n = \dfrac{\pi}{2^n}$ (qui tend bien vers 0), et en multilpliant par $2^n$, on obtient :

$$\lambda_n = \pi - \frac{\pi^3}{3!}\frac{1}{4^n} + \cdots + (-1)^p \frac{\pi^{2p+1}}{(2p+1)!}\frac{1}{4^{pn}} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{4^{np}}\right).$$

**4.** On définit une nouvelle suite $(\lambda_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $\lambda_n^{(1)} = \dfrac{-\lambda_n + 4\lambda_{n+1}}{3}$. Par combinaison linéaire de suites convergeant vers $\pi$, on montre facilement que $(\lambda_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge aussi vers $\pi$.

On a de plus $\lambda_n - \pi = -\dfrac{\pi^3}{6.4^n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{4^n}\right)$ et $\lambda_{n+1} - \pi = -\dfrac{\pi^3}{4.6.4^n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{4^n}\right)$. Ainsi dans la combinaison linéaire définissant $\lambda_n^{(1)}$, les premiers termes s'éliminent. Il reste donc : $|\lambda_n^{(1)} - \pi| = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{4^n}\right) = \underset{n \to +\infty}{o}(\lambda_n - \pi)$.

Pour obtenir un équivalent de $\lambda_n^{(1)} - \pi$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$, on prend un terme supplémentaire dans le développement asymptotique démontré dans la question **3.** Le calcul donne

$$\lambda_n^{(1)} - \pi = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi^5}{5!4^{2n}} - 4\frac{\pi^5}{5!4^{2n+2}}\right) + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{4^{2n}}\right).$$

Et donc $\boxed{\lambda_n^{(1)} - \pi \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{\pi^5}{5!4^{2n+1}}.}$

**5.** À la manière de la question **4.** on cherche $\alpha$ pour que les premiers termes du développement asymptotique de $\alpha\lambda_n^{(1)} + (1-\alpha)\lambda_{n+1}^{(1)}$ s'éliminent.

Le calcul donne $\alpha = -\dfrac{1}{15}$ et donc

$$\lambda_n^{(2)} - \pi = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{4^{2n}}\right).$$

**6.** Avec $\alpha = -\dfrac{1}{15}$, on obtient $\lambda_n^{(2)} = \dfrac{1}{45}(\lambda_n - 20\lambda_{n+1} + 64\lambda_{n+2})$.

La fonction sin est de classe $\mathcal{C}^7$ sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées successives sont bornées par 1 en valeur absolue. On applique la formule de Taylor-Lagrange en 0 à l'ordre 6.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\sin(x) - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}\right| \leq \frac{1.|x|^7}{7!}.$$

On l'écrit avec $x = \theta_n = \dfrac{\pi}{2^n}$ et on multiplie par $2^n$, on obtient

$$\lambda_n - \pi = -\frac{\pi^3}{6.4^n} + \frac{\pi^5}{120.4^{2n}} + R_n$$

avec $|R_n| \leq \dfrac{\pi^7}{7!4^{3n}}$. On l'écrit en changeant $n$ en $n+1$ et $n+2$, et lorsqu'on injecte ces égalités dans l'expression de $\lambda_n^{(2)}$ les deux premiers termes s'éliminent.

Il reste $|\lambda_n^{(2)} - \pi| \leq \dfrac{1}{45}\dfrac{\pi^7}{7!}\left(\dfrac{1}{4^{3n}} + \dfrac{20}{4^{3n+3}} + \dfrac{64}{4^{3n+6}}\right)$. Le calcul donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |\lambda_n^{(2)} - \pi| \leq \frac{17\pi^7}{576 \times 7!}.\frac{1}{4^{3n}}.$$

Pour que $|\lambda_{N_2}^{(2)} - \pi| \leq 10^{-6}$, il suffit de choisir $N_2$ tel que $\dfrac{17\pi^7}{576 \times 7!}.\dfrac{1}{4^{3n}} \leq 10^{-6}$.
On trouve que c'est réalisé pour $N_2 = 2$.

