Devoir non surveillé 15 - Correction

Exercice 1
E3A PSI 2023 Exercice 2

Un corrigé de B. Winckler

1. On a : $X^{n+1}-1=(X-1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n}X^k$. Par conséquent, lorsqu'on fait la division euclidienne de $X^{n+1}-1$ par $X-1$, le quotient vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}X^k$ et le reste est nul.
2. On a : $\forall x\in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1-x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$, et la série entière associée diverge en tout point hors de cet intervalle ouvert.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆⋆

3. **Étude d'une suite.**
   a. Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. L'application $t\mapsto\dfrac{1-t}{1-t^{n+1}}$ est continue (par morceaux) sur $[0,1[$ en tant que quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas, et pour tout t au voisinage de 1 on a :

$$\frac{1-t}{1-t^{n+1}}=\frac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}t^k}\xrightarrow[t\to1]{}\frac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}1}=\frac{1}{n+1}.$$

   On en déduit que $t\mapsto\dfrac{1-t}{1-t^{n+1}}$ se prolonge en une application continue sur le SEGMENT $[0,1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{1-t}{1-t^{n+1}}\mathrm{d}t$ converge. D'où le résultat.

   b. Notons que pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, on a aussi : $u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{1-t}{1-t^{n+1}}\mathrm{d}t$.
   Nous allons déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ avec le théorème de convergence dominée. Posons :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\ \forall t\in[0,1[,\quad f_n(t)=\frac{1-t}{1-t^{n+1}}.$$

   Alors :
   — pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, l'application f_n est continue par morceaux sur $[0,1[$;
   — pour tout $t\in[0,1[$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}t^n=0$, et donc :

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(t)=1-t,$$

   et on en déduit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers $f:t\mapsto1-t$, qui est aussi continue par morceaux sur $[0,1[$;

— pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $t \in [0,1[$, on a :

$$|f_n(t)| = \frac{1-t}{1-t^{n+1}} = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} t^k} \leqslant 1, \quad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

et l'application $\varphi : t \mapsto 1$ est trivialement continue par morceaux sur $[0,1[$, et même sur le segment $[0,1]$, donc elle y est intégrable.

Par le théorème de convergence dominée, on a d'une part l'intégrabilité de f et de f_n pour tout entier $n \geqslant 1$ (ce qu'on savait déjà), et d'autre part :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}t = \left[\frac{(1-t)^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2},$$

ce qu'on voulait démontrer : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge vers $\ell = \dfrac{1}{2}$.

4. **Étude de la série de terme général $u_n - \ell$.**

a. Soit $t \in [0,1]$. Si $t \neq 1$, alors la série $\sum\limits_{p\geqslant 1} g_p(t) = (1-t)\sum\limits_{p\geqslant 1}\left(t^{n+1}\right)^p$ est géométrique de raison $t^{n+1} \in [0,1[$, donc elle converge. Si $t = 1$, alors $\sum\limits_{p\geqslant 1} g_p(1) = \sum\limits_{p\geqslant 1} 0$ converge trivialement. On en déduit que $\sum\limits_{p\geqslant 1} g_p(t)$ converge pour tout $t \in [0,1]$, donc $\sum\limits_{p\geqslant 1} g_p$ converge simplement sur $[0,1]$. On a par ailleurs, si $t = 1$:

$$\sum_{p=1}^{+\infty} g_p(1) = \sum_{p=1}^{+\infty} 0 = 0,$$

et si $t \neq 1$:

$$\sum_{p=1}^{+\infty} g_p(t) = (1-t)\sum_{p=1}^{+\infty}\left(t^{n+1}\right)^p = (1-t)\frac{t^{n+1}}{1-t^{n+1}}.$$

En résumé :

$$\forall t \in [0,1], \quad \sum_{p=1}^{+\infty} g_p(t) = \begin{cases} t^{n+1}\dfrac{1-t}{1-t^{n+1}} & \text{si } t \neq 1, \\ 0 & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Remarque. La fonction $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} g_p$ n'est pas continue en 1, puisque : $\lim\limits_{t\to 1^-} t^{n+1}\dfrac{1-t}{1-t^{n+1}} = \dfrac{1}{n+1} \neq 0$. On en déduit, même si ce n'est pas demandé, que la série de fonctions $\sum\limits_{p\geqslant 1} g_p$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

b. Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_p(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(t^{(n+1)p} - t^{(n+1)p+1}\right)\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{(n+1)p+1}}{(n+1)p+1} - \frac{t^{(n+1)p+2}}{(n+1)p+2}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{(n+1)p+1} - \frac{1}{(n+1)p+2},\end{aligned}$$

et on en déduit :

$$\int_0^1 g_p(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{((n+1)p+1)((n+1)p+2)} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)^2 p^2}.$$

c. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a :

$$u_n - \frac{1}{2} = \int_0^1 \frac{1-t}{1-t^{n+1}}\mathrm{d}t - \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)\left(\frac{1}{1-t^{n+1}} - 1\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)\frac{t^{n+1}}{1-t^{n+1}}\mathrm{d}t.$$

