# Devoir non surveillé 17 - Correction

**Problème**
*CCP PC 2018 (début)*

*Une correction de L. Carrot*

## Partie I - Quelques résultats généraux

1. $U_0 = 1$ et $L_0 = \dfrac{1}{2^0 0!} U_0^{(0)} = 1$.
   $U_1 = (X^2-1)$ et $L_1 = \dfrac{1}{2^1 1!} U_1^{(1)} = \dfrac{1}{2}(2X) = X$.
   $U_2 = (X^2-1)^2 = X^4 - 2X^2 + 1$ et $L_2 = \dfrac{1}{2^2 2!} U_2^{(2)} = \dfrac{1}{8}(4X^3-4X)' = \dfrac{1}{8}(12X^2-4) = \dfrac{1}{2}(3X^2-1)$.
2. (un peu trop détaillée ici) • Montrons par récurrence sur $k$ que :

$$\text{pour tout } k \in [\![0,n]\!],\ \deg(U_n^{(k)}) = 2n-k \text{ et } \mathrm{cd}(U_n^{(k)}) = \prod_{i=0}^{k-1}(2n-i)\ (HR_k).$$

**Initialisation :** $U_n^{(0)} = U_n = (X^2-1)^n = X^{2n} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(X^2)^k$ est bien un polynôme de degré $2n-0$ ayant pour coefficient dominant 1.
**Hérédité :** Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ et supposons $HR_k$ vérifiée.
Alors $U_n^{(k)}$ est de degré $2n-k$ et a pour coefficient dominant $\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(2n-i)$, donc il existe $Q \in \mathbb{R}_{2n-k-1}[X]$ tel que

$$U_n^{(k)} = \left(\prod_{i=0}^{k-1}(2n-i)\right) X^{2n-k} + Q,$$

donc

$$\begin{aligned} U_n^{(k+1)} &= \left(\prod_{i=0}^{k-1}(2n-i)\right)(2n-k)X^{2n-k-1} + Q' \\ &= \left(\prod_{i=0}^{k}(2n-i)\right) X^{2n-k-1} + \underbrace{Q'}_{\in \mathbb{R}_{2n-k-2}[X]} \end{aligned}$$

donc $U_n^{(k+1)}$ est bien un polynôme de degré $2n-(k+1)$ et de coefficient dominant $\left(\displaystyle\prod_{i=0}^{k+1-1}(2n-i)\right) X^{2n-k} + Q$.
On a bien $HR_{k+1}$.
**Conclusion :** D'où, par récurrence, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $U_n^{(k)}$ est de degré $2n-k$ et a pour coefficient dominant $\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(2n-i)$.

- Par suite, $L_n = \dfrac{1}{2^n n!}U_n^{(n)}$ est de degré $2n - n = n$ et a pour coefficient dominant :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2^n n!}\prod_{i=0}^{n-1}(2n-i) = \frac{1}{2^n n!}\prod_{i=n+1}^{2n} i \\ &= \frac{1}{2^n n!}\frac{(2n)!}{n!} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

3. La famille $(L_0, \dots, L_n)$ est libre (degrés échelonnés) et elle est composée de $n+1$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel de dimension $n+1$, donc $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = (X^2-1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$, donc $U_n$ a deux racines, -1 et 1, de multiplicité $n$.
   • Comme $U_n = (X^2-1)^n$, $U_n' = n(2X)(X^2-1)^{n-1} = 2n(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-0)$, donc, en prenant $\lambda = 2n$ et $\alpha = 0 \in ]-1,1[$, on a bien

$$U_n' = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha).$$

**Remarque.** Promis, je n'ai pas fait exprès de les déterminer, ils sont apparus tous seuls, comme des grands...
L'énoncé attendait certainement une autre méthode, que je vais mettre en oeuvre ci-dessous

• Comme -1 et 1 sont racines de multiplicité $n$ de $U_n$, elles sont racines de multiplicité $n-1$ de $U_n'$, donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$U_n' = (X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}Q.$$

