Devoir non surveillé 16 - Correction

Exercice
E3A PSI maths 1 2017

Remarque

Deux difficultés dans ce sujet :
• Y est une somme de variables aléatoires dont le nombre de terme est lui aussi une variable aléatoire T. Pour lever ce problème, on appliquera la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(T=j)_{j=0,\dots,k}$.
• Certaines variables aléatoires sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$ qui est dénombrable. Donc, on peut écrire :

$$\mathbb{Z}=\{x_n,\ n\in\mathbb{N}\}.$$

Ainsi, on notera par exemple pour $X=X_1$:

$$\mathbb{P}(\Omega)=1=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(X=x_n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{P}(X=n)\quad\text{et}\quad\mathbb{E}(X)=\sum_{n\in\mathbb{N}}x_n\mathbb{P}(X=x_n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}n\mathbb{P}(X=n)$$

si l'on suppose que X est d'espérance finie pour la seconde somme. Les deux séries étant absolumente convergentes, leurs sommes respectives ne dépendent pas de l'ordre de sommation (familles sommables).

À partir d'un corrigé de F. Calio

1. De manière évidente, $Y(\Omega)\subset\mathbb{Z}$ et comme $(T=j)_{j\in[\![0,k]\!]}$ constitue un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\forall n\in\mathbb{Z},\quad \mathbb{P}(Y=n)=\sum_{j=0}^{k}\mathbb{P}(Y=n,T=j)=\sum_{j=0}^{k}\mathbb{P}(T=j,X_0+\cdots+X_j=n).$$

Or les T et les X_i sont mutuellement indépendantes donc par le lemme des coalitions T et $X_0+\cdots+X_j$ sont indépendantes. Ainsi $\forall n\in\mathbb{Z},\quad n\mathbb{P}(Y=n)=\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\mathbb{P}(T=j)n\mathbb{P}\left(X_0+\cdots+X_j=n\right)$.

Or X_0, X_1, …, X_k admettent une espérance finie donc c'est aussi le cas pour X_0, X_0+X_1, …$X_0+X_1+\cdots+X_k$. Et par la formule du transfert (réciproque),

$$\forall j\in\{0,\dots,k\},\quad \sum_{n\in\mathbb{Z}}n\mathbb{P}\left(X_0+\cdots+X_j=n\right)\ \text{converge absolument.}$$

Et puisque que la combinaison linéaire (finie bien-sûr !) de série absolument convergentes est convergente, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}n\mathbb{P}(Y=n)$ converge aussi absolument. Ainsi, $\boxed{Y\text{ possède une espérance finie}}$

Remarque : ici $X_i(\Omega)=Y(\Omega)=\mathbb{Z}$ est dénombrable, donc, d'après la remarque, les sommes précédentes ont bien un sens (puisque les séries convergent absolument).

2. Par définition et par la formule du transfert, on a :

$$\mathbb{E}(Y)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\mathbb{P}(Y=n)=\sum_{j=0}^{k}\mathbb{P}(T=j)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\mathbb{P}\left(X_0+\cdots+X_j=n\right)\right)=\sum_{j=0}^{k}\mathbb{P}(T=j)\mathbb{E}\left(X_0+\cdots+X_j\right).$$

Or par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}\left(X_0+\cdots+X_j\right)=\mathbb{E}\left(X_0\right)+\cdots+\mathbb{E}\left(X_j\right)=(j+1)\mathbb{E}\left(X_0\right)$ car les X_j ont la même espérance. Ainsi :

$$\mathbb{E}(Y)=\sum_{j=0}^{k}(j+1)\mathbb{P}(T=j)\mathbb{E}\left(X_0\right)=\sum_{j=0}^{k} j\mathbb{P}(T=j)\mathbb{E}\left(X_0\right)+\sum_{j=0}^{k}\mathbb{P}(T=j)\mathbb{E}\left(X_0\right)=\mathbb{E}\left(X_0\right)\mathbb{E}(T)+\mathbb{E}\left(X_0\right).$$

Donc $\boxed{\mathbb{E}(Y)=(\mathbb{E}(T)+1)\,\mathbb{E}\left(X_0\right)}$.

3. On suppose que $\mathbb{E}\left(X_0\right)=0$ et que X_0^2 possède une espérance. On en déduit donc que $\boxed{E(Y) \text{ est nulle.}}$

Remarque

Pour justifier l'existence d'un moment d'ordre 2 pour Y on aurait pu utiliser le résultat suivant :

> Soient X, Y des variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
> Si $|X| \leq Y$ et si Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.

Ce résultat était admis sous le nom de propriété $\mathcal{P}$ dans le sujet 4B de Centrale...

On a $Y^2 \leq \left(\sum_{i=0}^{k}\left|X_i\right|\right)^2=\sum_{i=0}^{k} X_i^2+2\sum_{i<j}\left|X_i\right|\left|X_j\right| \leq \sum_{i=0}^{k} X_i^2+\sum_{i<j}\left(X_i^2+X_j^2\right) \leq (k+1)\sum_{i=0}^{k} X_i^2.$

Or on sait que les X_i^2 sont d'espérance finie, donc la somme $\sum_{i=0}^{k} X_i^2$ l'est aussi et par la propriété admise, Y^2 a une espérance finie.

Pour rester dans les limites du programmed de PSI, on reprend le raisonnement précédent.

La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2\mathbb{P}(Y=n)$ est combinaison linéaire des séries

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2\mathbb{P}(X_0=n),\ldots,\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2\mathbb{P}(X_0+X_1+\cdots+X_k=n)$$

qui sont absolument convergentes (formule du transfert) puisque les X_i admettent une variance (donc leurs sommes finies aussi).