D'après le calcul effectué dans la question a, on a donc :

$$u_n - \frac{1}{2} = \int_0^1 \sum_{p=1}^{+\infty} g_p(t)\mathrm{d}t.$$

Justifions qu'on peut permuter l'intégrale et la somme. Nous allons utiliser le théorème d'intégration terme à terme. Vérifions ses hypothèses :

— pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'application $g_p : t \mapsto (1-t)t^{(n+1)p}$ est continue par morceaux sur le segment $[0,1]$, donc elle y est intégrable ;

— la série $\sum_{p \geqslant 1} g_p$ converge simplement sur $[0,1]$, comme on l'a justifié dans la question a, et sa somme $t \mapsto \begin{cases} t^{n+1}\dfrac{1-t}{1-t^{n+1}} & \text{si } t \neq 1 \\ 0 & \text{si } t = 1 \end{cases}$ est manifestement continue par morceaux sur $[0,1]$;

— la série $\sum_{p \geqslant 1} \int_0^1 |g_p(t)|\mathrm{d}t$ converge, puisque l'on a, pour tout p au voisinage de $+\infty$:

$$\int_0^1 |g_p(t)|\mathrm{d}t = \int_0^1 g_p(t)\mathrm{d}t \underset{p \to +\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{p^2}\,; \qquad \text{(q. b)}$$

et la série de Riemann $\sum_{p \geqslant 1} \frac{1}{p^2}$ converge car son exposant est $2 > 1$; par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{p \geqslant 1} \int_0^1 |g_p(t)|\mathrm{d}t$ converge aussi.

Les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme étant vérifiées, on en déduit d'une part que l'application $\sum_{p=1}^{+\infty} h_p$ est intégrable sur $[0,1]$, et d'autre part que :

$$u_n - \frac{1}{2} = \int_0^1 \sum_{p=1}^{+\infty} g_p(t)\mathrm{d}t = \sum_{p=1}^{+\infty} \int_0^1 g_p(t)\mathrm{d}t \overset{(q.\,b)}{=} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{((n+1)p+2)((n+1)p+1)},$$

d'où le résultat.

d. Pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$|h_p(t)| = h_p(t) \leqslant \frac{t^2}{((t+1)p)^2} \leqslant \frac{(t+1)^2}{(t+1)^2 p^2} = \frac{1}{p^2}.$$

Cette majoration est indépendante de t. Par propriété de la borne supérieure :

$$\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \|h_p\|_\infty \leqslant \frac{1}{p^2}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{p \geqslant 1} \frac{1}{p^2}$ converge car son exposant est $2 > 1$. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de fonctions $\sum_{p \geqslant 1} h_p$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$: d'où le résultat.

e. Soit n au voisinage de $+\infty$. Avec les notations de la question précédente, on a :

$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{n^2} \sum_{p=1}^{+\infty} h_p(n).$$

Or la série de fonctions $\sum_{p \geqslant 1} h_p$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $p \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ on montre facilement qu'on a : $\lim_{t \to +\infty} h_p(t) = \frac{1}{p^2} \in \mathbb{R}$. Donc, par le théorème de la double limite : $\lim_{t \to +\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} h_p(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \lim_{t \to +\infty} h_p(t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (cette dernière égalité utilise le résultat admis). De même, quand $n \to +\infty$, on a $n+1 \to +\infty$, donc par composition de limites :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} h_p(n) = \frac{\pi^2}{6}.$$

On en déduit :

$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{n^2} \sum_{p=1}^{+\infty} h_p(n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\pi^2}{6},$$

c'est-à-dire :

$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{6n^2} + \underset{n \to +\infty}{o} \left(\frac{1}{n^2} \right),$$

d'où :

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2} \right),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 2
CCP PC 2019