Comme $\deg(U_n') = \deg(U_n) - 1 = 2n-1$ et $\deg((X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}) = 2n-2$, on a $\deg(Q) = 1$.
On a $U_n(1) = U_n(-1)$ où $U_n$ est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ (c'est un polynôme !), donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $\alpha \in ]-1,1[$ tel que $U_n'(\alpha) = 0$. Or, $U_n'(\alpha) = \underbrace{(\alpha-1)^{n-1}(\alpha+1)^{n-1}}_{\neq 0 \text{ car } \alpha \neq \pm 1}Q(\alpha)$, donc on a $Q(\alpha) = 0$.
Comme on a aussi $\deg(Q) = 1$ et $Q(\alpha) = 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q = \lambda(X-\alpha)$ et on a donc

$$U_n' = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha).$$

5. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   Supposons qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel $\mu$ tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k).$$

On supposera de plus, quitte à renuméroter, que $\alpha_1 < \cdots < \alpha_k$.
• Alors, comme $-1$ et $1$ sont racines de multiplicité $n-k \geq 1$ de $U_n^{(k)}$, -1 et 1 sont racines de multiplicité $n-k-1$ de $(U_n^{(k)})' = U_n^{(k+1)}$, donc il existe donc $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $U_n^{(k+1)} = (X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k+1}Q$.
• Comme $\deg(U_n^{(k+1)}) = 2n-k-1$ et $\deg((X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k+1}) = 2n-2k-2$, on a $\deg(Q) = k+1$.
• Posons $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_{k+1} = 1$. Alors on a $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k < \alpha_{k+1}$.
Pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $U_n^{(k)}$ est continu sur $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$, dérivable sur $]\alpha_{k-1}, \alpha_k[$ (polynôme) et $U_n^{(k)}(\alpha_{k-1}) = U_n^{(k)}(\alpha_k) \quad (= 0)$.
Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $\beta_k \in ]\alpha_{k-1}, \alpha_k[$ tel que $(U_n^{(k)})'(\beta_k) = 0 \Leftrightarrow U_n^{(k+1)}(\beta_k) = 0$.
On a de plus, par construction,

$$-1 = \alpha_0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \cdots < \alpha_k < \beta_{k+1} < \alpha_{k+1} = 1,$$

donc les réels $(\beta_i)_{1 \leq i \leq k+1}$ sont deux à deux distincts.
• Pour tout $i \in [\![1, k+1]\!]$, $U_n^{(k+1)}(\beta_i) = \underbrace{(\beta_i-1)^{n-1}(\beta_i+1)^{n-1}}_{\neq 0 \text{ car } \beta_i \neq \pm 1}Q(\beta_i)$, donc, comme $U_n^{(k+1)}(\beta_i) = 0$, on a

$Q(\beta_i) = 0$, et donc $\beta_i$ est une racine de $Q$.
• $Q$ est un polynôme de degré $k+1$ qui admet pour racines (distinctes !) $\beta_1, \ldots, \beta_{k+1}$, donc il existe $\nu \in \mathbb{R}$ tel que $Q = \nu(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1})$, et donc

$$U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1}).$$

6. • Les questions 4 (initialisation pour $k=1$) et 5 (hérédité pour $k \in [\![0, n-1]\!]$) permettent de démontrer par récurrence que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel $\mu_k$ tels que :
$$U_n^{(k)} = \mu_k(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k).$$
• En particulier, pour $k=n$, il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel $\mu_n$ tels que :

$$\begin{aligned} L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)} &= \frac{1}{2^n n!}\mu_n(X-1)^{n-n}(X+1)^{n-n}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n) \\ &= \frac{1}{2^n n!}\mu_n(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n), \end{aligned}$$

donc $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont $n$ racines distinctes de $L_n$, et toutes ces racines sont dans $]-1,1[$.
En les ordonnant, on a bien l'existence des réels $-1 < x_1 < \cdots < x_n < 1$ tels que

$$L_n = a_n \prod_{i=1}^{n}(X-x_i)$$

car $L_n$ est de degré $n$ et de coefficient dominant $a_n$.