Par indépendance linéaire et linéarité de l'espérance, on a :

$\mathbb{E}\left(\left(X_0+\cdots+X_k\right)^2\right)=\sum_{i=0}^{j}\mathbb{E}\left(X_i^2\right)+\sum_{0\leq i<k\leq j}\mathbb{E}\left(X_i\right)\mathbb{E}\left(X_k\right)=(j+1)\mathbb{E}\left(X_0^2\right)$ car les espérances des X_i sont nulles.

Ainsi par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}\left(Y^2\right)=\sum_{j=0}^{k}\mathbb{P}(T=j)\mathbb{E}\left(\left(X_0+\cdots+X_j\right)^2\right)=\sum_{j=0}^{k}(j+1)\mathbb{P}(T=j)\mathbb{E}\left(X_0\right)^2$

Ainsi $\mathbb{E}\left(Y^2\right)=\sum_{j=0}^{k} j\mathbb{P}(T=j)\mathbb{E}\left(X_0\right)^2+\sum_{j=0}^{k}\mathbb{P}(T=j)\mathbb{E}\left(X_0\right)^2=\mathbb{E}\left(X_0\right)^2\mathbb{E}(T)+\mathbb{E}\left(X_0\right)^2.$

Or d'après la formule de Koenig-Huygens, $\mathbb{V}(Y)=\mathbb{E}\left(Y^2\right)-\mathbb{E}(Y)^2$, donc comme $\mathbb{E}(X_0)=\mathbb{E}(Y)=0$, on obtient alors : $\boxed{\mathbb{V}(Y)=(\mathbb{E}(T)+1)\,\mathbb{V}\left(X_0\right)}$.

Problème
BECEAS L2 2017 Maths 1

à partir d'un Corrigé de L. Girard

Partie I

1. (a) On rappelle que ln est l'unique primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1. Avec
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln(n)] = \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t}$
et la décroissance de la fonction continue $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \geqslant \frac{1}{n+1}$, donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, c'est-à-dire que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$
On aurait pu écrire aussi $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln(n+1-1)] = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) \leq 0$ car $\ln(1+u) \leq u$.

(b) De même, avec $\dfrac{1}{k} \geqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ pour tout $k \geqslant 1$, on obtient

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1),$$

d'où $u_n \geqslant \ln(n+1) - \ln(n) > 0$, ce qui signifie que la suite (u_n) est minorée par 0 et donc, par théorème, qu'elle est convergente. En notant γ sa limite, on peut écrire

$$\boxed{H_n = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)}\ .$$

(c) c.f. cours.

2. **Grand classique !** D'une part, $\lim\limits_{+\infty} f = 0$, donc il existe un $A \geqslant 0$ tel que

$$x \geqslant A \Longrightarrow |f(x)| \leqslant 1.$$

Comme f est continue sur le segment $[0, A]$, elle est bornée sur ce segment, c'est-à-dire qu'il existe un $M \geqslant 0$ tel que $|f(x)| \leqslant M$ pour tout x dans $[0, A]$ et finalement $|f(x)| \leqslant \max\{1, M\}$ pour tout x dans $\mathbb{R}_+$:

$$\boxed{[f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*) \text{ et } \lim_{+\infty} f = 0] \Longrightarrow [f \text{ bornée sur } \mathbb{R}_+]}\ .$$

3. Le début est un $(E3)$ de colle.

(a) Pour tout k dans $\mathbb{N}$, on a $1 = (k+1) - k$ et la réunion disjointe d'événements

$$(X > k-1) = (X = k) \cup (X > k),$$

donc, $\mathbb{P}(X > k-1) = \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(X > k)$ ou encore $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)$. Ainsi, pour tout $N \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} k\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=0 \text{ ou } 1}^{N} k\Big(\mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \Big((k-1)\mathbb{P}(X > k-1) - k\mathbb{P}(X > k)\Big) + \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(X > k-1)
\end{aligned}$$

La première somme est télescopique

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} k\mathbb{P}(X=k) &= -N\mathbb{P}(X>N)+\sum_{k=1}^{N}\mathbb{P}(X>k-1)\\
&= -(N+1)\mathbb{P}(X>N)+\mathbb{P}(X>N)+\sum_{k=1}^{N}\mathbb{P}(X>k-1)\\
&= -(N+1)\mathbb{P}(X>N)+\sum_{k=0}^{N}\mathbb{P}(X>k)
\end{aligned}$$

Et finalement, on a bien démontré : $\boxed{\sum_{k=0}^{N}\mathbb{P}(X>k)=\sum_{k=1}^{N}k\,\mathbb{P}(X=k)+(N+1)\,\mathbb{P}(X>N)]}$.

(b) i. Puisque X est d'espérance finie, a série à termes positifs $\sum n\,P(X=n)$ est convergente (de somme $E(X)$), et donc la suite de ses restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de limite nulle. Avec

$$R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}k\,P(X=k)\geqslant(n+1)\sum_{k=n+1}^{+\infty}P(X=k)=(n+1)\,P(X>n)$$

Par encadrement, on obtient $\boxed{\lim_{N\to\infty}(N+1)\,P(X>N)=0.}$

ii. Avec l'égalité obtenue en (a) on obtient la convergence de la suite des sommes partielles de la série $\sum P(X>n)$ et l'égalité $\boxed{E(X)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X>n)}$.

