Devoir non surveillé 18 - Correction

Exercice
CCINP PSI 2023 (oral)

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle (orienté par la base canonique) et on note f l'endomorphisme canoniquement associé à M.

1. Puisque la base canonique est orthonormée, f est une isométrie si et seulement si M est une matrice orthogonale (ses matrices colonnes forment une b.o.n).
Les rotations de $\mathbb{R}^3$ sont les isométries vectorielles directes, donc :

$$f \text{ est une rotation si et seulement si } \begin{cases} ab + bc + ca = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ \det(A) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1 \end{cases}$$

2. On suppose f est une rotation, on a donc les trois égalités précédentes.
On pose $P(X) = (X - a)(X - b)(X - C) = X^3 - (a + b + c)X^2 + (ab + bc + ca)X - abc$.
On a d'abord, $ab + bc + ca = 0$.
De plus, les colonnes C_1, C_2, C_3 de M forment une base orthonormée directe donc $C_3 = C_1 \wedge C_2$.
On obtient les 3 égalités suivantes.
$b^2 - ac = b$ (1)
$c^2 - ab = c$
$a^2 - cb = a$.
En les ajoutant, on trouve que $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
Il reste à montrer que $p = -abc \in [0, 4/27]$.
   - On a $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ donc $|a| \leq 1, |b| \leq 1, |c| \leq 1$. Et par suite :
   $$a^3 + b^3 + c^3 \leq |a|^3 + |b|^3 + |c|^3 \leq a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$
   On a donc $3p = -3abc = 1 - (a^3 + b^3 + c^3) \geq 0$ et $p \geq 0$.
   - Puisque $-abc \geq 0$ deux coefficients parmi a, b, c sont positifs et l'un est négatif.
   Supposons que $b \geq 0$ (cela ne restreint pas la généralité). On a dans (1) : $p = -abc = b^2 - b^3 = f(b)$. Une étude de f sur $[0, 1]$ donne un maximum en $b = 2/3$. Et donc :
   $$p = -abc \leq f(2/3) = 4/27.$$

   Finalement

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est une rotation, alors } a, b, c \text{ sont racines de } X^3 - X^2 + p = 0 \text{ avec } p \in [0, 4/27].}$$

3. On suppose que $b = c \neq 0$ et donc f n'est pas l'identité.
Comme f est une rotation, $E_1(f)$ est de dimension 1, c'est l'axe de la rotation.
On remarque que $(1, 1, 1) \in E_1(f)$ car $a + b + c = 1$. Donc $\Delta = E_1(f) = \mathrm{Vect}\{(1, 1, 1)\}$.
On remarque aussi que dans ce cas, M est symétrique réelle et comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, f est un endomorphisme symétrique. Par le théorème spectral, f est diagonalisable.

Or f est une isométrie donc les seules valeurs propres possibles de f sont 1 et -1. Comme f est de déterminant 1, deux cas se présentent :

- Les valeurs propres sont $1, 1, 1$ et dans ce cas M serait digonalisable et semblable à I_3 donc égale à I_3, ce qui est exclu car $b = c$ est non nul.
- Les valeurs propres sont donc $1, -1, -1$, et par conséquent, f est la symétrie orthogonale par rapport à $E_1(f)$, c'est-à-dire f est la rotation d'angle π par rapport à $\Delta = E_1(f) = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$.

Problème 1

1. - **Symétrique :** Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on a
   $(P|Q) = \displaystyle\int_0^\pi P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))d\theta = \int_0^\pi Q(\cos(\theta))P(\cos(\theta))d\theta = (Q|P)$.
   - **Bilinéaire :** Pour tous $(P_1, P_2, Q) \in \mathbb{R}[X]^3$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2|Q) &= \int_0^\pi (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))d\theta \\ &= \lambda_1 \int_0^\pi P_1(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))d\theta + \lambda_2 \int_0^\pi P_2(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))d\theta = \lambda_1(P_1|Q) + \lambda_2(P_2|Q)\end{aligned}$$

   Par symétrie, on obtient bien la bilinéarité.
   - **Définie positive :** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
   Pour tout $\theta \in [0, \pi]$ on a $P^2(\cos(\theta)) \geq 0$ et par positivité de l'intégrale $(P|P) = \displaystyle\int_0^\pi P^2(\cos(\theta))d\theta \geq 0$.
   Et puisque de plus $\theta \longmapsto P^2(\cos(\theta))$ est continue sur $[0, \pi]$, on a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned}(P|P) = 0 &\iff \int_0^\pi P^2(\cos(\theta))d\theta = 0 \iff \forall\theta \in [0, \pi],\ P^2(\cos(\theta)) = 0 \\ &\iff \forall x \in [-1, 1],\ P(x) = 0 \iff P = 0,\end{aligned}$$

   car il possède une infinité de racines. Finalement, $\boxed{(P, Q) \longmapsto (P|Q) \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$
2. Le calcul donne $T_2 = 2X^2 - 1, T_3 = 4X^3 - 3X$ et $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.
3. La plupart d'entre vous s'est contentée d'affirmer le résultat à l'aide parfois de « ... ». Cela ne rapportait **aucun** point. Il fallait le démontrer par récurrence **double**. On pouvait mettre dans $\mathcal{P}_n$, tous les résultats attendus.