## Partie II - Étude des éléments propres de l'endomorphisme $\phi$

7. Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \phi(\lambda P + Q) &= (X^2-1)(\lambda P+Q)'' + 2X(\lambda P+Q)' \\ &= (X^2-1)(\lambda P''+Q'') + 2X(\lambda P'+Q') \quad \text{(linéarité de la dérivation)} \\ &= \lambda((X^2-1)P''+2XP') + ((X^2-1)Q''+2XQ') \\ &= \lambda\phi(P) + \phi(Q), \end{aligned}$$

donc $\phi$ est une application linéaire.
De plus, elle va de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ (énoncé), donc c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

8. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi(P) \in \mathbb{R}[X]$ et

$$\begin{aligned} \deg(\phi(P)) = \deg((X^2-1)P''+2XP') &\leq \max((X^2-1)P'', 2XP') = \max(2+\deg(P''), 1+\deg(P')) \\ &\leq \max(2+\deg(P)-2, 1+\deg(P)-1) = \max(\deg(P), \deg(P)) = \deg(P), \end{aligned}$$

donc $\phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
$\mathbb{R}_n[X]$ est donc bien stable par $\phi$.

**Remarque.** Pour rappel, $\deg(P+Q) \boxed{\leq} \max(\deg(P), \deg(Q))$, avec égalité si $\deg(P) = \deg(Q)$,
et $\deg(P') \boxed{\leq} \deg(P) - 1$, avec égalité si $\deg(P) \geq 1$.

9. Soit $M = (m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ la matrice de $\phi_n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Alors, $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $\phi(X^j) = \sum_{i=0}^{n} m_{i,j} X^i$.

Or,

$$\begin{aligned}
\phi(X^0) &= \phi(1) = 0 \\
\phi(X^1) &= 2X \\
\text{et, pour tout } j \in [\![2,n]\!], \phi(X^j) &= (X^2-1)j(j-1)X^{j-2} + 2XjX^{j-1} \\
&= j(j-1)X^j - j(j-1)X^{j-2} + 2jX^j = j(j+1)X^j - j(j-1)X^{j-2}.
\end{aligned}$$

Par identification, on a :

$$\begin{aligned}
m_{0,0} = 0 = 0(0+1) \quad &\text{et} \quad \forall i \geq 1,\ m_{i,0} = 0 \\
m_{1,1} = 2 = 1 \times 2 \quad &\text{et} \quad \forall i \geq 2,\ m_{i,1} = 0 \\
\forall j \in [\![2,n]\!],\ m_{j,j} = j(j+1) \quad &\text{et} \quad \forall i \geq j+1,\ m_{i,j} = 0
\end{aligned}$$

donc $M$ est bien triangulaire supérieure et, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $m_{k,k} = k(k+1)$.

**Remarque.** Pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, $\quad m_{i,j} = \begin{cases} j(j+1) & \text{si } i = j \\ -j(j-1) & \text{si } i = j-2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

10. Comme $M$ est triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur la diagonale.
On a donc $\mathrm{sp}(M) = \{k(k+1),\ k \in [\![0,n]\!]\}$.
Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(k+1)(k+2) - k(k+1) = 2(k+1) > 0$, donc la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
Les réels $(k(k+1))_{k \in [\![0,n]\!]}$ sont donc deux à deux distincts, donc $M$ admet $n+1$ valeurs propres distinctes, et $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, donc $M$ est diagonalisable, donc $\phi_n$ est diagonalisable.

11. • Pour $k = 0$, $U_k' = 0$ et $2kXU_k = 0$, donc $(X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 0$.
• Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $U_k' = 2kX(X^2-1)^{k-1}$, donc $(X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 2kXU_k - 2kXU_k = 0$.
• Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a bien $(X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 0$.

12. D'après la formule de Leibniz pour les polynômes, en prenant la convention (habituelle) $\binom{n}{k} = 0$ si $k \notin [\![0,n]\!]$,