(c) Si la série $\sum P(X>n)$ est convergente, alors 'égalité obtenue en (a) donne aussi

$$\sum_{k=1}^{N}k\,P(X=k)\leqslant\sum_{k=0}^{N}P(X>k)\leqslant\sum_{k=0}^{+\infty}P(X>k)=M.$$

Donc la suite des sommes partielles de la série $\sum n\,P(X=n)$ est aussi majorée, et comme elle est croissante (le terme général est positif), elle converge. Ainsi la série $\sum n\,P(X=n)$ converge, c'est-à-dire que X admet une espérance (finie). On peut alors utiliser ce qui précède pour avoir l'égalité demandée et finalement

$$\boxed{\Big(X \text{ est d'espérance finie}\Big)\,;\Longleftrightarrow;\Big(\sum P(X>n)\text{ converge}\Big)\ .}$$

Et, en cas de convergence : $E(X)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X>n)$

(d) i. Pour tout t dans $\mathbb{R}_-^*=]-\infty,0[$, $P(X>t)=1$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout t dans $[n,n+1[$, $P(X>t)=P(X\geqslant n+1)=P(X>n)$. Ainsi les seuls points de discontinuité de $t\longmapsto P(X>t)$ sont les entiers de $\mathbb{N}$ avec une limite finie à gauche, égale à $P(X>n-1)=P(X\geqslant n)$ et une limite finie à droite, égale à $P(X>n)$.

Tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ contient un nombre fini d'entiers naturels, donc la fonction considérée admet un nombre fini de points de discontinuité et en chacun de ces points, elle admet une limite finie à droite et/ou à gauche : elle est continue par morceaux sur ce segment (de fait, elle est en escalier), et donc, par définition d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque,

$$\boxed{\text{la fonction } t \longmapsto P(X>t) \text{ est continue par morceaux sur } \mathbb{R}}\ .$$

(elle est même continue à droite en tout point).

ii. En notant $f(t) = P(X > t)$ pour tout t dans $\mathbb{R}_+$, la fonction f est continue par morceaux, positive et décroissante, donc par théorème de comparaison des séries et des intégrales, la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_{[0,+\infty[} f(t)dt$ sont de même nature. Alors, avec l'équivalence obtenue en (c) on obtient

$$\boxed{\Big(X \text{ est d'espérance finie }\Big) ; \Longleftrightarrow ; \Big(\int_0^{+\infty} P(X>t)\,dt \text{ converge}\Big).}$$

En cas de convergence, avec $\displaystyle\int_k^{k+1} P(X>t)\,dt = [(k+1)-k]\,P(X>k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^n P(X>t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} P(X>t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k),$$

donc, avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(X>t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^n P(X>t)\,dt$ et $\displaystyle E(X) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} P(X>k)$, on obtient

$$\boxed{\text{si } X \text{ est d'espérance finie , alors } E(X) = \int_0^{+\infty} P(X>t)\,dt}\ .$$

(e) Ce qui précède donne pour la variable aléatoire X^2 :

$$\Big(X^2 \text{ est d'espérance finie }\Big) ; \Longleftrightarrow ; \Big(\int_0^{+\infty} P(X^2>t)\,dt \text{ converge}\Big).$$

Avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(X^2>t)\,dt = \int_0^{+\infty} P(X>\sqrt{t})\,dt$ et le changement de variable $u=\sqrt{t}$, c'est-à-dire $t = u^2 = \varphi(u)$ donc $dt = 2\,u\,du$ (φ bijectif, croissant et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$ sur lui-même), en cas de convergence on obtient (les deux intégrales étant de même nature)

$$\int_0^{+\infty} P(X>\sqrt{t})\,dt = \int_0^{+\infty} 2\,u\,P(X>u)\,du.$$

Finalement, $\boxed{\Big(X^2 \text{ est d'espérance finie }\Big) ; \Longleftrightarrow ; \int_0^{+\infty} t\,P(X>t)\,dt \text{ converge}}$

et, en cas de convergence, $\boxed{E(X^2) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,P(X>t)\,dt}$.

4. c.f. Cours

5. (a) Avec $0 < q = 1-p < 1$, on a, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$P(X>n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} p\,q^{k-1} = p\,q^n\sum_{i=0}^{\infty} q^i = p\,\frac{q^n}{1-q},$$

c'est-à-dire $P(X>n) = q^n$. En particulier $P(X>1) = q$.

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, on a $P_{X>1}(X-1=k) = \dfrac{P([X=k+1]\cap[X>1])}{P(X>1)}$.

Avec $[X=1]\cap[X>1] = \emptyset$ et $[X=k+1]\subset[X>1]$ pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, on obtient $P_{X>1}(X-1=0) = 0$ et pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $P_{X>1}(X-1=k) = \dfrac{P(X=k+1)}{P(X>1)} = \dfrac{p\,q^k}{q} = p\,q^{k-1}$,

c'est-à-dire que $X-1$ suit la loi géométrique de paramètre p : $\boxed{(X-1)_{X>1} \sim \mathcal{G}(p)}$.

(b) Les variables X_i étant indépendantes on a $P(A) = \prod_{i=1}^{r} P(X_i > 1)$.
Comme les variables $(X_i - 1)$ sont aussi indépendantes, on obtient, pour tout $(k_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ de $\mathbb{N}^r$, $P_A(X_1 - 1 = k_1, \cdots, X_r - 1 = k_r) = \dfrac{1}{P(A)} \displaystyle\prod_{i=1}^{r} P([X_i - 1 = k_i] \cap A)$.
Si l'un des k_i au moins est nul on a $P_A(X_1 - 1 = k_1, \cdots, X_r - 1 = k_r) = 0$ et sinon
$P_A(X_1 - 1 = k_1, \cdots, X_r - 1 = k_r) = \dfrac{1}{P(A)} \displaystyle\prod_{i=1}^{r} P([X_i - 1 = k_i] \cap [X_i > 1]) = \prod_{i=1}^{r} \dfrac{P([X_i - 1 = k_i] \cap [X_i > 1])}{P(X_i > 1)}$,
c'est-à-dire avec le résultat de a), $P_A(X_1 - 1 = k_1, \cdots, X_r - 1 = k_r) = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} P(X_i = k_i)$ et finalement
$\boxed{\forall (k_i)_{1\leqslant i\leqslant r} \in \mathbb{N}^r,\ P_A(X_1 - 1 = k_1, \cdots, X_r - 1 = k_r) = P(X_1 = k_1, \cdots, X_r = k_r)}$.