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la propriété suivante.

$$\mathcal{P}_n : \quad T_n \text{ est de degré } n, \text{ son coefficient dominant est } 2^{n-1} \text{ et } T_n(-X) = (-1)^n T_n(X).$$

   On montre cette propriété par une récurrence double sur n.

   - $T_1 = X$ et $T_2 = 2X^2 - 1$ donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont vraies.
   - Soit $n \geq 2$ un entier pour lequel $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n-1}$ sont vérifiées. On montre $\mathcal{P}_{n+1}$.
   Dans l'égalité $T_{n+1} = \underbrace{2XT_n}_{de\ degre\ n+1} - \underbrace{T_{n-1}}_{de\ degre\ n-1}$ le terme dominant est celui de $2XT_n$ c'est-à-dire

$$2X.2^{n-1}X^n = 2^n X^{n+1}.$$

   Donc T_{n+1} est bien de degré $n + 1$ et son coefficient dominant est 2^n. D'autre part :
   $T_{n+1}(-X) = 2(-X)T_n(-X) + T_{n-1}(-X) = (-1)^{n+1}(2XT_n(X) + T_{n-1}(X)) = (-1)^{n+1}T_{n+1}(X)$.

Finalement $\boxed{T_n \text{ est de degré } n, \text{ son coefficient dominant est } 2^{n-1}.}$
Et T_n est pair si n est pair, et impair sinon.

4. Par le même principe de récurrence à deux pas, on montrerait

$$\boxed{T_n(1) = 1,\ T_n(-1) = (-1)^n,\ T_n(0) = 0 \text{ si } n \text{ est impair et } T_{2p}(0) = (-1)^p.}$$

5. (a) Montrons dans un premier temps que T_n vérifie bien $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
   - $T_0 = 1$ et $T_1 = X$ donc la propriété est vraie aux rangs 0 et 1.
   - Supposons qu'elle est vraie aux rangs $n-1$ et n. On a donc

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)T_n(\cos(\theta)) - T_{n-1}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta)) - \cos((n-1)\theta)) \\ &= \cos(\theta+n\theta) + \cos(\theta-n\theta) - \cos((n-1)\theta)) = \cos((n+1)\theta) \end{aligned}$$

   Par le principe de récurrence à deux pas, on a bien

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).}$$

   (b) Montrons l'unicité de T_n. Si P en est un autre alors, pour tout θ réel, on a

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) = P(\cos(\theta))$$

   et donc $(T_n - P)(\cos(\theta)) = 0$. Le polynôme $T_n - P_n$ possède une infinté de racines (tous les éléments de $[-1, 1]$) et donc il est nul.
   Ainsi $P_n = T_n$ et finalement, $\boxed{P_n \text{ est unique.}}$

6. On suppose dans cette question que $n \geq 1$ et on étudie les racines de T_n.
   (a) Il faut ici raisonner par équivalence. Les implcations seules ne suffisent pas.
   On a $T_n(\cos(\theta)) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 \iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. Ainsi

$$\boxed{T_n(\cos(\theta)) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}.}$$

   (b) Quand k décrit $\{0, \ldots, n-1\}$ les n réels $\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}$ sont distincts et dans $[0, \pi]$. Et comme la fonction cos est injective sur $[0, \pi]$, les les n réels $\cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)$ sont aussi distincts et dans $[-1, 1]$.
   Ce sont donc n racines distinctes de T_n et puisque T_n est de degré n, ce sont exactement les racines de T_n. Ainsi

$$\boxed{T_n \text{ possède } n \text{ racines distinctes et qui sont dans } [-1, 1].}$$

7. On trouve facilement $(T_0|T_0) = \pi$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $(T_n|T_n) = \int_0^\pi T_n^2(\cos(\theta))d\theta = \int_0^\pi \cos^2(n\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos(2n\theta) + 1)d\theta.$

   On trouve facilement $\boxed{(T_n|T_n) = \|T_n\|^2 = \frac{\pi}{2}.}$

8. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ distincts. On a

$$(T_n|T_m) = \int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos((m+n)\theta) + \cos((n-m)\theta)d\theta.$$

   Comme $n + m \neq 0$ et $n - m \neq 0$, on trouve après intégration $\boxed{\text{Si } n \neq m \text{ alors } (T_n|T_m) = 0.}$