$$\begin{aligned}
((X^2-1)U_k')^{(k+1)} &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} (X^2-1)^{(i)} (U_k')^{(k+1-i)} \\
&= \binom{k+1}{0}(X^2-1)(U_k')^{(k+1)} + \binom{k+1}{1}(X^2-1)'(U_k')^{(k)} + \binom{k+1}{2}(X^2-1)''(U_k')^{(k-1)} \\
&\quad + \sum_{k=3}^{k+1-i} \binom{k+1}{i} \underbrace{(X^2-1)^{(i)}}_{=0 \text{ car } i \geq 3} (U_k')^{(k+1-i)} \\
&= (X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2(k+1)XU_k^{(k+1)} + 2\frac{k(k+1)}{2}U_k^{(k)} \\
\text{et } (2kXU_k)^{(k+1)} &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} (2kX)^{(i)} (U_k)^{(k+1-i)} \\
&= \binom{k+1}{0}(2kX)(U_k)^{(k+1)} + \binom{k+1}{1}(2kX)'(U_k)^{(k)} + \sum_{i=2}^{k+1} \binom{k+1}{i} \underbrace{(2kX)^{(i)}}_{=0 \text{ car } i \geq 2} (U_k)^{(k+1-i)} \\
&= 2kXU_k^{(k+1)} + (k+1)2kU_k^{(k)},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}((X^2-1)U_k'-2kXU_k)^{(k+1)} &= (X^2-1)U_k^{(k+2)}+2(k+1)XU_k^{(k+1)}+k(k+1)U_k^{(k)}-2kXU_k^{(k+1)}-(k+1)2kU_k^{(k)}\\ &= (X^2-1)U_k^{(k+2)}+2XU_k^{(k+1)}-k(k+1)U_k^{(k)}.\end{aligned}$$

Par suite, d'après la question 11,

$$(X^2-1)U_k^{(k+2)}+2XU_k^{(k+1)}-k(k+1)U_k^{(k)}=((X^2-1)U_k'-2kXU_k)^{(k+1)}=(0)^{(k+1)}=0.$$

13. Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $L_k\in\mathbb{R}_n[X]$ (car $\deg(L_k)=k\leq n$), $L_k\neq 0$ (car $a_k\neq 0$) et :

$$\phi_n(L_k)=\phi\left(\frac{1}{2^k k!}U_k^{(k)}\right)=\frac{1}{2^k k!}\left((X^2-1)U_k^{(k+2)}+2XU_k^{(k+1)}\right)\underset{\text{cf Q12}}{=}\frac{1}{2^k k!}k(k+1)U_k^{(k)}=k(k+1)L_k,$$

donc $L_k$ est un vecteur propre de $\phi_n$ associé à la valeur propre $k(k+1)$.

14. • $\phi_n$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (de dimension $n+1$) qui admet $n+1$ valeurs propres distinctes, donc tous les espaces propres de $\phi_n$ sont de dimension 1.
De plus, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $L_k\in E_{k(k+1)}(\phi_n)$, donc $\mathrm{vect}(L_k)\subset E_{k(k+1)}(\phi_n)$ et, par égalité des dimensions, $E_{k(k+1)}(\phi_n)=\mathrm{vect}(L_k)$.
On a donc $\boxed{\mathrm{sp}(\phi_n)=\{k(k+1),\ k\in[\![0,n]\!]\}\text{ et, pour tout }k\in[\![0,n]\!],\ E_{k(k+1)}(\phi_n)=\mathrm{vect}(L_k).}$
• Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $k(k+1)\in\mathrm{sp}(\phi_k)$, pour tout $P\in\mathrm{vect}(L_k)=E_{k(k+1)}(\phi_k)$,

$$\phi(P)=\phi_k(P)=k(k+1)P,$$

donc $P$ est un vecteur propre de $\phi$ associé à la valeur propre $k(k+1)$.
On a donc $\{k(k+1),\ k\in\mathbb{N}\}\subset\mathrm{sp}(\phi)$ et, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\mathrm{vect}(L_k)\subset E_{k(k+1)}(\phi)$.
• Réciproquement, soit $\lambda$ une valeur propre de $\phi$ et $P\neq 0$ un vecteur propre associé à $\lambda$.
Soit $n=\deg(P)$. Alors

$$\lambda P=\phi(P)=\phi_n(P),$$

donc $P$ est un vecteur propre de $\phi_n$ associé à la valeur propre (de $\phi_n$) $\lambda$.
Par suite, $\lambda\in\mathrm{sp}(\phi_n)$, donc il existe $k\in[\![0,n]\!]$ tel que $\lambda=k(k+1)$ et $P\in E_{k(k+1)}(\phi_n)=\mathrm{vect}(L_k)$.
On a donc $\mathrm{sp}(\phi)\subset\{k(k+1),\ k\in\mathbb{N}\}$ et, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $E_{k(k+1)}(\phi)\subset\mathrm{vect}(L_k)$.
• Par double inclusion,

$$\boxed{\mathrm{sp}(\phi)=\{k(k+1),\ k\in\mathbb{N}\}\quad\text{et}\quad\forall k\in\mathbb{N},\quad E_{k(k+1)}(\phi)=\mathrm{vect}(L_k).}$$