6. (a) Comme produit de deux variables aléatoires discrètes, $X \times \mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire discrète.
Avec $\mathbb{1}_A(\omega) \in \{0, 1\}$ pour tout ω dans Ω on a $|X \times \mathbb{1}_A| \leqslant |X|$ donc si X a une espérance (finie), alors $X \times \mathbb{1}_A$ a aussi une espérance (finie).
Si on note $Y = X \times \mathbb{1}_A$, on a
$[Y = 0] = [X = 0] \cup A^c$ et, pour tout $x \in X(\Omega)\backslash\{0\}$, $[Y = x] = [X = x] \cap A$.
Ainsi, on a
$E(Y) = \displaystyle\sum_{x\in Y(\Omega)} x\, P(Y = x) = \sum_{x\in Y(\Omega)\backslash\{0\}} x\, P(Y = x)$
$E(Y) = \displaystyle\sum_{x\in Y(\Omega)\backslash\{0\}} x\, P([X = x] \cap A) = \sum_{x\in Y(\Omega)\backslash\{0\}} x\, P_A(X = x) \times P(A)$
$E(Y) = P(A) \times \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} x\, P_A(X = x)$ (avec $Y(\Omega) \subset X(\Omega) \cup \{0\}$)

$$\boxed{E(X\, \mathbb{1}_A) = P(A)\, E_A(X)}.$$

(b) Avec $\mathbb{1}_\Omega = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}$, on a $X = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X \cdot \mathbb{1}_{A_k}$ et la linéarité de l'espérance donne avec le résultat précédent

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=1}^{n} E_{A_k}(X)\, P(A_k)}$$

7. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, la fonction I_n est définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $[X_i \geqslant k]$ est un événement (dans $\mathcal{A}$) pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, donc, l'image réciproque $[I_n \geqslant k] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \geqslant k]$ est un événement comme intersection finie d'événements, donc, pour tout $k \geqslant 1$, $[I_n = k] = [I_n \geqslant k]\backslash[I_n \geqslant k + 1]$ est aussi un événement : I_n est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et il en est de même pour M_n.

Partie II.

1. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors *(comme plus ou moins déjà vu en I.5.a)*, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ on a,
$P(X \geqslant k) = \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} P(X = n) = \sum_{n=k}^{\infty} p\, q^{n-1} = p\, q^{k-1} \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \dfrac{p\, q^{k-1}}{1 - q} = q^{k-1}$:
si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X \geqslant k) = q^{k-1}$.
Ainsi, avec l'indépendance des variables X_1, X_2, ... , X_n et le résultat donné en I.7, on a
$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(I_n = k) = (q^{k-1})^n - (q^k)^n = q^{(k-1)\,n}\,[1 - q^n] = (1 - q^n)\,(q^n)^{k-1}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{I_n \sim \mathcal{G}(1 - q^n).}$$

2. Avec le cours, on a $E(I_n) = \dfrac{1}{1 - q^n}$ et $V(I_n) = \dfrac{q^n}{(1 - q^n)^2}$, donc, avec $q^n \in]0, 1[$, on obtient

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} E(I_n) = 1,\ \lim_{n\to\infty} V(I_n) = 0.}$$

De plus, toujours avec $q^n \in]0,1[$ et le résultat de a), on a (avec $P(I_n = 1) = 1 - q^n$)

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P(I_n = 1) = 1 \text{ et } \forall k \geqslant 2,\ \lim_{n\to\infty} P(I_n = k) = 0.}$$

3. (a) La suite $\big(I_n(\omega)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante (c'est le minimum d'une suite croissante d'ensembles finis) et minorée par 1, elle est donc convergente.
   (b) Comme la suite $\big(I_n(\omega)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'entiers naturels non nuls, elle est de limite égale à 1 si et seulement il existe un n_0 dans $\mathbb{N}^*$ tel que $I_{n_0}(\omega) = 1$ (et alors $I_n(\omega) = 1$ pour tout $n \geqslant n_0$), c'est-à-dire que l'on a $\mathcal{L} = \bigcup_{n=1}^{\infty}[I_n = 1]$, ce qui établit le fait que $\mathcal{L}$ est un événement.
   De plus, la suite d'événements $([I_n = 1])_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant croissante pour l'inclusion, la propriété de continuité croissante donne $P(\mathcal{L}) = \lim_{n\to\infty} P(I_n = 1) = 1$:

$$\boxed{\mathcal{L} \text{ est un événement presque sûr}}\ .$$

Partie III.