9. La famille $(T_0, \dots, T_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ dont les vecteurs sont tous non nuls. Donc elle est libre. Comme elle est de cardinal $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$, c'en est une base (orthognale). Pour obtenir une base orthonormale, il suffit donc de normaliser ses vecteurs.

$$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}T_0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}T_1, \dots, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}T_n\right) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}_n[X].}$$

10. On définit l'application Φ de $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Phi(P) = (X^2-1)P'' + XP'$.
Par propriété des degrés, on a bien $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
Montrons que φ est linéaire. Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda P + \mu Q) &= (X^2-1)(\lambda P + \mu Q)'' + X(\lambda P + \mu Q)' \\
&= (X^2-1)(\lambda P'' + \mu Q'') + X(\lambda P' + \mu Q') \\
&= \lambda((X^2-1)P'' + XP') + \mu((X^2-1)Q'' + XQ') \ = \ \lambda\Phi(P) + \mu\phi(Q)
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

11. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on a $\Phi(X^k) = (X^2-1)k(k-1)X^{k-2} + kXX^{k-1} = k^2X^k - k(k-1)X^{k-2}$.
La matrice de Φ dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est donc

$$M = \begin{pmatrix}
0^2 & 0 & -2 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1^2 & 0 & -6 & \ddots & \vdots \\
 & & 2^2 & \ddots & \ddots & 0 \\
 & & & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\
 & \Large 0 & & & (n-1)^2 & 0 \\
 & & & & & n^2
\end{pmatrix}$$

12. La matrice de Φ dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\Phi) = \{0, 1, 4, \dots, n^2\}.}$$

De plus Φ possède $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ valeurs propres distinctes donc $\boxed{\Phi \text{ est diagonalisable.}}$
Ses valeurs propres sont toutes de multiplicité 1 et ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

13. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\Phi(T_n)(\cos(\theta)) = (\cos^2(\theta)-1)T_n''(\cos(\theta)) - T_n'(\cos(\theta))$. Or, en dérivant deux fois l'égalité $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$, on trouve

$$-\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta)) = -n\sin(n\theta) \quad \text{et} \quad -\cos(\theta)T_n'(\cos(\theta)) + \sin^2(\theta)T_n''(\cos(\theta)) = -n^2\cos(n\theta).$$

Ainsi, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\Phi(T_n)(\cos(\theta)) = n^2\cos(n\theta)) = n^2T_n(\cos(\theta))$. Comme précédemment, le polynôme $\Phi(T_n) - n^2T_n$ a une infinité de racines donc il est nul.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Phi(T_n) = n^2T_n.}$$

Par conséquent, T_n est un vecteur propre associé à la valeur propre n^2 de Φ et de même, pour $k = 0, \dots, n$ T_k est un vecteur propre associé à la valeur propre k^2 de Φ. Comme tous les sous-espaces propres sont de dimension 1, on obtient

$$\boxed{\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad E_{k^2}(\Phi) = \mathrm{Vect}\{T_k\}.}$$

14. Puisque $(T_0, \ldots, T_n)$ est une base de vecteurs propres, la matrice de Φ dans cette base est diagonale donc symétrique. Et puisque la base $(T_0, \ldots, T_n)$ est orthonormée,

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } \Phi \text{ est symétrique.}}$$

Problème 2

EM Lyon 2011 scientifique 1

Un corrigé de J.F. COSSUTTA

```
function Simule_N_t_V2(t:real):integer;

var n:integer;s:real;

begin
n:=-1;s:=0;
repeat
n:=n+1;s:=s-ln(1-random);
until(s>t);
Simule_N_t_V2:=n;
end;
```

Exercice *Soit t un un réel strictement positif.*

Q1. Montrer que presque sûrement il existe au moins un élément i de $\mathbb{N}^*$ tel que $\{S_i > t\}$ se réalise.

Q2. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, les événements $\{N_t = n\}$ et $\{S_n \leqslant t\} \cap \{S_{n+1} > t\}$ sont égaux.

Q3. Montrer que N_t suit la loi de Poisson de paramètre t.

