Devoir non surveillé 16

Pour le mardi 23 janvier (facultatif)

Exercice

On considère une expérience aléatoire dont l'ensemble des résultats possibles est noté Ω.
Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et T une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans $[\![0, k]\!]$.
On considère alors une suite $(X_i)_{i \in [\![0,k]\!]}$ de variables aléatoires de même loi et toutes à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
On suppose que les variables aléatoires $X_0, X_1, \ldots, X_k$ et T sont mutuellement indépendantes.

On définit la variable aléatoire Y par : $\quad \forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \displaystyle\sum_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega)$

1. Montrer que l'existence de l'espérance des variables aléatoires X_i entraine celle de l'espérance de Y.
   On pourra constater que $([T = j])_{j \in [\![0,k]\!]}$ constitue un système complet d'événements.
2. Calculer alors $\mathbb{E}(Y)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_0)$ et $\mathbb{E}(T)$.
3. On suppose que $\mathbb{E}(X_0) = 0$ et que X_0^2 possède une espérance.
   Prouver alors que : $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X_0)(\mathbb{E}(T) + 1)$.

Problème

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont définies sur le même espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. On note $\mathbb{P}$ une probabilité sur cet espace. On note $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ les espérance et variance (pour la probabilité $\mathbb{P}$) d'une variable aléatoire X. Si $A \in \mathcal{A}$, on note $\mathbb{1}_A$ son indicatrice, c'est-à-dire l'application qui à chaque $\omega \in \Omega$ associe 1 si $\omega \in A$ et 0 sinon. Si $A \in \mathcal{A}$ est de probabilité non nulle, on note $\mathbb{P}_A$ la probabilité conditionnelle sachant A et, s'il y a lieu, $\mathbb{E}_A(X)$ l'espérance, pour $\mathbb{P}_A$, d'une variable aléatoire X.

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

L'objet du problème est, principalement, l'étude de la variable aléatoire égale au maximum de n variables indépendantes toutes de même loi géométrique.
La partie I regroupe des questions indépendantes dont les résultats seront utilisés par la suite.

Partie I. Préliminaires

1. `Un résultat bien connu` ♡
   Montrer qu'il existe un réel noté γ pour lequel on a : $H_n = \ln n + \gamma + \underset{n \to +\infty}{\mathrm{o}}(1)$.
2. `Un résultat de bornitude ...`♡
   Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction f a une limite nulle en $+\infty$. Montrer que la fonction f est bornée.
3. `Une formulation intégrale des moments d'une variable positive`
   Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (a) Démontrer que X est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum \mathbb{P}([X > n])$ converge et que dans ce cas, on a :
   $$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > n])$$
   (b) Vérifier que la fonction qui à chaque réel t associe $\mathbb{P}([X > t])$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que X a une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}([X > t])\, dt$$

converge et que, dans ce cas, on a l'égalité : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{P}([X > t])\, dt$.

(d) Montrer que X a un moment d'ordre 2 si et seulement si l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t\, \mathbb{P}([X > t])\, dt$$

converge et que, dans ce cas, on a l'égalité : $\mathbb{E}(X^2) = 2 \displaystyle\int_0^{+\infty} t\, \mathbb{P}([X > t])\, dt$.

4. `Autour du produit de convolution.`

Rappeler l'énoncé définissant le produit de Cauchy de deux séries entières $\sum \dfrac{a_n}{n!} x^n$ et $\sum \dfrac{b_n}{n!} x^n$ et précisant sa nature et sa somme.

5. `Loi conditionnelle d'un vecteur aléatoire.`

(a) Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
Quelle est la loi de $X - 1$ pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X>1]}$?

(b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et X_1, X_2, ..., X_r des variables aléatoires **indépendantes** toutes de même loi, chacune suivant la loi géométrique (sur $\mathbb{N}^*$) de paramètre $p \in]0,1[$.
On note $A = \bigcap_{i=1}^{r} [X_i > 1]$.
Montrer que le vecteur aléatoire $(X_1 - 1,\, X_2 - 1, \cdots, X_r - 1)$ a, pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A$, même loi que le vecteur aléatoire $(X_1, X_2, \cdots, X_r)$ (pour la probabilité $\mathbb{P}$).

6. `La formule de l'espérance totale.`
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

(a) Soit A un événement de probabilité non nulle et soit X une variable aléatoire possédant une espérance. Montrer que le produit $X \times \mathbb{1}_A$ a une espérance et exprimer $\mathbb{E}(X \times \mathbb{1}_A)$ à l'aide de $\mathbb{E}_A(X)$.

(b) On considère des événements A_1, A_2, ... , A_n, chacun étant de probabilité non nulle, formant une partition de Ω. Soit X une variable aléatoire, définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et possédant une espérance. Établir l'égalité :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_{A_k}(X)\, \mathbb{P}(A_k).$$

Dans toute la suite du problème on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires **indépendantes** toutes de même loi, chacune suivant la loi géométrique (sur $\mathbb{N}^*$) de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
On note, pour tout entier naturel n non nul et tout $\omega \in \Omega$,

$$I_n(\omega) = \min\big(X_1(\omega),\, X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega)\big) \quad \text{et} \quad M_n(\omega) = \max\big(X_1(\omega),\, X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega)\big).$$

7. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, l'application I_n est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Il en est de même, et on l'admet, de l'application M_n.

Partie II. Étude du minimum.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, I_n suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
2. Quelles sont les limites de $\mathbb{E}(I_n)$, $\mathbb{V}(I_n)$ et, pour tout entier naturel k non nul, $\mathbb{P}([I_n = k])$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?

