Devoir non surveillé 17

À rendre le mardi 6 février

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée n-ième.
On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X]\ ,\ \phi(P) = \left(X^2-1\right)\ P'' + 2XP'\,.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n\, n!}\, U_n^{(n)}$. Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre.*
Pour n entier naturel, a_n désigne le coefficient dominant de L_n.

Partie I - Quelques résultats généraux

Q1. Déterminer L_0, L_1 et vérifier que $L_2 = \dfrac{1}{2}\left(3X^2-1\right)$.

Dans la suite de cette partie, n désigne un entier naturel.

Q2. Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n.

Q3. Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de U_n, en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in \left]-1,1\right[$ et un réel λ, que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :

$$U_n' = \lambda\ (X-1)^{n-1}\ (X+1)^{n-1}\ (X-\alpha)\ .$$

On pourra utiliser le théorème de Rolle.

Q5. Dans cette question seulement, $n \geq 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe des réels α_1, ..., α_k deux à deux distincts dans $\left]-1,1\right[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_k).$$

Justifier qu'il existe des réels β_1, ..., β_{k+1} deux à deux distincts dans $\left]-1,1\right[$ et un réel ν tels que :

$$U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\dots(X-\beta_{k+1}).$$

Q6. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $[-1,1]$.
On les note x_1, ..., x_n, en convenant que $x_1 < \ldots < x_n$.

$$\text{On note } A_n = \prod_{k=1}^{n} (X - x_k).$$

En convenant que $A_0 = 1$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ L_n = a_n\, A_n$.

Partie II - Étude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ

Q7. Prouver que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Dans les questions **Q8** à **Q13**, n désigne un entier naturel.

Q8. Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ.

On note ϕ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par ϕ.
Cet endomorphisme ϕ_n est donc défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi_n(P) = \phi(P)$.

Q9. On note $M = (m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
Montrer que M est triangulaire supérieure et que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $m_{k,k} = k(k+1)$.

Q10. Montrer que ϕ_n est diagonalisable. *On pourra utiliser la question **Q9**.*

Q11. Vérifier que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $(X^2 - 1)\, U_k' - 2kXU_k = 0$.

Q12. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. En dérivant $(k+1)$ fois la relation de la question **Q11**, montrer grâce à la formule de dérivation de Leibniz que : $(X^2 - 1)\, U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)\, U_k^{(k)} = 0$.

Q13. Montrer que, pour $k \in [\![0, n]\!]$ le polynôme L_k est un vecteur propre de ϕ_n, en précisant la valeur propre associée.
*On pourra utiliser la question **Q12**.*

Q14. Déduire de ce qui précède les valeurs propres et les sous-espaces propres associés à ϕ.

Dans la suite du problème, pour P et Q de $\mathbb{R}[X]$, on définit :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

Partie III - Distance au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

Q15. Justifier que $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On note $\|.\|$ la norme associée, qui est donc définie par : $\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} f(t)^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}$.

Q16. Établir que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\langle \phi(P), Q \rangle = -\int_{-1}^{1} \left(t^2 - 1\right) P'(t)\, Q'(t)\, \mathrm{d}t$, puis que :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \text{ , } \langle \phi(P), Q \rangle = \langle P, \phi(Q) \rangle \text{ .}$$

Q17. Montrer que la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle ., . \rangle$.
*On pourra utiliser la question **Q13**.*

Q18. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\langle P, L_n \rangle = 0$.

Q19. On admet que $\|L_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\, L_n$.
Que peut-on dire de la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire $\langle ., . \rangle$?

Dans la suite de cette partie, P désigne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{d}(P, \mathbb{R}_n[X]) = \inf\limits_{Q\in\mathbb{R}_n[X]} \|P - Q\|$ la distance de P au sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$.