## Partie III - Distance au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

15. • Pour tout $P,Q\in\mathbb{R}[X]$, $\langle P,Q\rangle=\displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ existe car $t\mapsto P(t)Q(t)$ est continue sur le segment $[-1,1]$.
• Pour tout $P,Q,R\in\mathbb{R}[X]$, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\langle(\lambda P+Q),R\rangle &= \int_{-1}^1(\lambda P+Q)(t)R(t)dt\\ &= \int_{-1}^1\lambda P(t)R(t)+Q(t)R(t)dt\\ &= \lambda\int_{-1}^1 P(t)R(t)dt+\int_{-1}^1 Q(t)R(t)dt\quad\text{(par linéarité de l'intégrale)}\\ &= \lambda\langle P,R\rangle+\langle Q,R\rangle,\end{aligned}$$

donc $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à gauche.
• Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$,

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt = \int_{-1}^{1} Q(t)P(t)dt = \langle Q, P\rangle,$$

donc $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est symétrique.
• $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est symétrique et linéaire à gauche, donc bilinéaire.
• Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\langle P, P\rangle = \int_{-1}^{1} (P(t))^2 dt \geq 0$$

par positivité de l'intégrale (bornes dans le bon sens), donc $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est positif.
• Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\langle P, P\rangle = 0$.
Comme $t \mapsto P(t)^2$ est continue et positive sur $[-1, 1]$ et $-1 < 1$,

$$\langle P, P\rangle = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} (P(t))^2 dt = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [-1, 1],\ P(t) = 0.$$

Par suite, $P$ a une infinité de racines, donc $P$ est nul.
$\langle \cdot,\cdot\rangle$ est donc défini.
• $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est donc bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

16. Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$,

$$\langle \phi(P), Q\rangle = \int_{-1}^{1} ((t^2-1)P''(t) + 2tP'(t))Q(t)dt.$$

Posons $u'(t) = (t^2-1)P''(t) + 2tP'(t)$, $u(t) = (t^2-1)P'(t)$, $v(t) = Q(t)$, $v'(t) = Q'(t)$.
Comme $u$ et $v$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$, on peut intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned}\langle \phi(P), Q\rangle &= \int_{-1}^{1} ((t^2-1)P''(t) + 2tP'(t))Q(t)dt \\ &= \underbrace{\left[(t^2-1)P'(t)Q(t)\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} (t^2-1)P'(t)Q'(t)dt = -\int_{-1}^{1} (t^2-1)P'(t)Q'(t)dt.\end{aligned}$$

Cette dernière écriture étant symétrique en $P$ et $Q$, on obtient :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \langle \phi(P), Q\rangle = \langle \phi(Q), P\rangle \underset{\text{par symétrie de } \langle \cdot,\cdot\rangle}{=} \langle P, \phi(Q)\rangle.$$

17. Soit $k$ et $n$ deux entiers naturels distincts. On a :

$$\begin{aligned} k(k+1)\langle L_k, L_n\rangle &= \langle k(k+1)L_k, L_n\rangle \quad \text{(linéarité à gauche)} \\ &= \langle \phi(L_k), L_n\rangle \quad (\text{car } L_k \in E_{k(k+1)}(\phi)) \\ &= \langle L_k, \phi(L_n)\rangle \quad \text{(d'après la question précédente)} \\ &= \langle L_k, n(n+1)L_n\rangle \quad (\text{car } L_n \in R_{n(n+1)}(\phi)) \\ &= n(n+1)\langle L_k, L_n\rangle \quad \text{(linéarité à droite)}, \end{aligned}$$

donc $(k(k+1) - n(n+1))\langle L_k, L_n\rangle = 0$, donc $\langle L_k, L_n\rangle = 0$, car, comme $(k(k+1))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite strictement croissante (cf. question 10), $k(k+1) \neq n(n+1)$.
La famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot,\cdot\rangle$.