Partie ~~II~~ 1 Polynômes de Laguerre

Remarque *Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $x \to x^n$ et $x \to e^{-x}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Alors par produit f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Ceci justifie la définition de $f_n^{(n)}$ et donc de L_n.*

1 ~~6.~~ $\forall x \in \mathbb{R},\ L_0(x) = e^x\, f_0^{(0)}(x) = e^x\, f_0(x) = e^x\, e^{-x} = 1$. Donc $L_0 = 1$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ L_0(x) = 1 \text{ ou } L_0 = 1.}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = x\, e^{-x}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ L_1(x) = e^x\, f_1'(x) = e^x \left(e^{-x} + x\,(-e^{-x})\right) = 1 - x$. Donc $L_1 = 1 - X$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ L_1(x) = 1 - x \text{ ou } L_1 = 1 - X.}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_2(x) = \dfrac{1}{2}\, x^2\, e^{-x}$. La formule de leïbniz donne $\forall x \in \mathbb{R},\ f_2^{(2)}(x) = \dfrac{1}{2}\, \left(2\, e^{-x} + 2\,(2\,x)\,(-e^{-x}) + x^2\, e^{-x}\right)$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ f_2^{(2)}(x) = \dfrac{1}{2}\,(2 - 4\,x + x^2)\, e^{-x}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ L_2(x) = e^x\, f_2''(x) = e^x\, \left(\dfrac{1}{2}\,(2 - 4\,x + x^2)\, e^{-x}\right) = 1 - 2\,x + \dfrac{1}{2}\, x^2$.

Ou $L_2 = 1 - 2\,X + \dfrac{1}{2}\, X^2$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ L_2(x) = 1 - 2\,x + \frac{1}{2}\, x^2 \text{ ou } L_2 = 1 - 2\,X + \frac{1}{2}\, X^2.}$$

2 ~~7.~~ Soit n dans $\mathbb{N}$. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = x^n$ et $v(x) = e^{-x}$. u_n et v sont n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_n = \dfrac{1}{n!}\, u_n\, v$.

La formule de leïbniz donne alors : $f_n^{(n)} = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, u_n^{(k)}\, v^{(n-k)} = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, u_n^{(n-k)}\, v^{(k)}$.

Deux récurrences simples montrent que :

1. $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ u_n^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)\, x^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}\, x^{n-k}$.
2. $\forall k \in \mathbb{N},\ v^{(k)} = (-1)^k\, v$ ou $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ v^{(k)}(x) = (-1)^k\, e^x$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(n)}(x) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} u_n^{(n-k)}(x)\, v^{(k)}(x) \right] = \dfrac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} \dfrac{n!}{(n-(n-k))!}\, x^{n-(n-k)}\, (-1)^k\, e^{-x} \right].$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(n)}(x) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} \dfrac{n!}{k!}\, x^k\, (-1)^k\, e^{-x} \right] = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \left[\dfrac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k \right].$

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ L_n(x) = e^x f_n^{(n)}(x) = e^x \left(e^{-x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[\dfrac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k \right] \right) = \sum_{k=0}^{n} \left[\dfrac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k \right] = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k.$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k \text{ ou } L_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} X^k\ .}$$

3 ~~8.~~ Notons que $\dfrac{(-1)^n}{n!} \dbinom{n}{n} = \dfrac{(-1)^n}{n!} \neq 0$! ! Alors plus de doute !

$\boxed{\text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N},\ L_n \text{ est une fonction polynômiale (ou un polynôme) de degré } n \text{ dont le coefficient du terme de plus haut degré est } \dfrac{(-1)^n}{n!}.}$

4 ~~9.~~ Soit n dans $\mathbb{N}$. $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{(n+1)!}\, x^{n+1}\, e^{-x}.$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'_{n+1}(x) = \dfrac{1}{(n+1)!}(n+1)\, x^n\, e^{-x} + \dfrac{1}{(n+1)!}\, x^{n+1}\, (-e^{-x}) = \dfrac{1}{n!}\, x^n\, e^{-x} - \dfrac{1}{(n+1)!}\, x^{n+1}\, e^{-x} = f_n(x) - f_{n+1}(x).$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f'_{n+1}(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x).}$$

5 ~~10.~~ Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ L_{n+1}(x) = e^x f_{n+1}^{(n+1)}(x)$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ L'_{n+1}(x) = e^x f_{n+1}^{(n+1)}(x) + e^x f_{n+1}^{(n+2)}(x) = e^x \left(f_{n+1}^{(n+1)}(x) + f_{n+1}^{(n+2)}(x) \right).$

Or $f'_{n+1} = f_n - f_{n+1}$. En dérivant $n+1$ fois on obtient : $f_{n+1}^{(n+2)} = f_n^{(n+1)} - f_{n+1}^{(n+1)}$ ou $f_{n+1}^{(n+1)} + f_{n+1}^{(n+2)} = f_n^{(n+1)}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ L'_{n+1}(x) = e^x f_n^{(n+1)}(x)$

Or $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(n)}(x) = e^{-x} L_n(x)$. En dérivant on obtient :

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(n+1)}(x) = -e^{-x} L_n(x) + e^{-x} L'_n(x) = e^{-x} \left(L'_n(x) - L_n(x) \right).$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ L'_{n+1}(x) = e^x f_n^{(n+1)}(x) = e^x e^{-x} \left(L'_n(x) - L_n(x) \right) = L'_n(x) - L_n(x).$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x) \text{ ou } \forall n \in \mathbb{N},\ L'_{n+1} = L'_n - L_n.}$$