## II - Polynômes de Bernoulli

**1.** Soit $f$ une fonction définie et continue sur $[0,1]$, à valeurs réelles. Par le théorème fondamental de l'analyse, $G : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ est l'unique primitive de $f$ qui s'annule en 0. On a donc les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} F' = f \ \text{ et } \int_0^1 F(t)dt = 0 &\iff \exists c \in \mathbb{R}, F = G + c \ \text{ et } \int_0^1 F(t)dt = 0 \\ &\iff \exists c \in \mathbb{R}, F = G + c \ \text{ et } \int_0^1 (G(t) + c)dt = 0 \\ &\iff \exists c \in \mathbb{R}, F = G + c \ \text{ et } \ c = -\int_0^1 G(t)dt \end{aligned}$$

Ainsi, $F$ existe et est uniquement déterminée par $\boxed{\forall x \in [0,1],\ F(x) = G(x) - \int_0^1 G(t)dt.}$

Et puisque $F = f'$ avec $f$ continue, $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
**2.** On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante.

$$\mathcal{P}_n : \begin{cases} B_n \text{ existe,} \\ \deg(B_n) = n \\ \text{le coefficient dominant de } B_n \text{ est } \dfrac{1}{n!} \end{cases}$$

• Pour $n = 0$, $B_0 = 1$ et $\mathcal{P}_0$ est vraie.
• Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $\mathcal{P}_n$ est vraie.
On identifie ici les polynômes et leurs fonctions polynomiales associées sur $[0,1]$. Ainsi, $B_n$ est continue sur $[0,1]$ et donc, d'après la question **II.1**, il existe une unique fonction $F$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $F' = f$ et $\displaystyle\int_0^1 F(t)dt = 0$.
Les primitives de fonctions polynomiales sont encore des fonctions polynomiales. Ainsi la fonction $F$ est la fonction polynomiale associée à $B_{n+1}$ sur $[0,1]$, et donc $B_{n+1}$ est complètement défini.
De plus, on sait que $B_n(X) = \dfrac{X^n}{n!}$+termes de degrés$\leq n-1$ et donc en intégrant :

$$B_{n+1}(X) = \frac{X^{n+1}}{(n+1)!}\text{+termes de degrés} \leq n$$

Finalement, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, et par le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n$.

On connaît $B_0 = 1$. Calculons $B_1$. On a $B_1'(X) = B_0(X) = 1$ donc ilexiste $c \in \mathbb{R}$ tel que $B_1(X) = X + c$.
En écrivant $\displaystyle\int_0^1 B_1(t)dt = 0$, on trouve que $c = -\dfrac{1}{2}$ et donc $\boxed{B_1(X) = X - \dfrac{1}{2}.}$

En procédant de même, de proche en proche, on trouve $B_2, B_3, B_4$. Le calcul donne :

$$\boxed{B_2(X) = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{12}, \quad B_3(X) = \frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{4} + \frac{X}{12} \text{ et } B_4(X) = \frac{X^4}{24} - \frac{X^3}{12} + \frac{X^2}{24} - \frac{1}{720}.}$$

**3.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $B_{n+2}(1) = B_{n+2}(0)$.
Par définition des polynômes de Bernstein, on a $B'_{n+2} = B_{n+1}$ et :

$$\int_0^1 B_{n+1}(t)dt = 0 = \Big[B_{n+2}(t)\Big]_0^1 = B_{n+2}(1) - B_{n+2}(0).$$

Puisque c'est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien démontré :

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \geq 2, \quad B_n(1) = B_n(0).}$$

**4.** On a $C_0(X) = (-1)^0 B_0(1-X) = 1$.
De plus, $C'_{n+1}(X) = (-1)^{n+1}\Big(-B'_{n+1}(1-X)\Big) = (-1)^n B_n(1-X) = C_n(X)$.
Et enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, à l'aide du changement de variable $u = 1-t$ (affine), on a :

$$\int_0^1 C_{n+1}(t)dt = (-1)^{n+1}\int_0^1 B_{n+1}(1-t)dt \underset{u=1-t}{=} (-1)^n \int_0^1 B_{n+1}(u)du = 0$$

par définition des polynômes de Bernstein.
Ainsi, les polynômes $C_n$ vérifient bien les conditions de la question **II.2**. Comme ces conditions définissent les polynômes $B_n$, on a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_n(X) = B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X).}$$

Ainsi,

• Si $n$ est pair : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $B_n(x) = B_n(1-x)$ ou encore, $B_n\left(\frac{1}{2} - x\right) = B_n\left(\frac{1}{2} + x\right)$.