à partir des corrigés de V. Masselin et L. Carrot

1. f est la somme d'une série entière de rayon $r > 0$ donc f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r;r[$ et on peut dériver terme à terme à tout ordre (le rayon de convergence est conservé). En particulier, elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-r;r[$ et, pour $x \in]-r;r[$,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

2. On a donc, pour $x \in]-r;r[$, après décalages d'indices,

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
x^2(1-x)f''(x)-x(1+x)f'(x)+f(x) &= x^2(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} - x(1+x)\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n \\
&= (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nx^n - (1+x)\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(n(n-1)-n+1\Big)a_nx^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(n(n-1)+n\Big)a_nx^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n-1)^2a_nx^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n^2a_nx^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n-1)^2a_nx^n - \sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)^2a_{n-1}x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)^2(a_n-a_{n-1})x^n
\end{aligned}$$

Donc, si on pose, pour $n \geq 2$, $b_n = (n-1)^2$, on a bien :

$$\boxed{x^2(1-x)f''(x)-x(1+x)f'(x)+f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n-a_{n-1})x^n.}$$

3. f est solution de (E) sur $]-r,r[$ si et seulement si pour tout $x \in]-r,r[$,

$$x^2(1-x)f''(x)-x(1+x)f'(x)+f(x) = 0 \Longleftrightarrow a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)^2(a_n-a_{n-1})x^n = 0.$$

Comme 0 est son propre développement en série entière, de rayon de convergence $+\infty$, on a, par unicité du développement en série entière sur $]-r,r[$,

$$\left(\forall x \in]-r,r[,\ a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)^2(a_n-a_{n-1})x^n = 0\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 2, (n-1)^2(a_n-a_{n-1}) = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 2, a_n = a_{n-1} \end{cases}$$

D'où $\boxed{f \text{ est solution de } (H) \text{ sur }]-r,r[\text{ si et seulement si } a_0 = 0 \text{ et } a_{n+1} = a_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

4. On suppose que f est solution de (H) sur $]-r;r[$. Alors, $a_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $a_n = a_1$.
La série géométrique $\sum x^n$ est de rayon 1 donc $r \geq 1$ ($r = +\infty$ si $a_1 = 0$) et, en posant $\lambda = a_1$, pour $x \in]-1;1[$, $f(x) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$.
Il s'agit de la somme d'une série géométrique de raison $x \in]-1;1[$ et de premier terme x donc :

$$\boxed{\forall x \in]-1;1[, \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}.}$$

5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et g la fonction $x \mapsto \dfrac{\lambda x}{1-x}$.

Alors, d'après le calcul précédent, pour $x \in]-1;1[$, $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x^n$: g est la somme d'une série entière de

rayon $1>0$. De plus, pour $x\in]-1;1[$, $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ avec $a_0=0$ et, pour $n\geq 1$, $a_n=\lambda$; par conséquent, pour tout $n\geq 1$, $a_{n+1}=a_n$.
On peut donc utiliser la question 3 (qui est une équivalence) pour conclure que g est une solution de (H) sur $]-1;1[$, développable en série entière.

On aurait pu également calculer $g(x)=\dfrac{\lambda x}{1-x}$, $g'(x)=\dfrac{\lambda}{(1-x)}$ et $g''(x)=\dfrac{2\lambda}{(1-x)^3}$ et reporter dans (H) pour montrer que g est bien une solution de (H) sur $]-1,1[$ développable en série entière.

Exercice 3
E3A PSI 2023 Exercice 1

Un corrigé de B. Winckler

1. Pour que la famille $(p_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2}$ définisse bien la loi conjointe de deux variables aléatoires X et Y, encore faut-il que $p_{i,j}$ soit positif pour tout $(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2$, et que : $\sum_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2}p_{i,j}=1$. Calculons donc cette somme et regardons à quelle condition sur α elle vaut 1. On a :

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2}p_{i,j}=\alpha\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}=\alpha\sum_{i'=0}^{n}\binom{n}{i'}\sum_{j'=0}^{n}\binom{n}{j'},$$

et pour calculer ces deux sommes on utilise la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=(1+1)^n=2^n \tag{1}$$

donc finalement, quitte à renommer l'indice de sommation :

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2}p_{i,j}=\alpha\sum_{i'=0}^{n}\binom{n}{i'}2^n=\alpha(2^n)^2=\alpha 4^n.$$

