Devoir non surveillé 1

À rendre le mardi 12 septembre (facultatif)

I - Étude de suites

Pour un calcul célèbre, Archimède considéra les relations de récurrences :

$$c_{n+1} = \sqrt{\frac{1+c_n}{2}} \qquad\qquad \lambda_{n+1} = \frac{\lambda_n}{c_{n+1}}.$$

1. Montrer que pour $c_1 = 0$ et $\lambda_1 = 2$ ces relations définissent effectivement deux suites $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et qu'il existe deux autres suites $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait :

$$\theta_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \alpha_n \in \mathbb{R}^+, \qquad c_n = \cos(\theta_n) \quad \text{ et } \quad \lambda_n = \alpha_n \sin(\theta_n).$$

Montrer que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers π.

2. En utilisant une formule de Taylor montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité : $|\pi - \lambda_n| \leq \dfrac{\pi^3}{6\times 4^n}$.

En déduire un entier N_1 tel que que $|\pi - \lambda_{N_1}| \leq 10^{-6}$.

3. Montrer que pour tout entier naturel p donné, λ_n admet le développement asymptotique suivant.

$$\lambda_n = \pi - \frac{\pi^3}{3!}\frac{1}{4^n} + \cdots + (-1)^p \frac{\pi^{2p+1}}{(2p+1)!}\frac{1}{4^{pn}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{4^{np}}\right).$$

4. On définit une nouvelle suite $(\lambda_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $\lambda_n^{(1)} = \dfrac{-\lambda_n + 4\lambda_{n+1}}{3}$.

Montrer que cette suite converge aussi vers π et que l'on a : $|\lambda_n^{(1)} - \pi| = \underset{n\to+\infty}{o}(\lambda_n - \pi)$.

Donner un équivalent de $\lambda_n^{(1)} - \pi$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Montrer qu'il existe un réel α (que l'on déterminera) tel que la suite $(\lambda_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $\lambda_n^{(2)} = \alpha\lambda_n^{(1)} + (1-\alpha)\lambda_{n+1}^{(1)}$ vérifie :

$$\lambda_n^{(2)} - \pi = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{8^n}\right).$$

6. Donner $\lambda_n^{(2)}$ en fonction de λ_n, λ_{n+1} et λ_{n+2} et montrer l'inégalité suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |\lambda_n^{(2)} - \pi| \leq \frac{17\pi^7}{576\times 7!}.\frac{1}{4^{3n}}.$$

En déduire un entier N_2 tel que que $|\lambda_n^{(2)} - \pi| \leq 10^{-6}$.

II - Polynômes de Bernoulli

1. Soit f une fonction définie et continue sur $[0,1]$, à valeurs réelles. Montrer que les conditions ci-dessous définissent une unique fonction F continûment dérivable (i.e. de classe $\mathcal{C}^1$) sur $[0,1]$:

$$F' = f \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 F(t)dt = 0$$

et exprimer F à l'aide de $G : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

2. Montrer que les conditions :

$$B_0 = 1, \qquad B'_{n+1} = B_n \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \int_0^1 B_{n+1}(t)dt = 0$$

définissent une unique suite de fonctions polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Préciser le degré de B_n et son terme de plus haut degré.
Expliciter les polynômes B_1, B_2, B_3 et B_4.

3. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a l'égalité $B_n(0) = B_n(1)$.

4. On définit une suite de polynômes C_n en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X).$$

Montrer que la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les conditions du **II-2.** définissant la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire que $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Qu'en déduit-on pour les graphes de B_n et pour les valeurs, lorsque n est impair et supérieur ou égal à 3, de $B_n(0), B_n(1/2)$ et $B_n(1)$?

5. Montrer que les polynômes B_{2m+1} (pour $m \in \mathbb{N}$) ne s'annulent pas sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ (on pourra procéder par récurrence sur m et utiliser le théorème de Rolle).
En déduire que les polynômes $B_{2m}(X) - B_{2m}(0)$ sont de signes constants sur $[0, 1]$.

III - Séries de Riemann et nombres de Bernoulli

1. Montrer que pour tout entier $N \geq 1$, on a :

$$\forall t \in]0,1[, \qquad 1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}.$$

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, la fonction φ_n ci-dessous définie sur $]0,1[$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$:

$$\forall t \in]0,1[, \qquad \varphi_n(t) = \frac{B_n(t) - B_n(0)}{\sin(\pi t)}.$$

3. Montrer que pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 f(t)\sin(xt)dt = 0$.
On pourra utiliser une intégration par parties.

4. Pour $k \geq 1$ et $n \geq 1$ entiers, on définit $I_{n,k} = \displaystyle\int_0^1 B_n(t)\cos(2k\pi t)dt$.
Trouver une relation entre $I_{n,k}$ et $I_{n-2,k}$ et en déduire, selon la parité de n, l'expression de $I_{n,k}$ en fonction de n et de k.

5. En utilisant la formule établie au **III-1.**, trouver pour $N \in \mathbb{N}$, une expression de

$$\int_0^1 \varphi_{2m}(t)\sin((2N+1)\pi t)dt$$

en fonction de m, N et $B_{2m}(0)$.
En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2m}}$ en fonction de m et de $B_{2m}(0)$. Donner les valeurs de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$.