Et donc, la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est axe de symétrie du graphe de $B_n$.

• Si $n$ est impair : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $B_n(x) = -B_n(1-x)$ ou encore, $B_n\left(\frac{1}{2} - x\right) = -B_n\left(\frac{1}{2} + x\right)$.

Et donc, le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ est centre de symétrie du graphe de $B_n$.

Enfin si $n \geq 3$ est impair, alors $B_n\left(\frac{1}{2}\right) = -B_n\left(\frac{1}{2}\right)$ donc $\boxed{B_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0.}$
Et aussi, $B_n(0) = -B_n(1)$, et comme $n \geq 3$, on a aussi d'après la question **II.3**, $B_n(0) = B_n(1)$ et donc

$$\boxed{B_n(0) = B_n(1) = 0.}$$

**5.** On raisonne par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$.
• Pour $m = 0$ : $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

• Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $B_{2m-1}$ ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. Comme $B_{2m-1}$ est continu, par le théorème des valeurs intermédiaires, il est de signe constant sur cet intervalle.
Ainsi, $B'_{2m} = B_{2m-1}$ est de signe constant (non nul) sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. Deux cas se présentent : $B_{2m}$ strictement croissante, ou $B_{2m}$ strictement décroissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

D'autre part, d'après la question précédente, $B_{2m+1}(0) = B_{2m+1}(1/2) = 0$ et donc par le théorème de Rolle, sa dérivée $B'_{2m+1} = B_{2m}$ s'annule au moins une fois sur sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. Et c'est exactement une fois car $B_{2m}$ est strictement monotone.
En représentant le tableau de variation de $B_{2m+1}$ dans chacun des deux cas, on obtient que :

$$\boxed{B_{2m+1} \text{ ne s'annule pas sur } \left]0, \frac{1}{2}\right[.}$$

On étudie la fonction $f : x \longmapsto B_{2m}(x) - B_{2m}(0)$ sur $[0, 1]$.
On a $f' = B'_{2m} = B_{2m-1}$ ne s'annule pas sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ donc elle est de signe constant. Ainsi, $f$ est strictement monotone sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et comme $f(0) = 0$ elle y est de signe constant (et ne s'annulle qu'en 0).
Par symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ pour $B_{2m}$, on obtient aussi que $f$ est de signe constant sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (et ne s'annulle qu'en 1).

## III - Séries de Riemann et nombres de Bernoulli

**1.** C'est une question classique à savoir refaire !
On remarque que si $t \in ]0, 1[$ alors $2\pi t \in ]0, 2\pi[$ et donc $e^{2i\pi t} \neq 1$. Ainsi, pour $t \in ]0, 1[$, on a

$$\sum_{k=1}^{N} e^{2ik\pi t} = e^{2i\pi t} \frac{1 - e^{2iN\pi t}}{1 - e^{2i\pi t}} = e^{2i\pi t} \frac{e^{iN\pi t}}{e^{i\pi t}} \frac{\sin(N\pi t)}{\sin(\pi t)} = e^{i(N+1)\pi t} \frac{\sin(N\pi t)}{\sin(\pi t)}$$

Et donc, en prenant la partie réelle :

$$1 + 2\sum_{k=1}^{N} e^{2ik\pi t} = 1 + 2\cos((N+1)\pi t) \frac{\sin(N\pi t)}{\sin(\pi t)} = \frac{\sin(\pi t) + 2\cos((N+1)\pi t)\sin(N\pi t)}{\sin(\pi t)}$$