On en déduit : $\sum_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2}p_{i,j}=1\iff\alpha=\dfrac{1}{4^n}$. Et pour cette valeur de α, on a bien $p_{i,j}\geqslant 0$ pour tout $(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2$. Ainsi $\alpha=\frac{1}{4^n}$ répond à la question posée.
2. Soit $i\in[\![1,n+1]\!]$. La famille $((Y=j))_{j\in[\![1,n+1]\!]}$ est un système complet d'évènements. Par la formule des probabilités totales, on a donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=i)=\sum_{j=1}^{n+1}\mathrm{P}\left((X=i)\cap(Y=j)\right)&=\frac{1}{4^n}\binom{n}{i-1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}\\&=\frac{1}{4^n}\binom{n}{i-1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\\&\overset{(1)}{=}\frac{1}{2^n}\binom{n}{i-1}.\end{aligned}$$

Le même raisonnement donne : $\forall j\in[\![1,n+1]\!]$, $\mathrm{P}(Y=j)=\dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{j-1}$.

3. Soit $(i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2$. On a d'après la question précédente :
$$\mathrm{P}(X=i)\mathrm{P}(Y=j) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{i-1} \times \frac{1}{2^n}\binom{n}{j-1} = \frac{1}{4^n}\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1} = \mathrm{P}((X=i)\cap(Y=j)).$$
Ceci montre que les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
4. On a : $Z(\Omega) = [\![0,n]\!]$, et pour tout $k \in Z(\Omega)$ on a :
$$\mathrm{P}(Z=k) = \mathrm{P}(X=k+1) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = \binom{n}{k}\frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{n-k}}.$$
On reconnaît une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. On a donc : $\mathrm{E}(Z) = \frac{n}{2}$, et : $\mathrm{V}(Z) = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{n}{4}$. Or : $X = Z+1$, donc par linéarité de l'espérance :
$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Z) + 1 = \frac{n}{2} + 1,$$
et :
$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{V}(Z+1) = \mathrm{V}(Z) = \frac{n}{4}.$$
5. Soit $(i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2$. Notons que la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}_{(X=j)}(X=i)$ existe bien car $\mathrm{P}(X=j) > 0$ pour tout $j \in [\![1,n+1]\!]$, d'après la loi de X trouvée à la question 2. Comme X et Y sont indépendantes, on a :
$$b_{i,j} = \mathrm{P}_{(X=j)}(Y=i) = \frac{\mathrm{P}(X=j \cap Y=i)}{\mathrm{P}(X=j)} = \frac{\mathrm{P}(X=j)\mathrm{P}(Y=i)}{\mathrm{P}(X=j)} = \mathrm{P}(Y=i).$$
6. On a, d'après la question précédente :
$$B = ((\mathrm{P}(Y=i)))_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(Y=1) & \mathrm{P}(Y=1) & \cdots & \mathrm{P}(Y=1) \\ \mathrm{P}(Y=2) & \mathrm{P}(Y=2) & \cdots & \mathrm{P}(Y=2) \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathrm{P}(Y=n+1) & \mathrm{P}(Y=n+1) & \cdots & \mathrm{P}(Y=n+1) \end{pmatrix}$$
$$\sim_C \begin{pmatrix} \mathrm{P}(Y=1) & 0 & \cdots & 0 \\ \mathrm{P}(Y=2) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathrm{P}(Y=n+1) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (\forall j \in [\![2,n+1]\!],\ C_j \leftarrow C_j - C_1).$$
On en déduit que B est de rang 1 (la première colonne contient des probabilités non nulles, donc B n'est pas de rang nul). Cette même opération sur les colonnes montre que l'on a :
$$\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} \mathrm{P}(Y=1) \\ \mathrm{P}(Y=2) \\ \mathrm{P}(Y=3) \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathrm{P}(Y=n+1) \end{pmatrix}\right), \quad \mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
7. Posons : $C = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(Y=1) \\ \mathrm{P}(Y=2) \\ \vdots \\ \mathrm{P}(Y=n+1) \end{pmatrix}$, et : $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. On a, d'après les règles basiques de calcul matriciel :
$$B = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(Y=1) & \mathrm{P}(Y=1) & \cdots & \mathrm{P}(Y=1) \\ \mathrm{P}(Y=2) & \mathrm{P}(Y=2) & \cdots & \mathrm{P}(Y=2) \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathrm{P}(Y=n+1) & \mathrm{P}(Y=n+1) & \cdots & \mathrm{P}(Y=n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(Y=1) \\ \mathrm{P}(Y=2) \\ \vdots \\ \mathrm{P}(Y=n+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire : $B = CL$.