6 ~~11.~~ $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}\, e^{-x}}{(n+1)!} = \dfrac{x}{n+1} \dfrac{x^n\, e^{-x}}{n!} = \dfrac{x}{n+1}\, f_n(x).$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1}\, f_n(x).}$$

7 ~~12.~~ Soit n dans $\mathbb{N}$. $\forall x \in \mathbb{R},\ (n+1)\, L_{n+1}(x) = (n+1)\, e^x f_{n+1}^{(n+1)} = e^x \left((n+1)\, f_{n+1} \right)^{(n+1)}(x).$

Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R},\ u_1(x) = x$. Alors $(n+1)\, f_{n+1} = u_1\, f_n$ d'après ~~Q11~~. 6

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ (n+1)\, L_{n+1}(x) = e^x \left((n+1)\, f_{n+1} \right)^{(n+1)}(x) = e^x\, (u_1\, f_n)^{(n+1)}(x).$

La formule de Leïbniz donne $(u_1\, f_n)^{(n+1)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u_1^{(k)}\, f_n^{(n+1-k)}$.

Or $u_1^{(0)} = u_1$, $u_1^{(1)} = 1$ et $\forall k \in [\![2, +\infty[\![$, $u_1^{(k)} = 0$.

Alors $(u_1\, f_n)^{(n+1)} = \displaystyle\binom{n+1}{0} u_1\, f_n^{(n+1)} + \binom{n+1}{1} 1 \times f_n^{(n)} = u_1\, f_n^{(n+1)} + (n+1)\, f_n^{(n)}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $(n+1)\, L_{n+1}(x) = e^x\, (u_1\, f_n)^{(n+1)}(x) = e^x \Big(x\, f_n^{(n+1)}(x) + (n+1)\, f_n^{(n)}(x) \Big)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $(n+1)\, L_{n+1}(x) = x\, e^x\, f_n^{(n+1)}(x) + (n+1)\, e^x\, f_n^{(n)}(x) = x\, e^x\, f_n^{(n+1)}(x) + (n+1)\, L_n(x)$.

Remarquons alors que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n^{(n)}(x) = e^{-x}\, L_n(x)$.

Donc en dérivant il vient $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n^{(n+1)}(x) = -e^{-x}\, L_n(x) + e^{-x}\, L'_n(x)$ ou $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x\, f_n^{(n+1)}(x) = -L_n(x) + L'_n(x)$ (résultat que nous avions déjà obtenu dans ~~Q10~~ 5...).

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $(n+1)\, L_{n+1}(x) = x\, e^x\, f_n^{(n+1)}(x) + (n+1)\, L_n(x) = x\, \big(- L_n(x) + L'_n(x) \big) + (n+1)\, L_n(x)$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $(n+1)\, L_{n+1}(x) = x\, L'_n(x) + (n+1-x)\, L_n(x)$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{R},\ (n+1)\, L_{n+1}(x) = x\, L'_n(x) + (n+1-x)\, L_n(x).}$$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N},\ (n+1)\, L_{n+1} = X\, L'_n + (n+1-X)\, L_n.}$$

8 ~~13.~~ Soit n dans $\mathbb{N}$. $(n+1)\, L_{n+1} = X\, L'_n + (n+1-X)\, L_n$. En dérivant on obtient :

$(n+1)\, L'_{n+1} = L'_n + X\, L''_n - L_n + (n+1-X)\, L'_n = X\, L''_n - L_n + (n+2-X)\, L'_n$. Or $L'_{n+1} = L'_n - L_n$.

Ainsi $(n+1)\, (L'_n - L_n) = X\, L''_n - L_n + (n+2-X)\, L'_n$. Ce qui donne :

$0_{\mathbb{R}[X]} = -(n+1)\, (L'_n - L_n) + X\, L''_n - L_n + (n+2-X)\, L'_n = X\, L''_n - (X-1)\, L'_n + n\, L_n$.

$X\, L''_n - (X-1)\, L'_n + n\, L_n = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X\, L''_n - (X-1)\, L'_n + n\, L_n = 0_{\mathbb{R}[X]} \text{ ou } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x\, L''_n(x) - (x-1)\, L'_n(x) + n\, L_n(x) = 0.}$$

Partie ~~III~~ 2 Produit scalaire, orthogonalité, endomorphisme

9 ~~14.~~ • Soit k un élément de $\mathbb{N}$.

$k+1$ est strictement positif donc $k+1$ appartient au domaine de définition de la fonction Γ.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{(k+1)-1}\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$ converge donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$ est convergente.