Or, par les formules de linéarisation en trigonométrie, $2\cos((N+1)\pi t)\sin(N\pi t) = \sin((2N+1)\pi t) - \sin(\pi t)$. Et donc, on obtient bien le résultat attendu :

$$\boxed{\forall t \in ]0, 1[, \qquad 1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}}$$

**2.** Puisque $B_n$ est dérivable en 0, on a :

$$\varphi_n(t) = \frac{B_n(t) - B_n(0)}{\sin(\pi t)} = \frac{B_n(t) - B_n(0)}{t} \frac{t}{\sin(\pi t)} = \frac{1}{\pi} \frac{B_n(t) - B_n(0)}{t} \frac{\pi t}{\sin(\pi t)} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{B_n'(0)}{\pi}.$$

D'autre part, $\varphi_n(1-t) = \dfrac{B_n(1-t) - B_n(1)}{\sin(\pi - \pi t)} = (-1)^n \dfrac{B_n(t) - B_n(0)}{\sin(\pi t)} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} (-1)^n \dfrac{B_n'(0)}{\pi}$.
Et donc $\varphi_n$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$.
D'autre part, $\varphi_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et :

$$\forall t \in ]0,1[, \quad \varphi_n'(t) = \frac{B_n'(t)\sin(\pi t) - \pi\cos(\pi t)(B_n(t) - B_n(0))}{\sin^2(\pi t)}$$

Or $B_n$ est de classe $\mathcal{C}^2$ (et donc $B_n'$ de classe $\mathcal{C}^1$) au voisinage de 0, donc la formule de Taylor-Young donne :

$$\begin{aligned} B_n(t) &= B_n(0) + tB_n'(0) + \frac{t^2}{2}B_n''(0) + \underset{t\to 0}{o}(t^2) \\ B_n'(t) &= B_n'(0) + tB_n''(0) + \underset{t\to 0}{o}(t) \end{aligned}$$

En reportant dans l'expression de $\varphi_n'(t)$ et en utilisant les développements limités de $\sin(\pi t)$ et $\cos(\pi t)$ à l'ordre 1 en 0, on obtient que

$$\varphi_n'(t) = \frac{B_n''(0)}{2\pi} + \underset{t\to 0}{o}(1)$$

En changeant $t$ en $(1-t)$, on aurait un résultat similaire au voisinage de 1. Et donc :

- $\varphi_n$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$.
- La fonction ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$,
- et sa dérivée admet des limites finies en 0 et 1.

Par le théorème de la limite de la dérivée, la fonction prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Et donc :

$$\boxed{\varphi_n \text{ est prolongeable en une fonction de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,1].}$$

**3.** Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On effectue une intégration par parties.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \int_0^1 f(t)\sin(xt)dt &= \left[-\frac{\cos(xt)}{x}f(t)\right]_0^1 + \frac{1}{x}\int_0^1 \cos(xt)f'(t)dt \\ &= \frac{1}{x}\underbrace{(-\cos(x)f(1) + f(0))}_{\text{borné}} + \frac{1}{x}\int_0^1 \cos(xt)f'(t)dt \end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$. Le deuxième également car :

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^1 \cos(xt)f'(t)dt\right| \leq \frac{1}{x}\int_0^1 |\cos(xt)f'(t)|dt \leq \frac{1}{x}\int_0^1 |f'(t)|dt = \frac{M}{x}.$$

On a donc bien

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 f(t)\sin(xt)dt = 0.}$$

**4.** Une double intégration par parties donne (on vérifiera bien les hypothèses au moins pour la première et on utilisera la définition des polynômes de Bernstein) :

$$I_{n,k} = \int_0^1 B_n(t)\cos(2k\pi t)dt = \frac{1}{4k^2\pi^2}\Big(B_{n-1}(1) - B_{n-1}(0) - I_{n-2,k}\Big).$$

• Si $n = 2p$ est pair : alors si $p \geq 2$, $B_{n-1}(1) - B_{n-1}(0) = 0$ et donc $I_{2p,k} = -\dfrac{1}{4k^2\pi^2} I_{2(p-1),k}$.