8. On a, avec les notations de la question précédente : $B^2 = (CL)(CL) = C(LC)L$. Or :

$$LC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{P}(Y=1) \\ \mathrm{P}(Y=2) \\ \vdots \\ \mathrm{P}(Y=n+1) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{P}(Y=i) = \mathrm{tr}(B),$$

donc : $B^2 = C \cdot \mathrm{tr}(B) \cdot L = \mathrm{tr}(B) CL = \mathrm{tr}(B) B$ (en effet $\mathrm{tr}(B)$ est un réel et il commute donc avec L). D'où le résultat.

9. On reprend l'égalité de la question précédente. On a : $B^2 = \mathrm{tr}(B)B$. Mieux : comme la famille $((Y=i))_{i \in [\![1,n+1]\!]}$ est un système complet d'évènements, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{P}(Y=i) = 1$, donc : $\mathrm{tr}(B) = 1$, et on a simplement : $B^2 = B$.

   Autrement dit : $X^2 - X = X(X-1)$ est un polynôme annulateur de B. On en déduit d'une part que les valeurs propres de B sont parmi ses racines, c'est-à-dire : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) \subseteq \{0,1\}$, et d'autre part que B est diagonalisable par le critère de diagonalisation, puisqu'elle admet un polynôme annulateur scindé et à racines simples.

   Pour achever la résolution de cette question, on se demande si réciproquement, 0 et 1 sont valeurs propres. La réponse est positive pour les deux, et il y a plusieurs façons de le démontrer : on peut par exemple noter que si a et b désignent respectivement les ordres de multiplicité de 0 et 1 comme valeurs propres de B (avec $a = 0$ si 0 si n'est pas valeur propre, et de même $b = 0$ si 1 n'est pas valeur propre), alors : $\mathrm{tr}(B) = 1 = 0 \times a + 1 \times b$, parce que la trace est la somme des valeurs propres comptées avec leurs ordres de multiplicité. Donc : $b = 1$, ce qui assure que 1 est valeur propre simple, et donc 0 doit être valeur propre d'ordre de multiplicité $(n+1) - 1 = n$ (la somme des ordres de multiplicités doit donner $\deg(\chi_B)$ si χ_B est scindé, et c'est bien le cas ici puisque B est diagonalisable). Ainsi 0 et 1 sont effectivement valeurs propres, donc :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{0,1\}.$$

   Remarque. La matrice B est une matrice de projecteur. Cette observation aurait aussi pu être utilisée pour la diagonaliser.

Exercice 4

On se donne une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on note $A = \displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n \right)$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \geq k$ entier, A_n est un événement. Par définition de tribu est que $B_k = \displaystyle\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n$ est un événement.

   Et donc $A = \displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k$ (conséquence directe de la définition de tribu) est aussi un événement (élément de $\mathcal{A}$).

   D'autre part, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \omega \in A &\iff \forall k \in \mathbb{N},\ \omega \in B_k = \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n \\ &\iff \forall k \in \mathbb{N},\ \exists n \geq k \text{ entier}, \quad \omega \in A_n \\ &\iff \omega \text{ appartient à une infinité d'ensembles } A_n \end{aligned}$$

   Ainsi, dans le langage probabiliste, A est réalisé ssi une infinité d'événements A_n est réalisé.

2. On reprend la notation $B_k = \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n$.

   Alors, $B_k = A_k \cup B_{k+1}$ donc $B_{k+1} \subset B_k$ et par continuité décroissante :

$$\boxed{P(A) = P\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) = \lim_{k\to+\infty} P(B_k) = \lim_{k\to+\infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n\right).}$$

3. On suppose que la série $\sum P(A_n)$ converge. Et donc les restes partiels de cette série tendent vers 0.

   On pose $R_k = \sum_{n=k+1}^{+\infty} P(A_n)$. On a $\lim_{k\to+\infty} R_k = 0$.

   Or par sous-additivité :

$$0 \leq P\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=k}^{+\infty} P(A_n) = R_{k-1}$$

   Et par le théorème d'encadrement, $\lim_{k\to+\infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n\right) = 0$.

   En utilisant le résultat de la question précédente, on trouve $\boxed{P(A) = 0.}$

4. On suppose que la série $\sum P(A_n)$ diverge et que les événements A_n sont mutuellement indépendants. Alors les événements $\overline{A_n}$ sont aussi mutuellement indépendants.