1. (a) i. Si on note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, S_n a une espérance et $E(S_n) = n\,E(X_1) = \dfrac{n}{p}$.
   Avec $X_1 \leqslant M_n \leqslant S_n$ on en déduit que $\boxed{E(M_n) \text{ a une espérance et } \dfrac{1}{p} \leqslant E(M_n) \leqslant \dfrac{n}{p}.}$
   ii. Avec $(M_n \leqslant k) = \bigcap_{i=1}^{n}(X_i \leqslant k)$, l'indépendance des X_i et
   $$P(X_1 \leqslant k) = 1 - P(X_1 \geqslant k+1) = 1 - q^k,$$
   on obtient : $\boxed{P([M_n \leqslant k]) = (1-q^k)^n}$.
   (b) i. Pour $K \in \mathbb{N}^*$, avec le système complet d'événements $\big([M_n \leqslant K], [M_n > k]\big)$ (ces deux événements sont de probabilités non nulles) et la formule de l'espérance totale (comme dans I.6) on obtient
   $$E(M_n) = E(M_n\,\mathbb{1}_{[M_n\leqslant K]}) + E(M_n\,\mathbb{1}_{[M_n>K]}).$$
   Avec $M_n(\omega) > K$ pour tout ω dans l'événement $[M_n > K]$, on obtient
   $$E(M_n\,\mathbb{1}_{[M_n>K]}) > K\,P([M_n > K]) \text{ (I.6.a)}$$
   et finalement $\boxed{\forall K \in \mathbb{N}^*,\ E(M_n) > E(M_n\,\mathbb{1}_{[M_n\leqslant K]}) + K\,P([M_n > K])}$.
   ii. Avec $P([M_n > K]) = 1 - P([M_n \leqslant K]) = 1 - (1-q^K)^n$, et $q^K \in]0,1[$, on a
   $$\lim_{n\to+\infty} P([M_n > K]) = 1 \text{ pour tout } K \text{ dans } \mathbb{N}^*.$$
   Pour $A > 0$, en prenant $K = \lfloor 2\,A \rfloor + 1$ et N tel que $P([M_n > K]) \geqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \geqslant N$, on a $E(M_n) > K\,P([M_n > k]) > 2\,A \times \dfrac{1}{2} \geqslant A$.
   On a montré : $\boxed{\lim_{n\to\infty} E(M_n) = +\infty}$.
2. (a) Avec, pour tout k dans $\mathbb{N}$ et tout n dans $\mathbb{N}^*$,
   $$1 - (1-q^k)^n = 1 - \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i\,(q^k)^i = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\binom{n}{i}(q^i)^k,$$
   la formule obtenue en I.3.b.ii donne (toutes les séries géométriques intervenant étant convergentes, car de raison $q^i \in [0,1[$ pour $i \geqslant 1$)
   $$E(M_n) = \sum_{k=0}^{\infty} P([M_n > k]) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\binom{n}{i}(q^i)^k\right)$$
   $$E(M_n) = \sum_{i=1}^{n}\left((-1)^{i-1}\binom{n}{i}\sum_{k=0}^{\infty}(q^i)^k\right)$$

$$\boxed{E(M_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} \frac{1}{1-q^i}}\ .$$

(b) Pour tout k dans $\mathbb{N}$ et tout t dans $[k, k+1[$ on a

$$\lfloor t \rfloor = k \text{ et } P(X > t) = P(X > k) = 1 - (1-q^k)^n = 1 - (1-q^{\lfloor t \rfloor})^n.$$

L'application $[t \mapsto P(X > t)]$ est donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et la formule obtenue en I.3.d.ii donne $\boxed{E(M_n) = \int_0^{+\infty} \left(1 - (1-q^{\lfloor t \rfloor})^n\right) dt}$.

3. (a) Avec $q^t = \exp[t \ln(q)]$, en notant pour q dans $]0,1[$ et k dans $\mathbb{N}$, $f(t) = q^t\,(1-q^t)^k$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, avec $f(0) = \delta_{k,0}$.

Avec $\lim\limits_{t\to+\infty} q^t = 0$ on a $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} q^t$ et avec $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\, q^t = 0$, on a $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\frac{1}{t^2})$, donc par comparaison aux intégrales de Riemann $(2 > 1)$, la fonction f est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc aussi sur $[0, +\infty[$: l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} q^t\,(1-q^t)^k\, dt$ est convergente.

L'application $[t \mapsto q^t]$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissante et bijective de $]0, +\infty[$ sur $]0,1[$ (avec $\ln q < 0$), donc, en posant $u = q^t = \exp(t \ln q)$ on a $du = \ln(q)\, q^t\, dt$ et

$$\int_0^{+\infty} q^t\,(1-q^t)^k\, dt = -\frac{1}{\ln q}\int_0^1 (1-u)^k\, du = -\frac{1}{\ln q}\left[\frac{-(1-u)^{k+1}}{k+1}\right]_0^1$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} q^t\,(1-q^t)^k\, dt = -\frac{1}{(k+1)\,\ln q}}\ .$$

(b) Avec $q^t \in]0,1[$ pour tout $t > 0$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (1-q^t)^k = \frac{1-(1-q^t)^n}{1-(1-q^t)}$, c'est-à-dire

$$1 - (1-q^t)^n = q^t \sum_{k=0}^{n-1} (1-q^t)^k = \sum_{k=0}^{n-1} q^t\,(1-q^t)^k\ .$$

Ainsi, avec le résultat qui précède et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}$, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{+\infty} \left(1-(1-q^t)^n\right) dt = -\frac{H_n}{\ln q}}\ .$$

(c) i. Avec $t \geqslant \lfloor t \rfloor$ et $\ln(q) < 0$ on a $q^{\lfloor t \rfloor} \geqslant q^t$ donc $1 - (1-q^{\lfloor t \rfloor})^n \geqslant 1 - (1-q^t)^n$ et, avec l'expression obtenue en 2.b et le résultat précédent, on obtient $E(M_n) \geqslant -\dfrac{H_n}{\ln q}$.