3. (a) Soit $\omega \in \Omega$. Justifier l'existence d'une limite finie, notée $\ell(\omega)$, pour la suite de terme général $I_n(\omega)$.

   (b) Exprimer la partie $\mathcal{L} = \{\omega \in \Omega \,;\, \ell(\omega) = 1\}$ en fonction des événements $[I_n = 1]$ et en déduire que la partie $\mathcal{L}$ est un événement presque sûr.

Partie III. Étude du maximum.

1. **L'espérance de M_n tend vers $+\infty$.**

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

      i. Justifier l'existence d'une espérance pour la variable M_n et l'encadrement
      $$\frac{1}{p} \leqslant \mathbb{E}(M_n) \leqslant \frac{n}{p}.$$

      ii. Déterminer, pour tout entier naturel k, la valeur de $\mathbb{P}([M_n \leqslant k])$.

   (b) i. Soit $K \in \mathbb{N}^*$. Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :
      $$\mathbb{E}(M_n) \geqslant \mathbb{E}(M_n\, \mathbb{1}_{[M_n \leqslant K]}) + K\,\mathbb{P}([M_n > K]).$$

      ii. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(M_n) = +\infty$.

2. **Deux expressions de l'espérance de M_n.**
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Établir l'égalité : $\mathbb{E}(M_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i-1} \frac{1}{1-q^i}$. *On utilisera le résultat de I-3-a).*

   (b) On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x. Établir l'égalité : $\mathbb{E}(M_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - (1 - q^{\lfloor t \rfloor})^n\right) dt$.
   On utilisera le résultat de I-3-c).

3. **Estimation de l'espérance de M_n.**

   (a) Justifier, pour tout entier naturel k, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} q^t\,(1-q^t)^k\,dt$ et déterminer sa valeur.

   (b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - (1-q^t)^n\right) dt = -\frac{H_n}{\ln q}$.

   (c) i. Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'encadrement :
      $$-\frac{H_n}{\ln q} \leqslant \mathbb{E}(M_n) \leqslant -\frac{H_n}{\ln q} + 1.$$
      En déduire l'équivalent de $\mathbb{E}(M_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{\ln n}{\ln q}$.

      ii. Déduire de l'encadrement précédent, pour tout $x \in]0,1[$, l'encadrement :
      $$-\frac{x}{1-x} \leqslant \ln(1-x) \leqslant -x.$$

4. **Estimation de la variance de M_n.**

   (a) Soit $k \in \mathbb{N}$.

      i. Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,q^t\,(1-q^t)^k\,dt$; on note α_k sa valeur.

      ii. Établir l'égalité $\alpha_k = -\dfrac{1}{(k+1)\,\ln q} \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - (1-q^t)^{k+1}\right) dt$.

(b) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :
$$\int_0^{+\infty} t\left(1-(1-q^t)^n\right)dt = \frac{1}{\ln^2 q}\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k},$$
puis l'encadrement : $\displaystyle \frac{2}{\ln^2 q}\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k} \leqslant \mathbb{E}(M_n^2) \leqslant 1+\frac{2}{\ln^2 q}\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k} - 2\,\frac{H_n}{\ln q}$.

(c) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\displaystyle H_n^2 = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

(d) En déduire $\mathbb{V}(M_n) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{O}}(\ln(n))$.

Partie IV. Comportement asymptotique de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. Prouver, pour tout $x \in [0,1[$, l'encadrement : $\displaystyle -\frac{x^2}{1-x} \leqslant x+\ln(1-x) \leqslant 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver, pour tout entier naturel k non nul, les majorations :
$$\left|\mathrm{e}^{-n\,q^k} - (1-q^k)^n\right| \leqslant \frac{n\,q^{2\,k}}{1-q^k}\,\mathrm{e}^{-n\,q^k} \leqslant \frac{n\,q^{2\,k}}{1-q}\,\mathrm{e}^{-n\,q^k}.$$
3. Montrer que la fonction $x \longmapsto x^2\,\mathrm{e}^{-x}$ est bornée sur $\mathbb{R}^*$.
4. Déduire des questions précédentes le résultat asymptotique suivant :
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{k\in\mathbb{N}^*}\left|\mathbb{P}([M_n \leqslant k]) - \mathrm{e}^{-n\,q^k}\right| = 0.$$

Partie V. Où l'on retrouve une formule exacte pour l'espérance de M_n.

Dans cette dernière partie on suppose que $p=\frac{1}{2}$ et on considère un entier $n\in\mathbb{N}^*$.
On pose $m_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul, $m_n = \mathbb{E}(M_n)$.

1. On note $B_0 = \bigcap_{i=1}^{n}[X_i > 1]$, $B_n = \bigcap_{i=1}^{n}[X_i = 1]$ et, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,
$$B_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k}[X_i = 1]\right) \bigcap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n}[X_i > 1]\right).$$
   (a) Établir, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, l'égalité : $\mathbb{E}_{B_k}(M_n) = 1 + m_{n-k}$.

   (b) En utilisant la formule de l'espérance totale, établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :
$$m_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+m_{n-k}).$$
2. Justifier, pour tout réel x, la convergence de la série de terme général $\displaystyle \frac{m_n}{n!}\,x^n$.

   On note, pour tout réel x, $\displaystyle M(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{m_n}{n!}\,x^n$.
3. Établir, pour tout réel x, l'égalité : $M(2\,x) = \mathrm{e}^{2\,x} - 1 + M(x)\,\mathrm{e}^{x}$.

   On note, pour tout réel x, $G(x) = M(x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
   On a donc, pour tout réel x, $G(2\,x) = 1 - \mathrm{e}^{-2\,x} + G(x)$.
4. Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité : $\displaystyle \mathbb{E}(M_n) = m_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{2^k}{2^k-1}$.