   Or, par les lois de Morgan :

$$\overline{A} = \overline{\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n\right)\right)} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \overline{\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n\right)} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{n=k}^{+\infty} \overline{A_n}\right).$$

   L'entier naturel k est fixé. Pour $N \geq k$, on note $C_N = \bigcap_{n=k}^{N} \overline{A_n}$, alors $C_{N+1} = C_N \cap \overline{A_{N+1}} \subset C_N$.

   Et par continuité décroissante :

$$P\left(\bigcap_{n=k}^{+\infty} C_n\right) = \lim_{N\to+\infty} P(C_N).$$

   Or, puisque les les événements A_n sont mutuellement indépendants, on a $P(C_N) = P\left(\bigcap_{n=k}^{N} \overline{A_n}\right) = \prod_{n=k}^{N} P(\overline{A_n})$.

   On montrerait (vu en TD) par double inclusion que $\bigcap_{n=k}^{+\infty} C_n = \bigcap_{n=k}^{+\infty} \overline{A_n}$.

   Ainsi, $\boxed{P\left(\bigcap_{n=k}^{+\infty} \overline{A_n}\right) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=k}^{N} P(\overline{A_n}) = \prod_{n=k}^{+\infty} P(\overline{A_n}).}$

   Or (sous réserve d'existence *) :

$$\ln\left(\prod_{n=k}^{N} P(\overline{A_n})\right) = \sum_{n=k}^{N} \ln(1 - P(A_n)).$$

   - Si $P(A_n)$ ne tend pas vers 0 alors $\ln(1 - P(A_n))$ non plus et la série diverge.

• Et si $P(A_n)$ tend vers 0, alors $\ln(1-P(A_n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} -P(A_n)$ et comme $\sum P(A_n)$ diverge, par comparaison, $\sum \ln(1-P(A_n))$ diverge.

Dans les deux cas, on trouve que $\sum \ln(1-P(A_n))$ diverge. Comme les termes sont négatifs, les sommes partielles sont décroissantes et forcément, elles divergent vers $-\infty$.
En passant à l'exponentielle : $\lim\limits_{N\to+\infty} P(C_N) = 0$.

* Si l'un des $P(\overline{A_n})$ est nul, alors $\prod\limits_{n=k}^{N} P(\overline{A_n})$ est nul à partir d'un certain rang, et on retrouve le même résultat.

On a donc $P\left(\bigcap\limits_{n=k}^{+\infty} \overline{A_n}\right) = 0$.

En remplaçant dans ce qui précède, on trouve $P(\overline{A}) = 0$. Et donc $\boxed{P(A) = 1.}$

Formule des probabilités totales

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants, alors toute famille $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$ on a $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$, est aussi formée d'événements mutuellement indépendants

Soient $i_1,\ldots,i_p$ des indices distincts de $\{1,\ldots,n\}$. On suppose qu'il y en a au moins deux (i.e. $p \geq 2$).
Par hypothèse, on sait donc que $P\left(\bigcap\limits_{j=1}^{p} A_{i_j}\right) = \prod\limits_{j=1}^{p} P(A_{i_j})$ et aussi $P\left(\bigcap\limits_{j=2}^{p} A_{i_j}\right) = \prod\limits_{j=2}^{p} P(A_{i_j})$
Si un seul des événements est changé en son complémentaire : puisque l'ordre n'a pas d'importance ici, on peut supposer que c'est A_{i_1}.
La famille $(A_{i_1}, \overline{A_{i_1}})$ est un système complet d'évenements, donc par la formule des probabilités totales :

$$P\left(\bigcap_{j=2}^{p} A_{i_j}\right) = P\left(\bigcap_{j=1}^{p} A_{i_j}\right) + P\left(\overline{A_1} \cap \left(\bigcap_{j=2}^{p} A_{i_j}\right)\right).$$

Et donc :

$$P\left(\overline{A_1} \cap \left(\bigcap_{j=2}^{p} A_{i_j}\right)\right) = \prod_{j=2}^{p} P(A_{i_j}) - \prod_{j=1}^{p} P(A_{i_j}) = \prod_{j=2}^{p} P(A_{i_j})(1-P(A_{i_1})) = \prod_{j=2}^{p} P(A_{i_j})P(\overline{A_{i_1}}).$$

Ce qu'on voulait !

En réitérant l'opération : on montrerait que le résultat en encore valable, en changeant un autre événement en son complémentaire, puis deux...
D'où le résultat.