Avec

$$E(M_n) = \int_0^1 \left(1-(1-q^{\lfloor t \rfloor})^n\right) dt + \int_1^{+\infty} \left(1-(1-q^{\lfloor t \rfloor})^n\right) dt,$$

$$E(M_n) = 1 + \int_0^{+\infty} \left(1-(1-q^{\lfloor t+1 \rfloor})^n\right) dt$$

donc, avec $\lfloor t+1 \rfloor \geqslant t$ (comme ci-dessus mais dans l'autre sens),

$$E(M_n) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} \left(1-(1-q^t)^n\right) dt$$

et finalement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\dfrac{H_n}{\ln q} \leqslant E(M_n) \leqslant 1 - \dfrac{H_n}{\ln q}}$.

Avec $H_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n) = +\infty$, on obtient $\boxed{E(M_n) \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(n)}{\ln(q)}}$.

ii. *(on peut se demander quelle cohérence mathématique il y a à déduire un résultat, accessible directement par l'étude de niveau élémentaire des deux différences, du résultat précédent obtenu lui après de longues chicanes ... il est peut-être sain de ne pas répondre à cette question ; voir ci-dessous IV.1)*

4. (a) i. En notant cette fois, pour q dans $]0,1[$ et k dans $\mathbb{N}$, $f(t) = t\,q^t\,(1-q^t)^k$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et avec $\lim\limits_{t\to+\infty} t^3\,q^t = 0$, on a $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\dfrac{1}{t^2})$, donc la fonction f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

ii. Si on note $g(t) = \dfrac{1-(1-q^t)^{k+1}}{(k+1)\,\ln(q)}$ pour tout t dans $\mathbb{R}_+$, on a $g'(t) = (1-q^t)^k$, donc,

avec $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = 1$, donc $\lim\limits_{t\to 0} t\,g(t) = 0$ et

$\lim\limits_{t\to+\infty} q^t = 0$, donc $(1-q^t)^{k+1} = 1-(k+1)\,q^t + \mathrm{o}(q^t)$, donc $g(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{q^t}{\ln q}$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} t\,g(t) = 0$,

une intégration par parties donne

$$\alpha_k = \int_0^{+\infty} t\,q^t\,(1-q^t)\,dt = \left[\frac{1-(1-q^t)^k}{(k+1)\,\ln(q)}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{(k+1)\,\ln(q)}\int_0^{+\infty}\left(1-(1-q^t)^k\right)\,dt :$$

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\ \alpha_k = -\frac{1}{(k+1)\,\ln q}\int_0^{+\infty}\left(1-(1-q^t)^{k+1}\right)dt}\,.$$

(b) • Alors, avec la méthode et le résultat vus dans 3.b), on a

$$\int_0^{+\infty} t\left(1-(1-q^t)^n\right)dt = \int_0^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} t\,q^t\,(1-q^t)^k\right)dt = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k$$

$$\int_0^{+\infty} t\left(1-(1-q^t)^n\right)dt = -\frac{1}{\ln q}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}\int_0^{+\infty}\left(1-(1-q^t)^{k+1}\right)dt,$$

$$\int_0^{+\infty} t\left(1-(1-q^t)^n\right)dt = -\frac{1}{\ln q}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}\left(-\frac{H_{k+1}}{\ln q}\right)$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \int_0^{+\infty} t\left(1-(1-q^t)^n\right)dt = \frac{1}{\ln^2 q}\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k}}\,.$$

• Avec $M_n \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ la variable M_n admet un moment d'ordre 2 et, avec I.2.e on a

$$E(M_n^2) = 2\int_0^{+\infty} t\left(1-(1-q^{\lfloor t\rfloor})^n\right)dt \geqslant 2\int_0^{+\infty} t\left(1-(1-q^t)^n\right)dt.$$

Alors, le résultat précédent donne $E(M_n^2) \geqslant \dfrac{2}{\ln^2 q}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{H_k}{k}$.

Avec

$$\frac{1}{2}\,E(M_n^2) = \int_0^{1} t\left(1-(1-q^{\lfloor t\rfloor})^n\right)dt + \int_1^{+\infty} t\left(1-(1-q^{\lfloor t\rfloor})^n\right)dt$$

$$\frac{1}{2}\,E(M_n) = \frac{1}{2} + \int_0^{+\infty}(t+1)\left(1-(1-q^{\lfloor t+1\rfloor})^n\right)dt$$

donc, avec $\lfloor t+1\rfloor \geqslant t$ comme ci-dessus mais dans l'autre sens,

$$\frac{1}{2}\,E(M_n) \leqslant \frac{1}{2} + \int_0^{+\infty}(t+1)\left(1-(1-q^t)^n\right)dt$$

$$\frac{1}{2}\,E(M_n) \leqslant \frac{1}{2} + \int_0^{+\infty} t\left(1-(1-q^t)^n\right)dt + \int_0^{+\infty}\left(1-(1-q^t)^n\right)dt$$

$$\frac{1}{2}\,E(M_n) \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{\ln^2 q}\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k} - \frac{H_n}{\ln q}$$

et finalement

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{2}{\ln^2 q}\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k} \leqslant \mathbb{E}(M_n^2) \leqslant 1 + \frac{2}{\ln^2 q}\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k} - 2\,\frac{H_n}{\ln q}}\,.$$

(c) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on a

$$H_n^2=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{1}{i\,j}=\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}}\frac{1}{i\,j}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}=2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{i\,j}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}.$$

Or

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{i\,j}=\sum_{j=2}^{n}\left(\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{i}\right)=\sum_{j=2}^{n}\left(\frac{1}{j}\left[H_j-\frac{1}{j}\right]\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}\left[H_j-\frac{1}{j}\right]\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{H_j}{j}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}$$

et finalement $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ H_n^2=2\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}}$.

