Devoir non surveillé 18

À rendre le mardi 13 février

Exercice 1

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle (orienté par la base canonique) et on note f l'endomorphisme canoniquement associé à M.

1. Montrer f est une rotation si et seulement si a, b, c vérifient trois équations à déterminer.
2. Montrer que si f est une rotation alors a, b, c sont racines de $X^3 - X^2 + p = 0$ avec $p \in [0, 4/27]$.
   On pourra considérer l'image par f de la base canonique.
3. On suppose que $b = c \neq 0$ et que les conditions précédentes sont bien vérifiées.
   Déterminer l'axe et l'angle de la rotation. *Ne pas se précipiter dans les calculs.*

Exercice 2

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, et $\mathbb{R}_n[X]$ celui des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On définit une suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de polynômes par :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X \quad \text{ et } \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad T_{k+1} = 2XT_k - T_{k-1}.$$

Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_0^\pi P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))d\theta$.

1. Démontrer que $(P, Q) \longmapsto (P|Q)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer T_2, T_3 et T_4.
3. Déterminer le degré de T_n, son coefficient dominant et étudier la parité de T_n.
   On démontrera soigneusement le résultat.
4. Calculer $T_n(1), T_n(-1)$ et $T_n(0)$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on dit qu'un polynôme P vérifie la propriété (p_n) si $\forall\theta \in \mathbb{R},\ P(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
   (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n vérifie la propriété (p_n).
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant la propriété (p_n). Montrer que $P = T_n$.
6. On suppose dans cette question que $n \geq 1$ et on étudie les racines de T_n.
   (a) Pour quelles valeurs de $\theta \in \mathbb{R}$ a-t-on $T_n(\cos(\theta)) = 0$?
   (b) En déduire que T_n possède n racines, qu'elles sont distinctes et qu'elles sont dans $[-1, 1]$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $(T_n|T_n)$.
8. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ distincts. Calculer $(T_n|T_m)$.
9. En déduire une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}_n[X]$.
10. On définit l'application Φ de $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Phi(P) = (X^2 - 1)P'' + XP'$.
    Démontrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
11. Déterminer la matrice de Φ dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
12. Quelles sont les valeurs propres de Φ ? L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?
13. Calculer $\Phi(T_n)$. En déduire les sous-espaces propres de Φ.
14. Démontrer que Φ est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Problème

Partie 1 : On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les applications

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^n e^{-x}}{n!} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad L_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x f_n^{(n)}(x) \end{array} \right. ,$$

où $f_n^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f_n.

1. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $L_0(x), L_1(x), L_2(x)$.
2. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k.$$
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est une fonction polynomiale dont on précisera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.
4. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_{n+1}'(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x).$$
5. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad L_{n+1}'(x) = L_n'(x) - L_n(x).$$
6. Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1} f_n(x).$$
7. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad (n+1)L_{n+1}(x) = xL_n'(x) + (n+1-x)L_n(x).$$
8. Établir :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad xL_n''(x) - (x-1)L_n'(x) + nL_n(x) = 0.$$

Partie 2 :

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $N \in \mathbb{N}$ fixé. On note E_N le sous-espace vectoriel de E formé des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à N.

9. Montrer que pour tout $A \in E$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} A(x)e^{-x}dx$ converge.

   On considère l'application
$$\left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & \langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx \end{array} \right.$$
10. Montrer que $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur E.

    On considère, pour tout $P \in E$, l'application $T(P) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad T(P)(x) = xP''(x) - (x-1)P'(x).$$

11. Vérifier que T est un endomorphisme du $\mathbb{R}$ espace vectoriel E.
12. Montrer que, pour tout $P \in E$, l'application $x \in \mathbb{R} \longmapsto T(P)(x)e^{-x}$ est la dérivée de l'application $x \in \mathbb{R} \longmapsto xP'(x)e^{-x}$.
13. En déduire que pour tout $(P, Q) \in E \times E$:

$$\langle T(P), Q \rangle = -\int_0^{+\infty} xP'(x)Q'(x)e^{-x}dx.$$

14. Montrer que T est un endomorphisme autoadjoint de E.
15. En utilisant le résultat de la question 8, calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T(L_n)$.
16. En déduire que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est orthogonale.
17. Montrer :

$$\forall P \in E_n, \qquad T(P) \in E_n.$$

On note T_N l'endomorphisme induit par T sur E_N, c'est-à-dire l'endomorphisme T_N de E_N défini par :

$$\forall P \in E_N, \qquad T_N(P) = T(P).$$

18. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de E_N.
19. Donner la matrice de T_N dans la base $(L_0, \dots, L_n)$ de E_N.
20. Est-ce que T_N est diagonalisable ? Est-ce que T_N est bijectif ?