Pour tout élément k de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$ est convergente.

• Soit A un élément de E. Il existe un élément r de $\mathbb{N}$ et un élément $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ de $\mathbb{R}^{r+1}$ tels que :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $A(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, x^k$.

Pour tout élément k de $\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{r} a_k\,x^k\,e^{-x}\right)\mathrm{d}x$ converge comme combinaison linéaire de $r+1$ intégrales convergentes. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} A(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } A \text{ de } E, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} A(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x \text{ est convergente.}}$$

Remarque *On pouvait obtenir l'absolue convergence, donc la convergence, de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} A(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$ *en montrant que* $\left|A(x)\,e^{-x}\right| \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ *par croissance comparée.*

10 ~~15.~~ • Soit (P,Q) un couple d'éléments de E.

$P\,Q$ appartient à E donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}(PQ)(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge ! Ainsi $< P,Q >$ existe.

$< .,. >$ est une application de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit λ un réel et soient P, Q, R trois éléments de E.

$$< \lambda\,P+Q,R >= \int_0^{+\infty}\big(\lambda\,P+Q\big)(x)\,R(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\big(\lambda\,P(x)\,R(x)+Q(x)\,R(x)\big)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

$$< \lambda\,P+Q,R >= \int_0^{+\infty}\big(\lambda\,P(x)\,R(x)\,e^{-x}+Q(x)\,R(x)\,e^{-x}\big)\,\mathrm{d}x = \lambda\int_0^{+\infty} P(x)\,R(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty} Q(x)\,R(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

car toutes les intégrales convergent. Alors $< \lambda\,P+Q,R >= \lambda\, < P,R > + < Q,R >$.

$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall(P,Q,R)\in E^3,\ < \lambda\,P+Q,R >= \lambda\, < P,R > + < Q,R >$. $< .,. >$ est linéaire à gauche.

• Soit (P,Q) un couple d'éléments de E. $\displaystyle < P,Q >= \int_0^{+\infty} P(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} Q(x)\,P(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x =< Q,P >$.

$\forall(P,Q)\in E^2,\ < P,Q >=< Q,P >$. $< .,. >$ est symétrique.

• Soit P un élément de E. $\forall x\in\mathbb{R},\ \big(P(x)\big)^2\,e^{-x}\geqslant 0$ et $0\leqslant+\infty$! donc $\displaystyle < P,P >= \int_0^{+\infty}\big(P(x)\big)^2\,e^{-x}\,\mathrm{d}x\geqslant 0$.

$\forall P\in E,\ < P,P >\geqslant 0$. $< .,. >$ est positive.

• Soit P un élément de E tel que $< P,P >= 0$.

▼ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\big(P(x)\big)^2\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = 0$.

▼ $x\to\big(P(x)\big)^2\,e^{-x}$ est positive sur $[0,+\infty[$.

▼ $x\to\big(P(x)\big)^2\,e^{-x}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

▼ $0\neq+\infty$!

Alors $x\to\big(P(x)\big)^2\,e^{-x}$ est nulle sur $[0,+\infty[$. Comme $x\to e^{-x}$ ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$: $\forall x\in[0,+\infty[,\ \big(P(x)\big)^2=0$.

Ainsi $\forall x\in[0,+\infty[,\ P(x)=0$. La fonction polynômiale P admet alors une infinité de zéro c'est donc la fonction polynômiale nulle. $P=0_E$.

$\forall P\in E,\ < P,P >\Rightarrow P=0_E$. $< .,. >$ est définie.

Les cinq points précédents permettent de dire que :

$$\boxed{< .,. > \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

11 ~~**16.**~~ • Soit P un élément de E. $x \to x$, P'', $x \to x-1$ et P' sont des applications polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Par produit $x \to x\,P''(x)$ et $x \to (x-1)\,P'(x)$ sont des applications polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Par combinaison linéaire $x \to x\,P''(x) - (x-1)\,P'(x)$ est une application polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc un élément de E. Ainsi $T(P)$ appartient à E.

$\forall P \in E,\ T(P) \in E$. T est une application de E dans E.

• Soit λ un réel et soient P, Q deux éléments de E.

$\forall x \in \mathbb{R},\ T(\lambda\,P+Q)(x) = x\,(\lambda\,P+Q)''(x) - (x-1)\,(\lambda\,P+Q)'(x) = x\,\big(\lambda\,P''(x)+Q''(x)\big) - (x-1)\,\big(\lambda\,P'(x)+Q'(x)\big)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ T(\lambda\,P+Q)(x) = \lambda\big(x\,P''(x)+(x-1)\,P'(x)\big) + \big(x\,Q''(x)+(x-1)\,Q'(x)\big) = \lambda\,T(P)(x) + T(Q)(x)$

$\forall x \in \mathbb{R},\ T(\lambda\,P+Q)(x) = \big(\lambda\,T(P)+T(Q)\big)(x)$. $T(\lambda\,P+Q) = \lambda\,T(P)+T(Q)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P,Q) \in E^2,\ T(\lambda\,P+Q) = \lambda\,T(P)+T(Q)$. T est linéaire. Ce qui achève de montrer que :

$$\boxed{T \text{ est un endomorphisme du } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel } E.}$$

12 ~~**17.**~~ Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = x\,P'(x)\,e^{-x}$.

φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = P'(x)\,e^{-x} + x\,P''(x)\,e^{-x} + x\,P'(x)\,(-e^{-x}) = (x\,P''(x) - (x-1)\,P'(x))\,e^{-x} = T(P)(x)\,e^{-x}$.

$x \to T(P)(x)\,e^{-x}$ est la dérivée de $x \to x\,P'(x)\,e^{-x}$.

Pour pout P dans E, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \to T(P)(x)\,e^{-x}$ est la dérivée de l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \to x\,P'(x)\,e^{-x}$.

13 ~~**18.**~~ Soient P et Q deux éléments de E.

Rappelons que nous avons posé $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = x\,P'(x)\,e^{-x}$. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = T(P)(x)\,e^{-x}$.

$\displaystyle\int_0^A T(P)(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^A \varphi'(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x$. φ et Q sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc nous pouvons intégrer par parties.

$\displaystyle\int_0^A T(P)(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^A \varphi'(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\varphi(x)\,Q(x)\Big]_0^A - \int_0^A \varphi(x)\,Q'(x)\,\mathrm{d}x$.

$\displaystyle\int_0^A T(P)(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \varphi(A)\,Q(A) - \varphi(0)\,Q(0) - \int_0^A x\,P'(x)\,e^{-x}\,Q'(x)\,\mathrm{d}x$. Notons que $\varphi(0)=0$. Alors :

$\displaystyle\int_0^A T(P)(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = A\ P'(A)\,e^{-A}\,Q(A) - \int_0^A x\,P'(x)\,e^{-x}\,Q'(x)\,\mathrm{d}x$.

$\displaystyle\int_0^A T(P)(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = A\ P'(A)\,Q(A)\,e^{-A} - \int_0^A x\,P'(x)\,Q'(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad (1).$

$x \to x\,P'(x)\,Q'(x)$ appartient à E comme produit de trois éléments de E.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,P'(x)\,Q'(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A x\,P'(x)\,Q'(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\,P'(x)\,Q'(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad (2).$

Montrons maintenant que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \big(A\ P'(A)\,Q(A)\,e^{-A}\big) = 0$.

$x \to x\,P'(x)\,Q(x)$ est un élément de E comme produit de trois éléments de E.

Si $x \to x\,P'(x)\,Q(x)$ est la fonction nulle de E alors $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \big(A\ P'(A)\,Q(A)\,e^{-A}\big) = 0\,!$

Supposons maintenant que $x \to x\,P'(x)\,Q(x)$ n'est pas la fonction nulle de E.

Soit r le degré de la fonction polynôme $x \to x\,P'(x)\,Q(x)$ et a_r le coefficient de son terme de plus haut degré.

$\left(A\ P'(A)\,Q(A)\,e^{-A}\right) \underset{A\to+\infty}{\sim} a_r\,A^r\,e^{-A} = a_r\,\dfrac{A^r}{e^A}$ et $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(a_r\,\dfrac{A^r}{e^A}\right) = 0$ par croissance comparée.

Alors $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(A\ P'(A)\,Q(A)\,e^{-A}\right) = 0 \quad (3).$

En faisant tendre A vers $+\infty$ dans (1), et en tenant compte de (2) et (3) on obtient :

$$\int_0^{+\infty} T(P)(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} x\,P'(x)\,Q'(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\forall (P,Q)\in E\times E,\ < T(P),Q >= -\int_0^{+\infty} x\,P'(x)\,Q'(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x.}$$

14 ~~**19.**~~ Soit P et Q deux éléments de E. $< T(P),Q >= -\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,P'(x)\,Q'(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x.$

L'intégrale ne change pas si l'on permute P et Q donc $< T(P),Q >=< T(Q),P >$.