(d) Avec 4.b et $\dfrac{H_n^2}{\ln^2 q}\leqslant E(M_n)^2\leqslant 1+\dfrac{H_n^2}{\ln^2 q}-2\,\dfrac{H_n}{\ln q}$ (3.c.i), on obtient donc

$$\frac{2}{\ln^2 q}\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k}-1-\frac{H_n^2}{\ln^2 q}+2\,\frac{H_n}{\ln q}\leqslant V(M_n)=E(M_n^2)-E(M_n)^2\leqslant 1+\frac{2}{\ln^2 q}\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k}-2\,\frac{H_n}{\ln q}-\frac{H_n^2}{\ln^2 q},$$

c'est-à-dire, avec $2\sum_{k=1}^{n}\dfrac{H_k}{k}=H_n^2+\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-1+2\,\frac{H_n}{\ln q}\leqslant V(M_n)\leqslant 1+\frac{1}{\ln^2 q}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-2\,\frac{H_n}{\ln q}$$

La série de Riemann de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ étant convergente, on a $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}\underset{n\to\infty}{=}\mathrm{o}(\ln n)$, donc l'encadrement précédent dit, avec $H_n\underset{n\to\infty}{\sim}\ln n$, que le rapport $\dfrac{V(M_n)}{H_n}$ est borné, c'est-à-dire $\boxed{V(M_n)\underset{n\to\infty}{=}\mathrm{O}(\ln n)}$.

Partie IV.

1. Avec l'encadrement obtenu en c.ii on a immédiatement, pour x dans $]0,1[$,

$$x\,(1-\frac{1}{1-x})\leqslant x+\ln(1-x)\leqslant 0,\text{ c'est-à-dire }\boxed{-\frac{x^2}{1-x}\leqslant x+\ln(1-x)\leqslant 0}\ .$$

(pour obtenir l'encadrement avec des moyens élémentaires : en posant $g(x)=x+\ln(1-x)$, on a $g'(x)=1-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{-x}{1-x}\leqslant 0$ et avec $g(0)=0$, on a $g(x)\leqslant 0$ pour tout x dans $]0,1[$ et en posant $h(x)=(1-x)\,\ln(1-x)+x$, on a $h'(x)=-\ln(1-x)-1+1\geqslant 0$, donc avec $h(0)=0$, on a $h(x)\geqslant 0$ pour tout x dans $]0,1[$)

2. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et tout k dans $\mathbb{N}^*$, avec $q\in]0,1[$, on a

$$\mathrm{e}^{-n\,q^k}-(1-q^k)^n=\mathrm{e}^{-n\,q^k}-\mathrm{e}^{n\,\ln(1-q^k)}=\mathrm{e}^{-n\,q^k}\left(1-\mathrm{e}^{n\,[q^k+\ln(1-q^k)]}\right).$$

Avec la partie droite de l'encadrement précédent (pour $x=q^k\in]0,1[$) on a

$$n\,[q^k+\ln(1-q^k)]\leqslant 0,\text{ donc }1-\mathrm{e}^{n\,[q^k+\ln(1-q^k)]}\geqslant 0.$$

Avec $\mathrm{e}^u\geqslant 1+u$ pour tout u dans $\mathbb{R}$ *(étude de la différence ou convexité -MP- de l'exponentielle et tangente à la courbe $\mathcal{C}_{\exp}$ au point d'abscisse 0)* on a $1-\mathrm{e}^u\leqslant -u$ pour tout u dans $\mathbb{R}$, donc ici

$$1-\mathrm{e}^{n\,[q^k+\ln(1-q^k)]}\leqslant -n\left(q^k+\ln(1-q^k)\right)$$

et la partie gauche de l'encadrement précédent donne

$$1-\mathrm{e}^{n\,[q^k+\ln(1-q^k)]}\leqslant n\,\frac{(q^k)^2}{1-q^k}.$$

Ainsi on a : $\left|\mathrm{e}^{-n\,q^k}-(1-q^k)^n\right|\leqslant\dfrac{n\,q^{2\,k}}{1-q^k}\,\mathrm{e}^{-n\,q^k}$.

Avec $0<q^k\leqslant q$ pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{1}{1-q^k}\leqslant\dfrac{1}{1-q}$ et on obtient finalement

$$\boxed{\forall (n,k)\in\mathbb{N}^{*2},\ \left|\mathrm{e}^{-n\,q^k}-(1-q^k)^n\right|\leqslant\frac{n\,q^{2\,k}}{1-q}\,\mathrm{e}^{-n\,q^k}}\ .$$

3. En posant $f(x)=x^2\,\mathrm{e}^{-x}$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $f'(x)=x\,(2-x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
Ainsi f, qui est à valeurs positives, est croissante sur $[0,2]$ et décroissante sur $[2,+\infty[$ avec $f(0)=0$ et $\lim\limits_{+\infty} f=0$, donc f est bornée sur $\mathbb{R}_+$ par $f(2)$.
(il serait sans doute mieux vu d'utiliser I.2 et de remplacer le $4\,\mathrm{e}^{-2}$ par $M=\|f\|$...)

4. Avec le résultat obtenu en III.1.a.ii et $n\,q^{2k}\,\mathrm{e}^{-n\,q^2}=\dfrac{1}{n}\,f(n\,q^k)\leqslant\dfrac{4\,\mathrm{e}^{-2}}{n}$, on obtient
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\in\mathbb{N}^*,\ \left|\mathbb{P}([M_n\leqslant k])-\mathrm{e}^{-n\,q^k}\right|\leqslant\frac{4\,\mathrm{e}^{-2}}{1-q}\,\frac{1}{n},$$
$$\text{donc }\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sup_{k\in\mathbb{N}^*}\left|\mathbb{P}([M_n\leqslant k])-\mathrm{e}^{-n\,q^k}\right|\leqslant\frac{4\,\mathrm{e}^{-2}}{1-q}\,\frac{1}{n},$$
et donc $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\in\mathbb{N}^*}\left|\mathbb{P}([M_n\leqslant k])-\mathrm{e}^{-n\,q^k}\right|=0}$.

