Devoir non surveillé 19

À rendre le mardi 20 février (facultatif)

Notations et résultats admis

- Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ (resp. $n \times 1$) à coefficients réels.
- La matrice identité de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n.
- Si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(A)$ est le déterminant de la matrice A, $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace, $\mathrm{Sp}(A)$ son spectre et $A^\top$ sa transposée.
- On note $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et à coefficients réels de taille $n \times n$.
- Sur $(\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, on définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par :
$$\forall (X,Y) \in (\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2, \quad \langle X, Y \rangle = X^\top Y$$
où $X^\top$ est la transposée de X. On admet que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.
- On admet que l'application $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \|A\|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^\top A)}$ est une norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
- On note $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ telles que :
$$\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \langle SX, X \rangle \geqslant 0 \quad (\text{resp. } > 0).$$
- Soit C une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On dit que C est convexe si : pour tous $x, y \in C$ et tout $t \in [0,1]$, $(1-t)x + ty \in C$.
- On admet que si C est une partie convexe d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, alors pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in C^p$ et pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in (\mathbb{R}_+)^p$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \in C$.
- Une application $f : C \to \mathbb{R}$ définie sur une partie convexe C d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est dite convexe si :
$$\forall (x,y) \in C^2,\ \forall t \in [0,1], \quad f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y).$$
- Une application $f : C \to \mathbb{R}$ définie sur une partie convexe C d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est dite concave si son opposé, $-f$, est convexe, c'est-à-dire :
$$\forall (x,y) \in C^2,\ \forall t \in [0,1], \quad f((1-t)x + ty) \geqslant (1-t)f(x) + tf(y).$$

Partie 1 : Questions préliminaires

1. Montrer qu'une matrice $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(S) \subseteq \mathbb{R}_+$.

De même, on admettra dans la suite du problème que : $S \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\mathrm{Sp}(S) \subseteq \mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ sont des parties convexes de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$?
3. Montrer que, si $A \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $S \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que : $A = S^2$.

4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in (\mathbb{R}_+)^p$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ et pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in I^p$, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i).$$

Indication : on pourra procéder par récurrence sur p.

Partie 2 : Une première inégalité de convexité

Soit $M \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice non nulle.

5. Montrer l'inégalité $\dfrac{\mathrm{Tr}(M)}{n} \geqslant (\det(M))^{\frac{1}{n}}$.
Indication : on pourra montrer que $x \mapsto -\ln(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

On pourra dans la suite de cette partie utiliser, sans la prouver, l'inégalité ci-dessous :

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in (\mathbb{R}_+)^p, \quad 2 \max(x_1, \ldots, x_n) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k - \prod_{k=1}^{n} x_k^{\frac{1}{n}}\right) \geqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - \prod_{j=1}^{n} x_j^{\frac{1}{n}}\right)^2.$$

6. Exprimer $\|M\|_2$ en fonction des valeurs propres de M.
7. En déduire que :

$$\frac{\mathrm{Tr}(M)}{n} - (\det(M))^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{\left\| M - (\det(M))^{\frac{1}{n}} \mathrm{I}_n \right\|_2^2}{2n \|M\|_2}.$$

Partie 3 : On continue avec de la convexité

8. Soient $A \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $B = QDQ^\top$ et $A = QQ^\top$. Que dire des éléments diagonaux de D si $B \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$?
Indication : on pourra utiliser la question 3.
9. Étudier la convexité de la fonction $t \mapsto \ln(1 + e^t)$.
10. Montrer l'inégalité :

$$\forall (A, B) \in \left(\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})\right)^2, \quad (\det(A + B))^{\frac{1}{n}} \geqslant (\det(A))^{\frac{1}{n}} + (\det(B))^{\frac{1}{n}}.$$

11. Montrer que, si A et B appartiennent à $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \det((1 - t)A + tB) \geqslant (\det(A))^{1-t} (\det(B))^t.$$

Justifier que cette inégalité reste valable pour A et B seulement dans $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$.
12. Que peut-on en déduire de la fonction $\ln \circ \det$ sur $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$?

Partie 4 : Encore de la convexité !

Soit $A \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et soit $g : t \mapsto \det(\mathrm{I}_n + tA)$.

13. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, exprimer $g(t)$ en fonction des valeurs propres de A.
En déduire que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
14. Soit $f : t \mapsto \ln(\det(\mathrm{I}_n + tA))$. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(\det(\mathrm{I}_n + tA)) \leqslant \mathrm{Tr}(A)t.$$

Partie 5 : Et pour finir... de la convexité !

Soient $A \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $M \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$. Soit l'application f_A définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_A(t) = \det(A + tM).$$

15. Montrer que f_A est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
16. Montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$, on ait : $A + tM \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
17. Montrer que : $f_A(t) = \det(A) + \det(A)\mathrm{Tr}(A^{-1}M)t + \underset{t\to 0}{o}(t)$.
    Indication : on pourra commencer par traiter le cas où $A = \mathrm{I}_n$.
18. Déterminer $f_A'(t)$ pour tout $t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$.
19. On admet que la fonction $\Phi : t \mapsto (A + tM)^{-1}$ est de classe C^1 sur $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$.
    En remarquant que $\Phi(t) \times (A + tM) = \mathrm{I}_n$, montrer que :

$$\Phi(t) = A^{-1} - A^{-1}MA^{-1}t + \underset{t\to 0}{o}(t).$$

Soit $\alpha \in \left]-\dfrac{1}{n}, +\infty\right[\setminus \{0\}$. On définit l'application φ_α par :

$$\forall t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[, \quad \varphi_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha}\left(\det(A + tM)\right)^{-\alpha}.$$

20. Montrer que φ_α est dérivable sur $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ et que :

$$\forall t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[, \quad \varphi_\alpha'(t) = -\mathrm{Tr}\left((A + tM)^{-1}M\right)\left(\det(A + tM)\right)^{-\alpha}.$$

21. Montrer que φ_α est deux fois dérivable en 0 et que :

$$\varphi_\alpha''(0) = (\det(A))^{-\alpha}\left(\alpha\left(\mathrm{Tr}(A^{-1}M)\right)^2 + \mathrm{Tr}\left(\left(A^{-1}M\right)^2\right)\right).$$

22. Montrer que $A^{-1}M$ est semblable à une matrice symétrique réelle.
    Indication : on pourra utiliser la question 3.
23. En déduire que $\varphi_\alpha''(0) \geqslant 0$.
24. Montrer que, si $\varphi_\alpha''(0) > 0$, alors il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $t \in]-\eta, \eta[$:

$$\frac{1}{\alpha}\left(\det(A + tM)\right)^{-\alpha} \geqslant \frac{1}{\alpha}\left(\det(A)\right)^{-\alpha} - \mathrm{Tr}\left(A^{-1}M\right)\left(\det(A)\right)^{-\alpha} t.$$