Q20. Soit $n \in \mathbb{N}$.
En utilisant un résultat de votre cours, justifier qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\mathrm{d}(P, \mathbb{R}_n[X]) = \|P - T_n\|$, puis justifier l'égalité :

$$\mathrm{d}(P, \mathbb{R}_n[X])^2 = \|P\|^2 - \sum_{k=0}^{n} (c_k(P))^2 \ \text{, où } c_k(P) = \langle P, Q_k \rangle \ .$$

Q21. Prouver que la série $\sum (c_k(P))^2$ converge et que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (c_k(P))^2 \leq \|P\|^2$.

Rapport de Jury

Problèmes constatés par les correcteurs :

L'épreuve proposée a permis de classer correctement les candidats de niveau moyen à fort, mais a sans doute pénalisé les candidats les plus faibles par le niveau de technicité exigé et l'absence de questions très faciles.
Les correcteurs ont cependant constaté des lacunes importantes chez de nombreux candidats. Il faut insister sur le fait que les définitions doivent être connues avec précision et que les théorèmes utilisés comportent des hypothèses qu'il convient de rappeler et de vérifier. Les raisonnements doivent être plus précis et plus rigoureux.
Notons quelques remarques signalées par les correcteurs sur des points précis des programmes :

- en algèbre, la notion d'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynome n'est pas maitrisée. $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace des polynomes de degré inférieur ou égal à n, à coefficients réels. Un polynome de $\mathbb{R}_n[X]$ n'est donc pas, en général, de degré n. La définition d'un produit scalaire est trop souvent mal connue et on ne trouve dans les copies que très rarement une preuve correcte du caractère défini.
- en analyse, les manipulations de valeurs absolues (ou de modules) ainsi que celles des inégalités ne sont très souvent pas maitrisées. Une connaissance des formules élémentaires de trigonométrie est attendue. La règle de d'Alembert n'est pas la seule manière de déterminer un rayon de convergence.
- de manière générale, la rédaction d'un raisonnement par récurrence pose des problèmes à de trop nombreux candidats.

Remarques spécifiques :

Partie I (Quelques résultats généraux) :

Q1. Question bien traitée.

Q2. Cette question, apparemment facile, a posé des problèmes à de nombreux candidats.

Q3. La notion de famille échelonnée en degré est maitrisée par la majorité des candidats. Une famille de $(n+1)$ polynomes de $\mathbb{R}_n[X]$ n'est cependant pas nécessairement génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q4. Un certain nombre de candidats a résolu la question par un calcul direct. Pour les autres, l'énoncé du théorème de Rolle est souvent mal connu.

Q5. Question plus délicate, mal traitée par une majorité de candidats.

Q6. Très rares sont les candidats qui comprennent qu'un raisonnement par récurrence a été mis en place en Q4 et Q5.

Partie II (Étude des éléments propres d'un endomorphisme) :

Q7. Un certain nombre de candidats confond $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$. Par ailleurs, la définition d'un endomorphisme n'est pas toujours connue.

Q8. Un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ n'est pas nécessairement de degré n.

Q9. Question bien traitée par une majorité de candidats.

Q10. Le fait que les valeurs propres sont deux à deux distinctes est rarement justifié.

Q11. Question bien traitée en général.

Q12. La principale erreur est l'absence des coefficients binomiaux dans la formule de Leibniz.

Q13. Question très souvent traitée, mais le fait que L_k est non nul est rarement mentionné.

Q14. Cette question n'a pas été comprise. Certains candidats donnent le résultat attendu, mais la justification est presque toujours absente.

Partie III (Distance à $\mathbb{R}_n[X]$) :

Q15. Question très mal traitée. Le cours est mal connu (définition d'un produit scalaire et preuve du caractère défini).

Q16. Question bien traitée en général.

Q17. Q18. Q19. Questions souvent correctement traitées.

Q20. Le fait que $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie n'est quasiment jamais mentionné, preuve que le cours est connu de manière trop superficielle.

Q21. Question peu abordée.

Parties IV, V et VI : non données