Par symétrie du produit scalaire : $< T(P),Q >=< P,T(Q) >$.

$$\boxed{\forall (P,Q)\in E\times E,\ < T(P),Q >=< P,T(Q) >.}$$

Remarque *T est un endomorphisme symétrique de $(E,< .,. >)$, non ?! Mais il est vrai que le programme se limite aux endomorphismes symétriques d'espaces vectoriels euclidiens...*

15 ~~**20.**~~ Soit n dans $\mathbb{N}$. $\forall x\in\mathbb{R},\ T(L_n)(x) = x\,L_n''(x) - (x-1)\,L_n'(x) = -n\,L_n(x)$ d'après ~~Q13~~ 8. Donc $T(L_n) = -n\,L_n$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ T(L_n) = -n\,L_n.}$$

Remarque *Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $L_n \neq 0_E$. Donc pour tout n dans $\mathbb{N}$, $-n$ est une valeur propre de T et L_n est un vecteur propre associé.*

Exercice *Montrer que le spectre de T est $\{-n\,,\ n\in\mathbb{N}\}$.*

16 ~~**21.**~~ Soient i et j deux éléments distincts de $[\![0,N]\!]$. $< T(L_i),L_j >=< L_i,T(L_j) >$ d'après ~~Q19~~. 14

Donc $< -i\,L_i,L_j >=< L_i,-j\,L_j >$. Alors $-i\ < L_i,L_j >= -j\ < L_i,L_j >$ et ainsi $(j-i)\ < L_i,L_j >= 0$.

Comme $j-i$ n'est pas nul : $< L_i,L_j >$ est nul.

$\forall (i,j)\in[\![0,N]\!]^2,\ i\neq j \Rightarrow < L_i,L_j >= 0.$

$$\boxed{(L_0,L_1,\ldots,L_N) \text{ est une famille orthogonale de } E.}$$

Remarque *Ce qui n'est pas un scoop car L_0, L_1, ..., L_N sont des vecteurs propres d'un endomorphisme symétrique associés à des valeurs propres deux à deux distinctes.*

17 ~~**22.**~~ Soit P un élément de E_N. P est une fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à N.

P'' (resp. P') est une fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à $N-2$ (resp. $N-1$).

Alors $x \to x\,P''(x)$ (resp. $x \to (x-1)\,P'(x)$) est une fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à $N-1$ (resp. N).

Alors les deux fonctions $x \to x\, P''(x)$ et $x \to (x-1)\, P'(x)$ appartiennent à E_N. Leur différence également.

Ainsi $T(P)$ appartient à E.

$$\boxed{\forall P \in E_N,\ T(P) \in E_N.}$$

18 **~~23.~~** D'après Q3 ~~Q8~~, pour tout i dans $[\![0, N]\!]$, L_i est une fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré i.

Donc pour tout i dans $[\![0, N]\!]$, L_i est un élément de E_N.

$(L_0, L_1, \ldots, L_N)$ est une famille orthogonale d'éléments **non nuls** de E_N. C'est donc une famille libre de cardinal $N+1$ de E_N qui est de dimension $N+1$. Alors c'est une base de E_N.

$$\boxed{(L_0, L_1, \ldots, L_N) \text{ est une base de } E_N.}$$

19 **~~24.~~** $\forall i \in [\![0, N]\!],\ T(L_i) = -i\, L_i$. Donc

$$\boxed{\text{la matrice de } T_N \text{ dans la base } (L_0, L_1, \ldots, L_N) \text{ est la matrice diagonale } \mathrm{Diag}(0, -1, -2, \ldots, -N) \text{ de } \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R}).}$$

$$\boxed{M_{(L_0, L_1, \ldots, L_N)}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -N \end{pmatrix}.}$$

20 **~~25.~~** Restons poli ! Oui T_N est diagonalisable car $(L_0, L_1, \ldots, L_N)$ est une base de E_N constituée de vecteurs propres de T_N ! ! !

$$\boxed{T_N \text{ est diagonalisable.}}$$

0 est valeur propre de T_N donc T_N n'est pas injectif et encore moins bijectif !

$$\boxed{T_N \text{ n'est pas bijectif.}}$$

Partie IV : Nature d'une série de maximums

26. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \in [0, +\infty[,\ g_n'(x) = \dfrac{1}{n!}\Big(n\, x^{n-1}\, e^{-x} + x^n\, (-e^{-x})\Big)$.

$\forall x \in [0, +\infty[,\ g_n'(x) = \dfrac{1}{n!}\, x^{n-1}\, e^{-x}\, (n - x)$.

g_n est continue sur $[0, +\infty[$, $\forall x \in]0, n[,\ g_n'(x) > 0$ et $\forall x \in]n, +\infty[,\ g_n'(x) < 0$.

Ceci suffit pour dire que g_n est strictement croissante sur $[0, n]$ et strictement décroissante sur $[n, +\infty[$.

Donc $\forall x \in [0, n[,\ g_n(x) < g_n(n)$ et $\forall x \in]n, +\infty[,\ g_n(n) > g_n(x)$ et ainsi $\forall x \in [0, n[\cup]n, +\infty[,\ g_n(x) < g_n(n)$.

Dans ces conditions, g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ atteint en le seul point n.