Partie V.

1. (a) Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

- Pour $k=n$, avec $E_{B_n}(M_n)=\sum\limits_{i=1}^{\infty} i\,P_{B_n}(M_n=i)$,
$$P_{B_n}(M_n=1)=1\text{ et pour }i\geqslant 2,\ P_{B_n}(M_n=i)=0,$$
on obtient : $E_{B_k}(M_n)=1=1+m_0=1+m_{n-k}$.
- Pour tout k dans $[\![0,n-1]\!]$, en notant $M'_n=\max(X_1-1,\cdots,X_n-1)$, on a $M'_n=M_n-1$ donc
$$E_{B_k}(M_n)=E_k(M'_n)+E_{B_k}(1)=E_{B_k}(M'_n)+1.$$
Avec l'indépendance des X_i et le fait qu'elles soient toutes de même loi géométrique, la variable aléatoire M'_n a même loi conditionnellement à B_k que $(X_{k+1}-1,\cdots,X_n-1)$, c'est-à-dire même loi que $(X_1-1,\cdots,X_{n-k}-1)$ conditionnellement à $A_k=\bigcap_{i=1}^{n-k}[X_i>1]$ et, avec I.5.b, on sait que ce vecteur a, pour la probabilité conditionnelle P_{A_k} même loi que $(X_1,\cdots,X_{n-k})$ pour la probabilité P, d'où (en prenant le maximum du vecteur aléatoire)
$$E_{B_k}(M'_n)=E(M_{n-k})=m_{n-k},$$
et finalement $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\in[\![0,n]\!],\ E_{B_k}(M_n)=1+m_{n-k}}$.

(b) On note $H_k=\Big\{\omega\in\Omega,\ \mathrm{card}\{i\in[\![1,n]\!],\ X_i(\omega)=1\}=k\Big\}$ pour k dans $[\![0,n]\!]$.
On a $H_0=B_0$, $H_n=B_n$.
Pour tout k dans $[\![1,n-1]\!]$, on note $\mathcal{P}_{n,k}$ l'ensemble des parties à k éléments dans $[\![1,n]\!]$. On sait qu'il est de cardinal $\dbinom{n}{k}$ et pour tout A dans $\mathcal{P}_{n,k}$, avec l'indépendance des X_i, toutes de même loi géométrique, en notant
$$C_A=\left(\bigcap_{i\in A}[X_i=1]\right)\bigcap\left(\bigcap_{i\notin A}[X_i>1]\right),$$
on a $E_{C_A}(M_n)=E_{B_k}(M_n)=1+m_{n-k}$.
Ainsi, avec la partition $\left(H_0\bigcup H_n\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}\left(\bigcup\limits_{A\in\mathcal{P}_{n,k}}C_A\right)\right)$ de Ω et
$$P(B_0)=P(B_n)=P(C_A)=(\frac{1}{2})^n\text{ pour tout }A\text{ dans }\mathcal{P}([\![1,n]\!]),$$
la formule de l'espérance totale (I.6.b) donne
$$m_n=E(M_n)=E_{B_0}(M_n)+E_{B_n}(M_n)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{A\in\mathcal{P}_{n,k}}E_{C_A}(M_n)\right).$$
$$m_n=\frac{1}{2^n}\left[(1+m_n)+(1+m_0)+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(1+m_{n-k})\right]$$

et finalement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ m_n = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1 + m_{n-k})}$.

2. Avec $m_n = E(M_n) \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{\ln n}{\ln q}$ on a, par croissance comparée $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{n!} x^n = 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, donc le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{n!} x^n$ est infini.

3. Avec $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, l'égalité obtenue en 1.b donne
$$m_n = 1 + \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} m_{n-k}, \text{ c'est-à-dire } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} m_{n-k} = 2^n (m_n - 1)$$
et alors le produit de Cauchy des deux séries entières $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ et $M(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{n!} x^n$ donne, avec $m_0 = 0$,
$$M(x)\,\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{m_{n-k}}{(n-k)!} \right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{m_{n-k}}{(n-k)!} \right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (m_n - 1)}{n!} x^n$$
$$M(x)\,\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{n!} (2\,x)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \right) (2\,x)^n = M(2\,x) - \left(\mathrm{e}^{2\,x} - 1\right),$$
$$M(2\,x) = \mathrm{e}^{2\,x} - 1 + M(x)\,\mathrm{e}^x,$$
c'est-à-dire finalement : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, G(2\,x) = 1 - \mathrm{e}^{-2\,x} + G(x)}$.

4. Avec le cours, $M \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\dfrac{m_n}{n!} = \dfrac{M^{(n)}(0)}{n!}$ donc $m_n = M^{(n)}(0)$.
Avec $M(x) = \mathrm{e}^x\, G(x)$ la formule de Leibniz donne
$$m_n = M^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G^{(k)}(0)\ \exp^{(n-k)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G^{(k)}(0).$$
Enfin, la formule obtenue en 4, donne par récurrence sur k, l'égalité
$$2^k\, G^{(k)}(2\,x) = -(-2)^k\, \mathrm{e}^{-2\,x} + G^{(k)}(x),$$
d'où, pour $x = 0$, $(2^k - 1)\, G^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}\, 2^k$, c'est-à-dire $G^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} \dfrac{2^k}{2^k - 1}$ et finalement
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(M_n) = m_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{2^k}{2^k - 1}}\ .$$