18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme $(L_0, \ldots, L_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (cf. question 3), pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, il existe $n$ réels $a_0, \cdots a_{n-1}$ tels que $P = \sum_{i=0}^{n-1} a_i L_i$. Par suite,

$$\begin{aligned}
\langle P, L_n \rangle &= \left\langle \sum_{i=0}^{n-1} a_i L_i, L_n \right\rangle \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \langle L_i, L_n \rangle \quad \text{(linéarité à gauche)} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} 0 \quad \text{(car, pour tout } i \in [\![0, n-1]\!],\ i \neq n \text{ et d'après la question 17)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

19. • Soit $k$ et $n$ deux entiers naturels distincts. On a :

$$\langle Q_k, Q_n \rangle = \sqrt{\frac{2k+1}{2}}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\langle L_k, L_n \rangle = 0,$$

donc la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

• De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|Q_n\| \underset{\text{homogénéité}}{=} \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\|L_n\| = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\sqrt{\frac{2}{2n+1}} = 1,$$

donc $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

• De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, en posant $n = \deg(P)$, il existe $a_0, ..., a_n$ tels que $P = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i = \sum_{i=0}^{n} \left( a_i \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \right)$

donc la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbb{R}[X]$.

Comme elle est de plus libre (car orthogonale), c'est une base de $\mathbb{R}[X]$.

• $\boxed{(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc une base orthonormale de } \mathbb{R}[X] \text{ pour le produit scalaire } \langle \cdot, \cdot \rangle.}$

**Remarque.** La notion de famille libre ou génératrice infinie n'est plus au programme... Il suffisait donc de répondre que $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de $\mathbb{R}[X]$ ?

20. Soit $n \in \mathbb{N}$.

• $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}[X]$.

Donc, d'après la caractérisation par la distance du projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \|P - T_n\|$ et $T_n$ est le projeté orthogonal de $P$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

• D'après le théorème de Pythagore,

$$\|P\|^2 = \|T_n\|^2 + \|P - T_n\|^2,$$

donc

$$\begin{aligned}
d(P,\mathbb{R}_n[X])^2 &= \|P-T_n\|^2 = \|P\|^2 - \|T_n\|^2 \\
&= \|P\|^2 - \left\|\sum_{k=0}^{n}\langle P,Q_k\rangle Q_k\right\|^2 \quad \text{(caractérisation du projeté orthogonal dans une base orthonormée)} \\
&= \|P\|^2 - \sum_{k=0}^{n}\langle P,Q_k\rangle^2 \quad \text{(car } (Q_k) \text{ est une famille orthonormale)} \\
&= \|P\|^2 - \sum_{k=0}^{n}(c_k(P))^2, \qquad \text{où } c_k(P) = \langle P,Q_k\rangle.
\end{aligned}$$

21. • On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(c_k(P))^2 = \|P\|^2 - d(P,\mathbb{R}_n[X])^2 \leq \|P\|^2$.

- De plus, la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n}(c_k(P))^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc elle converge (croissante et majorée par $\|P\|^2$).
- Par suite, la série $\sum(c_k(P))^2$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(c_k(P))^2 \leq \|P\|^2$.

**Remarque.** Je pense que la preuve ci-dessus est celle attendue, mais il y a plus simple et on aboutit en plus à un résultat plus précis...
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Posons $n = \deg(P)$.
Alors, pour tout $k > n$, $\langle P,Q_k\rangle = \sqrt{\dfrac{2k+1}{2}}\langle P,L_k\rangle = 0$ (d'après la question 18)
D'où $\sum(c_k(P)^2$ converge (car $(c_k(P))^2$ est nul au-delà d'un certain rang) et

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(c_k(P))^2 = \sum_{k=0}^{n}(c_k(P))^2 = \sum_{k=0}^{n}\langle P,Q_k\rangle^2 = \|P\|^2$$

car $(Q_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.