Par récurrence, on trouve $I_{2p,k} = \dfrac{(-1)^{p-1}}{(4k^2\pi^2)^{p-1}} I_{2,k}$. Or $I_{2,k} = \dfrac{1}{4k^2\pi^2}\Big(B_1(1) - B_1(0) - I_{0,k}\Big) = \dfrac{1}{4k^2\pi^2}\Big(1-0\Big)$.

Et donc $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad I_{2p,k} = \dfrac{(-1)^{p-1}}{(4k^2\pi^2)^p} = \dfrac{(-1)^{p-1}}{(2k\pi)^{2p}}.}$

• Si $n = 2p+1$ est impair : Comme $I_{1,k} = 0$, par récurrence, on trouve directement :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p+1,k} = 0.}$$

**5.** Si $m = 0$, $\varphi_m = \varphi_0 = 0$. Supposons que $m \in \mathbb{N}^*$. On a les égalité suivantes (en utilisant **III.1**) :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi_{2m}(t)\sin((2N+1)\pi t)dt &= \int_0^1 \Big(B_{2m}(t) - B_{2m}(0)\Big)\frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}dt \\
&= \int_0^1 \Big(B_{2m}(t) - B_{2m}(0)\Big)dt + 2\sum_{k=1}^N \int_0^1 \Big(B_{2m}(t) - B_{2m}(0)\Big)\cos(2k\pi t)dt \\
&= \int_0^1 \Big(B_{2m}(t) - B_{2m}(0)\Big)dt + \\
&\qquad 2\sum_{k=1}^N \left(\int_0^1 B_{2m}(t)\cos(2k\pi t)dt - B_{2m}(0)\underbrace{\int_0^1 \cos(2k\pi t)dt}_{=0 \text{ car } k\neq 0}\right) \\
&= \underbrace{\int_0^1 B_{2m}(t)dt}_{=0} - B_{2m}(0) + 2\sum_{k=1}^N I_{2m,k} = -B_{2m}(0) + 2\sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{m-1}}{(2k\pi)^{2m}}
\end{aligned}$$

Or $\varphi_{2m}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, donc, d'après la question **III.3**, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \varphi_{2m}(t)\sin((2N+1)\pi t)dt = 0.$$

Et donc quand $N$ tend vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient : $B_{2m}(0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(2k\pi)^{2m}}$ ou encore :

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2m}} = 2^{2m-1}(-1)^{m-1}\pi^{2m}B_{2m}(0).}$$

En particulier, pour $m = 1$, on trouve $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 2\pi^2 B_2(0) = \frac{\pi^2}{6}$.

Et pour $m = 2$, on trouve $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = 2^3\pi^4(-B_4(0)) = \frac{8\pi^2}{720} = \frac{\pi^4}{90}$.

**Pour aller plus loin :** La fonction $\zeta$ de Riemann est définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$\forall x > 1, \qquad \zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}.$$

On peut démontrer par récurrence que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $B_m(0) \in \mathbb{Q}$. Et donc, on a démontré la propriéte suivante, concernant la fonction $\zeta$ aux entiers pairs.

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \exists q_m \in \mathbb{Q}, \quad \zeta(2m) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2m}} = q_m \pi^{2m}.$$

Une conséquence directe, puisque $\pi$ est irrationnel, est que les valeurs de $\zeta$ aux entiers pairs sont irrationnelles.

En 1882, Ferdinand Lindemann, montre que $\pi$ est un nombre transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers. Il répond ainsi au problème de la quadrature du cercle, vieux de plus de deux mille ans !

L'expression que nous avons obtenue pour les $\zeta(2m)$, combinée au résultat de Lindemann, permet de conclure que les valeurs de $\zeta$ aux entiers pairs sont elles aussi transcendantes.

Aux entiers impairs, les valeurs de $\zeta$ sont beaucoup moins bien connues. En 1978, Apéry a montré que $\zeta(3)$ était irrationnel. En 2000, Tanguy Rivoal, a montré, que la fonction $\zeta$ de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs.

On conjecture que les valeurs de $\zeta$ aux entiers impairs sont transcendantes...